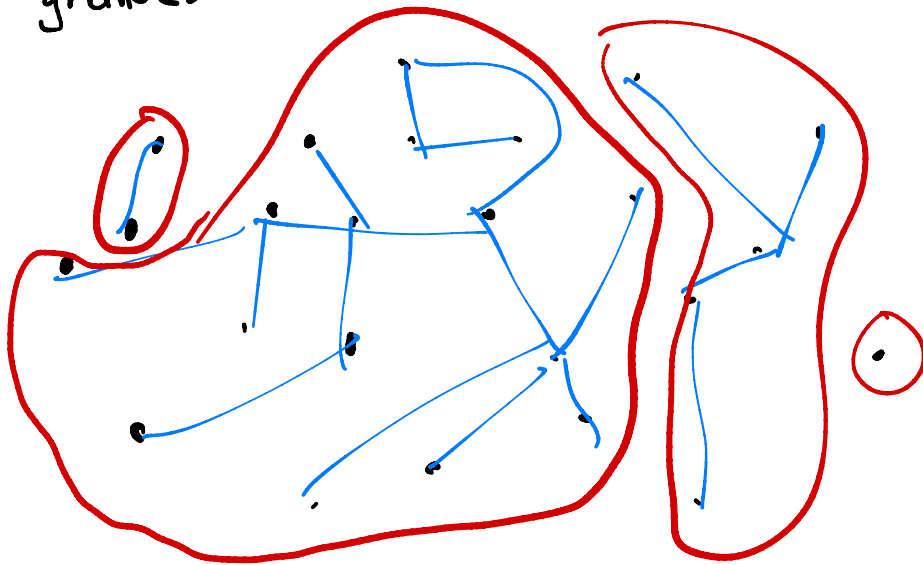



2.-) Ejemplo: una gráfica grande:



Se estudia la conectividad de una gráfica.

Conteo de # componentes conexas \approx Algo simple?

Motivación:

Problema:

$$\{z_k\}_{k \geq 1}$$

← variables aleatorias independientes, con $E[z_k] = 0$, y definimos

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n E[z_k^2].$$

$$S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n z_k$$

Pregunta: $d_k(S_n, N) \approx ?$ $N \sim \text{Normal}(0, 1)$?

Heurística de Stein:
es "razonable" pensar que es equivalente

$$a) \sup_{z \in \mathbb{R}} |P\{S_n \leq z\} - P\{N \leq z\}| \approx 0$$

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |E[\mathbb{1}_{\{S_n \leq z\}}] - E[\mathbb{1}_{\{N \leq z\}}]|$$

$$b) \sup_{f \in \mathcal{L}} |E[S_n f(S_n) - f'(S_n)]| \approx 0.$$

↑
familia de
funciones de prueba

Equivalencia entre a) y b):

considerar la ecuación

$$x f(x) - f'(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq z\}} - E[\mathbb{1}_{\{N \leq z\}}] \quad \textcircled{*}$$

llamamos f_z a la solución a $\textcircled{*}$.

Notar que

$$|E[S_n f_z(S_n) - f_z'(S_n)]|$$

$$= |E[\mathbb{1}_{\{S_n \leq z\}} - E[\mathbb{1}_{\{N \leq z\}}]]|$$

$$= |P\{S_n \leq z\} - P\{N \leq z\}|.$$

\Rightarrow tomando $\sup_{z \in \mathbb{R}}$

\Rightarrow

$$d_K(S_n, N) = \sup_z |P\{S_n \leq z\} - P\{N \leq z\}| \\ = \sup_z |E[S_n f_z(S_n) - f'_z(S_n)]|$$

Claim:

$f_z \leftarrow$ sale de de $[0, z]$ (o).

pero tiene mejores propiedades.

$$\|f_z\|_\infty, \|f'_z\|_\infty \leq 10$$

Por lo tanto,

$$d_K(S_n, N) \leq \sup_{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} |E[S_n f(S_n) - f'(S_n)]| \\ \text{if } \|f\|_\infty, \|f'\|_\infty \leq 10 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{L[f](S_n)}$$

$$\text{con } L[f](x) = xf(x) - f'(x)$$

Pregunta:

Heurística de Stein:

$\mathcal{C} \leftarrow$ cjtto de funciones de prueba.

$$d_{\mathcal{C}}(X, N) := \sup_{h \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[h(X) - h(N)]|$$

$X \leftarrow$ v.a.

$N \leftarrow \sim N(0,1)$

↓ intercambio mediante
heurística de Stein:

$$\sup_{h \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[X f_h(X) - f_h'(X)]|$$

resolver:

$$\underbrace{X f(x) - f'(x)}_{\mathcal{L}[f](x)} = \mathbb{E}[h(X) - h(N)]$$

Nota:

f_h tiene "mejores" propiedades que h .

Ejemplo:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x); z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Claim: si $h \in \mathcal{C} \Rightarrow f_h$ es absolutamente
continua; \downarrow

Lema 2.3.

libro Normal approximation

by Stein Method.

$$\|f_h'\|_{\infty} \leq 1.$$

$$\Rightarrow d_{\mathcal{C}}(X, N) \leq \sup_{f \in \tilde{\mathcal{C}}} |\mathbb{E}[X f(X) - f'(X)]|.$$

con $\hat{C} = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f' \text{ existe c.s.} \}$
 y $\|f'\|_\infty \leq 1$

Nota:

Si $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ y consideramos.

$$\tilde{x} \nabla f(\tilde{x}) - \Delta f(\tilde{x}) = h(\tilde{x}) - E[h(\tilde{N})]$$

$$\lambda(f)(\tilde{x}) \quad \tilde{N} \sim \mathcal{N}(0, I_d).$$

$$f(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} (h(\tilde{x} \tilde{e}^0 + \sqrt{1-\tilde{e}^{20}} \tilde{z}) - E[h(\tilde{N})]) F_N(d\tilde{z})$$

Si $C = \{ h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : h \text{ es } L\text{-Lipchitz} \}$.

$d_C(x, N) \leftarrow$ solución explícita. y está en términos de una ec. de transporte (libro de C. Villani).

Hay situaciones en las que

$d_{TV}(x, \text{Otra cosa})$ es aproximable.

Otra situación:

- Expansiones de Edgeworth.

$\mu_{X_n} \leftarrow$ medida de proba de X_n

$$\tilde{\mu}_n = \mu_{\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}} \approx \gamma$$

↑
medida Gaussiana estandar d.

$$\int f(x) \mu_n(dx) \approx \int f(x) \gamma(dx) + \int f(x) \underbrace{\hat{\gamma}(dx)}_{\substack{\uparrow \\ \text{medida compleja.}}}$$

↑
medida real

Hasta el momento, hemos visto que

$$d_K(S_n, N) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[f(X) - f'(X)]|$$

$$\mathcal{C} = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.g.} \quad \text{s.t.} \quad f_n(x) - f'_n(x) = h(x) \cdot \mathbb{E}[h(N)] \right. \\ \left. \text{con } h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, 2)}(x) \right\}.$$

¿Cómo manejamos a

$$\mathbb{E}[f(X) - f'(X)]?$$

Caso que consideraremos:

$$X = S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n Z_k, \quad \text{con } Z_k \text{ son centradas } \Leftarrow \\ \text{e indep. (NO necesariamente i.i.d.)}$$

$$\text{donde } \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^2].$$

Vamos a probar que $S_n \xrightarrow{\text{ley}} N(0, 1)$

$$\text{si } \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\left| \frac{Z_k}{\sigma_n} \right|^3 \right] \rightarrow 0$$

De hecho, $\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\left| \frac{Z_k}{\sigma_n} \right|^3 \right]$ es la velocidad de convergencia.

Idea:

Acutar el funcional

$$|\mathbb{E}[S_n f(S_n) - f'(S_n)]|$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k^n, \quad \text{con} \quad \zeta_k^n = \frac{\zeta_k}{\sigma_n}$$

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\zeta_k^n f(\sum_{j=1}^n \zeta_j^n)]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\zeta_k^n \left(f \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n + \zeta_k^n \right) - f \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n \right) \right) \right]$$

heurística

\approx

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} [|\zeta_k^n|^2] \mathbb{E} \left[f' \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n \right) \right]$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E} [|\zeta_k^n|^2] \right) \mathbb{E} [f'(S_n)] \quad \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E} [\zeta_k^2]}{\sigma_n^2} = 1$$

Moral e ja: $\mathbb{E}[S_n f(S_n)] \approx \mathbb{E}[f'(S_n)]$.

Formalidades:

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\zeta_k^n (f(S_n^{(k)} + \zeta_k^n) - f(S_n^{(k)}))]$$

$$S_n^{(k)} := \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f(S_n^{(k)} + \zeta_k^n) - f(S_n^{(k)}) &= \zeta_k^n \int_0^1 f'(S_n^{(k)} + \lambda \zeta_k^n) d\lambda = * \\ &\quad - f'(S_n^{(k)}) \\ &= f(S_n^{(k)} + \lambda \zeta_k^n) \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} \end{aligned}$$

$$* = \zeta_k^n f'(S_n^{(k)}) + \zeta_k^n \int_0^1 \int_0^1 f''(S_n^{(k)} + \gamma \lambda \zeta_k^n) \lambda \zeta_k^n d\gamma d\lambda$$

\Rightarrow

$$|\mathbb{E}[S_n f(S_n)] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\zeta_k^n f'(S_n^{(k)})]|$$

$$\leq \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|\zeta_k^n|^3]$$

⇒

$$|\mathbb{E}[S_n f(S_n)] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[R_k^2 f'(S_{n,k})]|$$

$$\leq \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n|^3] + \sum_{k=1}^n |\mathbb{E}[R_k^2 (f'(S_{n,k}^{(k)}) - f'(S_{n,k}))]|$$

$| \sim | \leq \|f''\|_\infty |Z_k^n|$

$$\leq 2 \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n|^3]. \quad \square$$

Conclusión:

Teorema:

$$\sup_{h \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[h(S_n) - h(N)]| \leq 2 \left(\sup_{h \in \mathcal{C}} \|f_h''\|_\infty \right) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n|^3].$$

$$\frac{\xi_k}{\sigma_n}$$



versión del teorema de Berry-Esseen.

Caso particular: $\{Z_k\}_{k=1}^n$ son i.i.d

$$\sup_{h \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[h(S_n) - h(N)]| \leq 2 \left(\sup_{h \in \mathcal{C}} \|f_h''\|_\infty \right) \frac{\mathbb{E}[|Z_1|^3]}{\mathbb{E}[|Z_1|^2]^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Capítulo 2:)

Cómo manejar de manera clásica a

$$\mathbb{E}[x f(x)] - \mathbb{E}[f'(x)].$$

- Contexto de sumas de variables aleatorias
- Contexto de v.a. que no son sumas de variables aleatorias, pero pides "intercambiabilidad".

⋮

Transformadas - de sesgo

- de sesgo cero.

Sección 2.1 Ecuación de Stein.

Lema:

Si: $W \sim N(0,1)$, $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absol. cont. \oplus

(i.e. $f(x) = \int_0^x f'(r) dr$) l.g. $\mathbb{E}[|f'(z)|] < \infty$,

entonces

$$\mathbb{E}[f'(W)] - \mathbb{E}[W f(W)] = 0 \quad \oplus$$

Recíprocamente, si se vale $\forall f$ como en \oplus

entonces $W \sim N(0,1)$.

prueba. pendiente.

Vamos directo a la eq. de Stein:

Tomamos $z \in \mathbb{R}$ y $h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x)$.

Lema:

La ecuación

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - E[h(z)]$$

tiene una única solución dada por

$$f_z(w) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{w^2/2} \Phi(w) (1 - \Phi(z)) & \text{si } w \leq z \\ \sqrt{2\pi} e^{w^2/2} \Phi(z) (1 - \Phi(w)) & \text{si } w > z. \end{cases}$$

$$\Phi(w) = P\{Z \leq w\}$$

prueba:

$$f'(w) - wf(w) = \theta(w)$$

idea es usar factor integrante:

$$e^{\psi(w)} (f'(w) - wf(w)) = \tilde{\theta}(w)$$

Paso II: ver a

$$e^{\psi(w)} (f'(w) - wf(w)) \quad \text{como la derivada de}$$

$$e^{\psi(w)} f(w)$$

$$\mathbb{1}_{\{w \leq z\}} - P\{W \leq z\}$$

Propuesta: $\gamma(w) = -\frac{w^2}{2}$. Ahora si:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dw} \left(e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) \right) &= e^{-\frac{w^2}{2}} f'(w) - w e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) \\ &= e^{-\frac{w^2}{2}} (f'(w) - w f(w)) \\ &= e^{-\frac{w^2}{2}} (h(w) - E[h(z)])\end{aligned}$$

Moraleja:

es equivalente resolver

$$\frac{d}{dw} \left(e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) \right) = e^{-\frac{w^2}{2}} (h(w) - E[h(z)])$$

y esto se resuelve como

$$e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) = C + \int_{-\infty}^w \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \underbrace{\mathbb{P}\{Z \leq z\}}_{\Phi(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

Notar que $C = 0$.

$$e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) = \int_{-\infty}^w \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \Phi(z) \right) e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^w \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \Phi(z) \right) \mathbb{1}_{(-\infty, w)}(r) \phi(r) dr$$

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} = \begin{cases} \sqrt{2\pi} (\Phi(z) - \Phi(z) \Phi(w)) & \text{si } w \geq z \\ & \text{si } w < z \end{cases}$$

Prueba de la caracterización de $N(0,1)$:

$$\mathbb{E}[f'(w)] - \mathbb{E}[wf(w)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w \sim N(0,1).$$

\Rightarrow) Si $\textcircled{1}$ se vale: tomamos f como

la solución de

$$f'(w) - wf(w) = h(w) = \Phi(z).$$

tomar $w = W$ y sacar esperanza

$$0 = \mathbb{E}[f'(W) - Wf(W)] = \mathbb{P}[W \leq w] - \Phi(w)$$

\uparrow
hipótesis

$$\Rightarrow w \sim N(0,1).$$

Si: $W \sim N(0,1)$, por el arg. del libro $\textcircled{1}$ se vale.

$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \int_{\mathbb{R}} wf(w) \phi(w) dw = \int_{\mathbb{R}} f(w) w \phi(w) dw = \textcircled{\# \#}$$

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

Notar que $w \phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} w e^{-\frac{w^2}{2}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dw} e^{-\frac{w^2}{2}} = -\frac{d}{dw} \phi(w)$$

$$\textcircled{\# \#} = -\int_{\mathbb{R}} f(w) \frac{d}{dw} \phi(w) dw = \int_{\mathbb{R}} f'(w) \phi(w) dw = \mathbb{E}[f'(W)].$$

Propiedades de regularidad:

Recordar que

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(z)]$$

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_x^y f'(w) dw \\ &= \int_x^y (h(w) - \mathbb{E}[h(z)]) dw + \int_x^y wf(w) dw. \end{aligned}$$

Tarea:

Demuestra 2.3 y 2.4

Solución de la ecuación general

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(N)].$$

puede resolverse obteniendo la expresión.

$$f_h(w) = e^{w^2/2} \int_{-\infty}^w (h(x) - \mathbb{E}[h(N)]) e^{-x^2/2} dx$$

Recordar ecuación de Stein

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(N)].$$

Recordatorio de lma. Berry-Essen:

si $\{z_i\}_{i=1}^n$ $z_i \leftarrow$ centradas

$$\text{y } \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[z_i^2]. \quad \text{Entonces}$$

$$d_K\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n z_k, N(0,1)\right) \leq C \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|z_i|^3]$$

prueba:

Queremos que si $h(x) = \mathbb{1}_{(-a,2]}$ y f_h

resuelve

$$xf(x) - f'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)],$$

Queremos estimar

$$\mathbb{E}[xf(x)]:$$

Nota: la regularidad de f depende de la regularidad de h .

Recordar que si

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k^n \quad \text{con} \quad z_k^n = \frac{z_k}{\sigma_n}$$

$$\mathbb{E} |S_n f(S_n)|$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\zeta_k^n \left(f \left(\underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n}_{S_n^{(k)}} + \zeta_k^n \right) - f \left(\underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n}_{S_n^{(k)}} \right) \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\zeta_k^n \left| f(S_n^{(k)} + \zeta_k^n) - f(S_n^{(k)}) \right| \right]$$

La vez pasada hicimos

$$\begin{aligned} & \left| f(S_n^{(k)} + \zeta_k^n) - f(S_n^{(k)}) - \zeta_k^n f'(S_n^{(k)}) \right| \\ & \leq \|f''\|_\infty |\zeta_k^n|^2 \end{aligned}$$

¿Es esta cota buena?

Depende: recordar que

$$- x f(x) \cdot f'(x) = \mathbb{1}_{(0, 2)}(x) - \mathbb{P}(N \leq 2)$$

← Regularidad dudosa

↑ f'' no debería funcionar.

$$- x f(x) \cdot f'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)], \quad \leftarrow$$

Es una cota buena si h es Lipschitz.

Lemma de la tarea:

Si h es Lipschitz, $\Rightarrow \|f''\|_\infty \leq 1$ 😊

Caso $h(x) = \mathbb{1}_{(-a, 2]}(x)$,

Llevabamos bien la parte:

$$\mathbb{E}[f(x)x]$$

$$\pm \sum_k \zeta_k^n f'(S_n^{(k)})$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\zeta_k^n \left(f(S_n^{(k)} + \zeta_k^n) - f(S_n^{(k)}) \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\zeta_k^n \cdot \zeta_k^n f'(S_n^{(k)}) \right] + R_n, \quad \text{con}$$

← aprox de 1º orden

$$R_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\zeta_k^n \left(\underbrace{f(S_n^{(k)} + \zeta_k^n) - f(S_n^{(k)})}_{\psi(1) - \psi(0)} - \zeta_k^n f'(S_n^{(k)}) \right) \right]$$

$\psi(\lambda) = f(S_n^{(k)} + \lambda \zeta_k^n)$

$$R_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\zeta_k^n \int_0^1 \left(f'(S_n^{(k)} + \lambda \zeta_k^n) \zeta_k^n - \zeta_k^n f'(S_n^{(k)}) \right) d\lambda \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[|\zeta_k^n|^2 \int_0^1 \left(f'(S_n^{(k)} + \lambda \zeta_k^n) - f'(S_n^{(k)}) \right) d\lambda \right]$$

Idea para el caso irregular:

Si $a = S_n^{(f)}$ y $\varepsilon = \lambda |f'|^n$, necesitamos

estimar $|f'(a+\varepsilon) - f'(a)|$:

Recordemos que

$$xf(x) - f'(x) = \mathbb{1}_{(-r, z)}(x) - \mathbb{1}_{(N \leq z)}.$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow |f'(a+\varepsilon) - f'(a)| \\ & = |(a+\varepsilon) f(a+\varepsilon) - a f(a) - \underbrace{\mathbb{1}_{(z-\varepsilon, z)}(a)}_{\text{si } \varepsilon > 0} - (\mathbb{1}_{\{a+\varepsilon \leq z\}} - \mathbb{1}_{\{a \leq z\}})| \end{aligned}$$

$$\leq |(a+\varepsilon) f(a+\varepsilon) - a f(a)| + \mathbb{1}_{(z-|\varepsilon|, z+|\varepsilon|)}(a).$$

$$\leq \left(a + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right) |\varepsilon| + \mathbb{1}_{(z-|\varepsilon|, z+|\varepsilon|)}(a)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} \left[|f'(S_n^{(f)} + \varepsilon) - f'(S_n^{(f)})| |\zeta_n^k|^2 \right]$$

$$\leq \mathbb{E} \left[\left(|S_n^{(k)}| + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \right) |\zeta_n^k|^3 \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{orden } \mathbb{E} [|\zeta_n^k|^3] \\ \text{orden es } \mathbb{E} [|\zeta_n^k|^3] \end{array} \right.$$

$$+ \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{z - |\zeta_n^k| \leq S_n^k \leq z + |\zeta_n^k|\}} |\zeta_n^k|^2 \right]$$

Se puede mostrar que

$$\sup_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \mathbb{P}(|S_n^f \in [a, a + \varepsilon]|) \leq C \varepsilon.$$

↑
desigualdades de concentración.

Una formalización de esto nos da

$$d_K(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|z_k^f|^3).$$

Nota:

La regularidad de f importa

Si f no es regular, podemos

considerar otras métricas d que

sustituyen a d_K :

Ejemp:

$$d_W(\mu, \nu) = \sup_{f \text{ Lipschitz}} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|.$$

$$d_m(\mu, \nu) = \sup_{f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \|f^{(i)}\|_\infty \leq 1} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|.$$

Regularidad: ✓

Problema:

Para $Z_n \leftarrow$ cualquier v.a.

¿Cómo manejo

$\mathbb{E}[Z_n f(Z_n)]$?

Motivación de la cota:

$$d_K(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\left| \frac{Z_k}{\sigma_n} \right|^3 \right]$$

Recordatorio del método de momentos:

$$S_n \xrightarrow{\text{ley}} N \quad \oplus$$

Teo: Si S_n satisface ciertas condiciones muy generales (condición de Carleman).

para obtener \oplus es suficiente

$$\mathbb{E}[S_n^m] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N^m] \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Teorema:

Si $S_n = \sum_{k=1}^n Z_k$, con $Z_k \leftarrow$ indep. centradas,

entonces, si $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^2]$, se

tiene que

$$d_k\left(\frac{S_n}{\sigma_n}, N\right) \leq C \sqrt{\mathbb{E}[S_n^4] - \mathbb{E}[N^4]} + \frac{1}{n}$$

Corolario:

Si $\frac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ley}} F$, entonces

$$d_k(F, N) \leq C \sqrt{\mathbb{E}[F^4] - 3}$$

Prueba:

$$d_k(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n| |Z_k^n|^2]$$

$$\leq C \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n|^2]^{1/2} \mathbb{E}[|Z_k^n|^4]^{1/2}$$

$$\leq C \left(\sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}(|z_k|^2)}{\sigma_n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|z_k|^4) \right)^{1/2}$$

$$= C \left(\frac{1}{\sigma_n^4} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|z_k|^4) \right)^{1/2}$$

Notar que

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{s_n}{\sigma_n} \right)^4 \right] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{\sigma_n} \right)^4 \right]$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_4=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{z_{k_1} \dots z_{k_4}}{\sigma_n^4} \right] = *$$

Si $k_i \neq k_j$ para $i \neq j$, la esperanza es cero por la condición de centramiento, por lo que se cumple alguna de las siguientes condiciones

- $k_1 = k_2$ y $k_3 = k_4$
- $k_1 = k_3$ y $k_2 = k_4$
- $k_1 = k_4$ y $k_2 = k_3$

De aquí se sigue que

$$* = 3 \sum_{K_1, K_2=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_{K_1}}{\sigma_n} \right)^2 \left(\frac{z_{K_2}}{\sigma_n} \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] + 3 \sum_{\substack{K_1, K_2=1 \\ K_1 \neq K_2}}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_{K_1}}{\sigma_n} \right)^2 \left(\frac{z_{K_2}}{\sigma_n} \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] + 3 \sum_{K_1, K_2=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_{K_1}}{\sigma_n} \right)^2 \right] \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_{K_2}}{\sigma_n} \right)^2 \right] - 3 \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^2 \right]^2$$

$$= \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] + 3 \left(\sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^2 \right] \right)^2 - 3 \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^2 \right]^2$$

$$= \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] + 3 - 3 \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^2 \right]^2$$

De esta manera, vemos que

$$\sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] = \mathbb{E} \left[S_n^4 \right] - 3 + 3 \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[\left| \frac{z_K}{\sigma_n} \right|^2 \right]^2$$

Si los $\{z_k\}$ son i.i.d, $\mathbb{E}[z_k^2] = \mathbb{E}[z_1^2]$,

de manera que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\left| \frac{z_k}{\sigma_n} \right|^2 \right] = \frac{1}{n}, \quad \text{lo cual implica que}$$

$$d_K \left(\frac{S_n}{\sigma_n}, N \right) \leq C \left(\mathbb{E}[S_n^4] - 3 + \frac{3}{n} \right)^{1/2}$$

como se requiere.

