

---

---

---

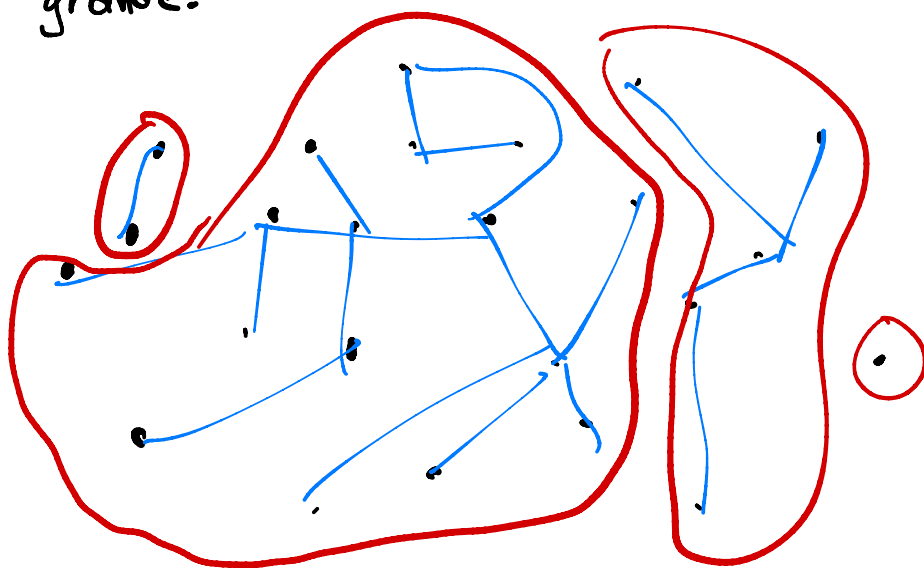
---

---





2.-) Ejemplo: una gráfica  
grande:



Se estudia la conectividad de una gráfica.  
Cuento de # componentes conexas  $\approx$  Algo simple?

**Motivación:**

Problema:

$$\{z_k\}_{k \geq 1}$$

$\leftarrow$  variables aleatorias independientes,  
con  $E[z_k] = 0$ , y definimos

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n E[z_k^2].$$

$$S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n z_k$$

Pregunta:  $d_k(S_n, N) \approx ?$   $N \sim \text{Normal}(0, 1)$ ?

Heurística de Stein:  
es "razonable" pensar que es equivalente

$$a) \sup_{z \in \mathbb{R}} |P\{S_n \leq z\} - P\{N \leq z\}| \approx 0$$

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |E[\mathbb{1}_{\{S_n \leq z\}}] - E[\mathbb{1}_{\{N \leq z\}}]|$$

$$b) \sup_{f \in \mathcal{L}} |E[S_n f(S_n) - f'(S_n)]| \approx 0.$$

↑  
familia de  
funciones de prueba

Equivalencia entre a) y b):

considerar la ecuación

$$x f(x) - f'(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq z\}} - E[\mathbb{1}_{\{N \leq z\}}] \quad \textcircled{*}$$

llamamos  $f_z$  a la solución a  $\textcircled{*}$ .

Notar que

$$\begin{aligned} & |E[S_n f_z(S_n) - f_z'(S_n)]| \\ &= |E[\mathbb{1}_{\{S_n \leq z\}} - E[\mathbb{1}_{\{N \leq z\}}]]| \\ &= |P\{S_n \leq z\} - P\{N \leq z\}|. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  tomando  $\sup_{z \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$

$$d_K(S_n, N) = \sup_z |P\{S_n \leq z\} - P\{N \leq z\}| \\ = \sup_z |E[S_n f_z(S_n) - f_z'(S_n)]|$$

Claim:

$f_z \leftarrow$  sale de de  $[0, z]$  (o).

pero tiene mejores propiedades.

$$\|f_z\|_\infty, \|f_z'\|_\infty \leq 10$$

Por lo tanto,

$$d_K(S_n, N) \leq \sup_{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} |E[S_n f(S_n) - f'(S_n)]| \\ \text{if } \|f\|_\infty, \|f'\|_\infty \leq 10 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{L[f](S_n)}$$

$$\text{con } L[f](x) = xf(x) - f'(x)$$

## Pregunta:

Heurística de Stein:

$\mathcal{C} \leftarrow$  cjtto de funciones de prueba.

$$d_C(x, N) := \sup_{h \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[h(x) - h(N)]|$$

$x \leftarrow$  v.a.

$N \leftarrow \sim N(0, 1)$

↓ intercambio mediante  
heurística de Stein:

$$\sup_{h \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[x f_h(x) - f'_h(x)]|$$

resolver:

$$\underbrace{x f(x) - f'(x)}_{\mathcal{L}[f](x)} = \mathbb{E}[h(x) - h(N)]$$

## Nota:

$f_h$  tiene "mejores" propiedades que  $h$ .

Ejemplo:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x); \quad z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Claim: si  $h \in \mathcal{C} \Rightarrow f_h$  es absolutamente  
continua;  $\downarrow$

Lema 2.3.

libro Normal approximation

$$\|f'_h\|_\infty \leq 1.$$

by Stein Method.

$$\Rightarrow d_C(x, N) \leq \sup_{f \in \tilde{\mathcal{C}}} |\mathbb{E}[x f(x) - f'(x)]|.$$

con  $\hat{C} = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f' \text{ existe c.s.} \}$   
 y  $\|f'\|_\infty \leq 1$

Nota:

Si  $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  y consideramos.

$$\tilde{x} \nabla f(\tilde{x}) - \Delta f(\tilde{x}) = h(\tilde{x}) - E[h(\tilde{N})]$$

$$\mathcal{L}(f)(\tilde{x}) \quad \tilde{N} \sim \mathcal{N}(0, I_d).$$

$$f(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} (h(\tilde{x} \tilde{e}^0 + \sqrt{1-\tilde{e}^{20}} \tilde{z}) - E[h(\tilde{N})]) F_N(d\tilde{z})$$

Si  $\mathcal{C} = \{ h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : h \text{ es } L\text{-Lipchitz} \}$ .

$d_e(x, N) \leftarrow$  solución explícita. y está en términos de una ec. de transporte (libro de C. Villani).

Hay situaciones en las que

$d_{TV}(x, \text{Otra cosa})$  es aproximable.

Otra situación:

- Expansiones de Edgeworth.

$\mu_{X_n} \leftarrow$  medida de proba de  $X_n$

$$\tilde{\mu}_n = \mu_{\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}} \approx \gamma$$

medida Gaussiana estandar d.

$$\int f(x) \mu_n(dx) \approx \int f(x) \gamma(dx) + \int f(x) \underbrace{\hat{\gamma}(dx)}_{\substack{\uparrow \\ \text{medida real}}} \underbrace{\hat{\gamma}(dx)}_{\substack{\uparrow \\ \text{medida compleja}}}$$

Hasta el momento, hemos visto que

$$d_K(S_n, N) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[X f(X) - f'(X)]|$$

$$\mathcal{C} = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.g.} \quad X f_n(X) - f'_n(X) = h(X) \cdot \mathbb{E}[h(N)] \right. \\ \left. \text{con } h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, 2)}(x) \right\}.$$

¿Cómo manejamos a

$$\mathbb{E}[X f(X) - f'(X)]?$$

Caso que consideraremos:

$$X = S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n Z_k, \quad \text{con } Z_k \text{ son centradas } \Leftarrow \\ \text{e indep. (NO necesariamente i.i.d.)}$$

$$\text{donde } \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^2].$$

Vamos a probar que  $S_n \xrightarrow{\text{ley}} N(0, 1)$

$$\text{si } \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \left| \frac{Z_k}{\sigma_n} \right|^3 \right] \rightarrow 0$$

De hecho,  $\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \left| \frac{Z_k}{\sigma_n} \right|^3 \right]$  es la velocidad de convergencia.



Idea:

Acutar el funcional

$$|\mathbb{E}[S_n f(S_n) - f'(S_n)]|$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k^n, \quad \text{con} \quad \zeta_k^n = \frac{\zeta_k}{\sigma_n}$$

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\zeta_k^n f(\sum_{j=1}^n \zeta_j^n)]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \zeta_k^n \left( f \left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n + \zeta_k^n \right) - f \left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n \right) \right) \right]$$

heurística

$\approx$

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} [ |\zeta_k^n|^2 ] \mathbb{E} \left[ f' \left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n \right) \right]$$

$$\approx \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [ |\zeta_k^n|^2 ] \right) \mathbb{E} [ f'(S_n) ] \quad \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E} [ \zeta_k^2 ]}{\sigma_n^2} = 1$$

Moral e ja:  $\mathbb{E}[S_n f(S_n)] \approx \mathbb{E}[f'(S_n)]$ .

Formalidades:

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ z_k^n \left( f(S_n^{(k)} + z_k^n) - f(S_n^{(k)}) \right) \right]$$

$$S_n^{(k)} := \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} z_j^n$$

Ahora,

$$\underbrace{f(S_n^{(k)} + z_k^n) - f(S_n^{(k)})}_{= f(S_n^{(k)} + \lambda z_k^n) \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1}} = z_k^n \int_0^1 f'(S_n^{(k)} + \lambda z_k^n) d\lambda = *$$

$$+ f'(S_n^{(k)})$$

$$* = z_k^n f'(S_n^{(k)}) + z_k^n \int_0^1 \int_0^1 f''(S_n^{(k)} + \gamma \lambda z_k^n) \lambda z_k^n d\gamma d\lambda$$

$\Rightarrow$

$$\left| \mathbb{E}[S_n f(S_n)] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[z_k^n f'(S_n^{(k)})] \right|$$

$$\leq \|f''\|_{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|z_k^n|^3]$$

⇒

$$|\mathbb{E}[S_n f(S_n)] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[R_k^2 f'(S_{n,k})]|$$

$$\leq \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n|^3] + \sum_{k=1}^n |\mathbb{E}[R_k^2 (f'(S_{n,k}^{(k)}) - f'(S_{n,k}))]|$$

$| \sim | \leq \|f''\|_\infty |Z_k^n|$

$$\leq 2 \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n|^3]. \quad \square$$

Conclusión:

Teorema:

$$\sup_{h \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[h(S_n) - h(N)]| \leq 2 \left( \sup_{h \in \mathcal{C}} \|f_h''\|_\infty \right) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n|^3].$$

$$\frac{\bar{\zeta}_k}{\sigma_n}$$



versión del  
teorema de  
Berry-Esseen.

Caso particular:  $\{Z_k\}_{k=1}^n$  son i.i.d

$$\sup_{h \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[h(S_n) - h(N)]| \leq 2 \left( \sup_{h \in \mathcal{C}} \|f_h''\|_\infty \right) \frac{\mathbb{E}[|Z_1|^3]}{\mathbb{E}[|Z_1|^2]^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

# Capítulo 2:)

Cómo manejar de manera clásica a

$$\mathbb{E}[x f(x)] - \mathbb{E}[f'(x)].$$

- Contexto de sumas de variables aleatorias

- Contexto de v.a. que no son sumas de variables aleatorias, pero pides "intercambiabilidad".

⋮

Transformadas - de sesgo

- de sesgo cero.

## Sección 2.1 Ecuación de Stein.

Lema:

Si:  $W \sim N(0,1)$ ,  $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  absol. cont.  $\oplus$

(i.e.  $f(x) = \int_0^x f'(r) dr$ ) l.g.  $\mathbb{E}[|f'(z)|] < \infty$ ,

entonces

$$\mathbb{E}[f'(W)] - \mathbb{E}[W f(W)] = 0 \quad \oplus$$

Recíprocamente, si se vale  $\forall f$  como en  $\oplus$

entonces  $W \sim N(0,1)$ .

prueba pendiente.

Vamos directo a la eq. de Stein:

Tomamos  $z \in \mathbb{R}$  y  $h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x)$ .

Lema:

La ecuación

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - E[h(z)]$$

tiene una única solución dada por

$$f_z(w) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{w^2/2} \Phi(w) (1 - \Phi(z)) & \text{si } w \leq z \\ \sqrt{2\pi} e^{w^2/2} \Phi(z) (1 - \Phi(w)) & \text{si } w > z. \end{cases}$$

$$\Phi(w) = P\{Z \leq w\}$$

prueba:

$$f'(w) - wf(w) = \theta(w)$$

idea es usar factor integrante:

$$e^{\psi(w)} (f'(w) - wf(w)) = \tilde{\theta}(w)$$

Paso II: ver a

$$e^{\psi(w)} (f'(w) - wf(w)) \quad \text{como la derivada de}$$

$$e^{\psi(w)} f(w)$$

$$\mathbb{1}_{\{w \leq z\}} - P\{W \leq z\}$$

Propuesta:  $\gamma(w) = -\frac{w^2}{2}$ . Ahora si:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \left( e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) \right) &= e^{-\frac{w^2}{2}} f'(w) - w e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) \\ &= e^{-\frac{w^2}{2}} (f'(w) - w f(w)) \\ &= e^{-\frac{w^2}{2}} (h(w) - E[h(z)]) \end{aligned}$$

Moraleja:

es equivalente resolver

$$\frac{d}{dw} \left( e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) \right) = e^{-\frac{w^2}{2}} (h(w) - E[h(z)])$$

y esto se resuelve como

$$e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) = C + \int_{-\infty}^w \left( \mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \underbrace{\mathbb{P}\{Z \leq z\}}_{\Phi(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

Notar que  $C = 0$ .

$$e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) = \int_{-\infty}^w \left( \mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \Phi(z) \right) e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^w \left( \mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \Phi(z) \right) \mathbb{1}_{(-\infty, w)}(r) \phi(r) dr$$

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} = \begin{cases} \sqrt{2\pi} (\Phi(z) - \Phi(z) \Phi(w)) & \text{si } w \geq z \\ & \text{si } w < z \end{cases}$$

# Prueba de la caracterización de $N(0,1)$ :

$$\mathbb{E}[f'(w)] - \mathbb{E}[wf(w)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w \sim N(0,1).$$

$\Rightarrow$ ) Si  $\textcircled{1}$  se vale: tomamos  $f$  como

la solución de

$$f'(w) - wf(w) = h(w) = \Phi(z).$$

tomar  $w = W$  y sacar esperanza

$$0 = \mathbb{E}[f'(W) - Wf(W)] = \mathbb{P}[W \leq w] - \Phi(w)$$

$\uparrow$   
hipótesis

$$\Rightarrow w \sim N(0,1).$$

Si:  $W \sim N(0,1)$ , por el arg. del libro  $\textcircled{1}$  se vale.

$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \int_{\mathbb{R}} wf(w) \phi(w) dw = \int_{\mathbb{R}} f(w) w \phi(w) dw = \textcircled{\#\#}$$

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

Notar que  $w \phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} w e^{-\frac{w^2}{2}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dw} e^{-\frac{w^2}{2}} = -\frac{d}{dw} \phi(w)$$

$$\textcircled{\#\#} = -\int_{\mathbb{R}} f(w) \frac{d}{dw} \phi(w) dw = \int_{\mathbb{R}} f'(w) \phi(w) dw = \mathbb{E}[f'(W)].$$

## Propiedades de regularidad:

Recordar que

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(z)]$$

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_x^y f'(w) dw \\ &= \int_x^y (h(w) - \mathbb{E}[h(z)]) dw + \int_x^y wf(w) dw. \end{aligned}$$

Tarea:

Demuestra 2.3 y 2.4

Solución de la ecuación general

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(N)].$$

puede resolverse obteniendo la expresión.

$$f_h(w) = e^{w^2/2} \int_{-\infty}^w (h(x) - \mathbb{E}[h(N)]) e^{-x^2/2} dx$$



## Recordar ecuación de Stein

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(N)].$$

Recordatorio de lma. Berry-Essen:

si  $\{z_i\}_{i=1}^n$   $z_i \leftarrow$  centradas

$$\text{y } \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[z_i^2]. \quad \text{Entonces}$$

$$d_K\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n z_k, N(0,1)\right) \leq C \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|z_i|^3]$$

prueba:

Queremos que si  $h(x) = \mathbb{1}_{(-a,2]}$  y  $f_h$

resuelve

$$xf(x) - f'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)],$$

Queremos estimar

$$\mathbb{E}[xf(x)]:$$

Nota: la regularidad de  $f$  depende de la regularidad de  $h$ .

Recordar que si

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k^n \quad \text{con} \quad z_k^n = \frac{z_k}{\sigma_n}$$

$$\mathbb{E} |S_n f(S_n)|$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \zeta_k^n \left( f \left( \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n}_{S_n^{(k)}} + \zeta_k^n \right) - f \left( \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k \neq j}} \zeta_j^n}_{S_n^{(k)}} \right) \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \zeta_k^n \left| f(S_n^{(k)} + \zeta_k^n) - f(S_n^{(k)}) \right| \right]$$

La vez pasada hicimos

$$\begin{aligned} & \left| f(S_n^{(k)} + \zeta_k^n) - f(S_n^{(k)}) - \zeta_k^n f'(S_n^{(k)}) \right| \\ & \leq \|f''\|_\infty |\zeta_k^n|^2 \end{aligned}$$

¿Es esta cota buena?

Depende: recordar que

$$- \alpha f(x) \cdot f'(x) = \mathbb{1}_{(x, x+\alpha)}(x) - \mathbb{P}(N \leq 2)$$

← Regularidad dudosa

↑  $f''$  no debería funcionar.

$$- \alpha f(x) \cdot f'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)], \quad \leftarrow$$

Es una cota buena si  $h$  es Lipschitz.

Lemma de la tarea:

Si  $h$  es Lipschitz,  $\Rightarrow \|f''\|_\infty \leq 1$  😊

Caso  $h(x) = \mathbb{1}_{(-a, 2]}(x)$ ,

Llevabamos bien la parte:

$$\pm \sum_k^n f'(S_n^{(k)})$$

$$\mathbb{E}[f(x)X]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_k^n \left( f(S_n^{(k)} + \xi_k^n) - f(S_n^{(k)}) \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_k^n \xi_k^n f'(S_n^{(k)}) \right] + R_n, \quad \text{con}$$

← aprox de 1º orden

$$R_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_k^n \left( \underbrace{f(S_n^{(k)} + \xi_k^n) - f(S_n^{(k)})}_{\psi(1) - \psi(0)} - \xi_k^n f'(S_n^{(k)}) \right) \right]$$

$\psi(\lambda) = f(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^n)$

$$R_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_k^n \int_0^1 \left( f'(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^n) \xi_k^n - \xi_k^n f'(S_n^{(k)}) \right) d\lambda \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \sum_k^n \int_0^1 \left( f'(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^n) - f'(S_n^{(k)}) \right) d\lambda \right]$$

Idea para el caso irregular:

Si  $a = S_n^{(f)}$  y  $\varepsilon = \lambda |f|$ , necesitamos

estimar  $|f'(a+\varepsilon) - f'(a)|$ :

Recordemos que

$$xf(x) - f'(x) = \mathbb{1}_{(-x, x)}(x) - \mathbb{1}_{(N \leq x)}.$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |f'(a+\varepsilon) - f'(a)| \\ &= |(a+\varepsilon) f(a+\varepsilon) - a f(a) - \underbrace{\mathbb{1}_{(z-\varepsilon, z)}(a)}_{\text{si } \varepsilon > 0} - (\mathbb{1}_{\{a+\varepsilon \leq z\}} - \mathbb{1}_{\{a \leq z\}})| \end{aligned}$$

$$\leq |(a+\varepsilon) f(a+\varepsilon) - a f(a)| + \mathbb{1}_{(z-|\varepsilon|, z+|\varepsilon|)}(a).$$

$$\leq \left(a + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right) |\varepsilon| + \mathbb{1}_{(z-|\varepsilon|, z+|\varepsilon|)}(a)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} \left[ |f'(S_n^{(f)} + \varepsilon) - f'(S_n^{(f)})| |Z_n^a|^2 \right]$$

$$\leq \mathbb{E} \left[ \left( |S_n^{(f)}| + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \right) |Z_n^a|^3 \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{orden } \mathbb{E} [|Z_n^a|^3] \\ \text{orden es } \mathbb{E} [|Z_n^a|^3] \end{array} \right.$$

$$+ \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{z - |Z_n^a| \leq S_n^x \leq z + |Z_n^a|\}} |Z_n^a|^2 \right]$$

Se puede mostrar que

$$\sup_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \mathbb{P} \left( S_n^f \in [a, a + \varepsilon] \right) \leq C \varepsilon.$$

↑  
desigualdades de concentración.

Una formalización de esto nos da

$$d_K(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ |z_k^f|^3 \right].$$

Nota:

La regularidad de  $f$  importa

Si  $f$  no es regular, podemos

considerar otras métricas  $d$  que

sustituyen a  $d_K$ :

Ejemp:

$$d_W(\mu, \nu) = \sup_{f \text{ Lipschitz}} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|.$$

$$d_m(\mu, \nu) = \sup_{f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \|f^{(i)}\|_\infty \leq 1} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|.$$

Regularidad: ✓

Problema:

Para  $Z_n \leftarrow$  cualquier v.a.

¿Cómo manejo

$\mathbb{E}[Z_n f(Z_n)]$ ?

Motivación de la cota:

$$d_K(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \left| \frac{Z_k}{\sigma_n} \right|^3 \right]$$

Recordatorio del método de momentos:

$$S_n \xrightarrow{\text{ley}} N \quad \oplus$$

Teo: Si  $S_n$  satisface ciertas condiciones muy generales (condición de Carleman).

para obtener  $\oplus$  es suficiente

$$\mathbb{E}[S_n^m] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N^m] \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

## Teorema:

Si  $S_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ , con  $Z_k \leftarrow$  indep. centradas,

entonces, si  $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^2]$ , se

tiene que

$$d_k\left(\frac{S_n}{\sigma_n}, N\right) \leq C \sqrt{\mathbb{E}[S_n^4] - \mathbb{E}[N^4]} + \frac{1}{n}$$

## Corolario:

Si  $\frac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ley}} F$ , entonces

$$d_k(F, N) \leq C \sqrt{\mathbb{E}[F^4] - 3}$$

## Prueba:

$$d_k(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n| |Z_k^n|^2]$$

$$\leq C \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Z_k^n|^2]^{1/2} \mathbb{E}[|Z_k^n|^4]^{1/2}$$

$$\leq C \left( \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}(|z_k|^2)}{\sigma_n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|z_k|^4) \right)^{1/2}$$

$$= C \left( \frac{1}{\sigma_n^4} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|z_k|^4) \right)^{1/2}$$

Notar que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \frac{s_n}{\sigma_n} \right)^4 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{\sigma_n} \right)^4 \right]$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_4=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{z_{k_1} \dots z_{k_4}}{\sigma_n^4} \right] = *$$

Si  $k_i \neq k_j$  para  $i \neq j$ , la esperanza es cero por la condición de centramiento, por lo que se cumple alguna de las siguientes condiciones

- $k_1 = k_2$  y  $k_3 = k_4$
- $k_1 = k_3$  y  $k_2 = k_4$
- $k_1 = k_4$  y  $k_2 = k_3$



De aquí se sigue que

$$* = 3 \sum_{K_1, K_2=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_{K_1}}{\sigma_n} \right)^2 \left( \frac{z_{K_2}}{\sigma_n} \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] + 3 \sum_{\substack{K_1, K_2=1 \\ K_1 \neq K_2}}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_{K_1}}{\sigma_n} \right)^2 \left( \frac{z_{K_2}}{\sigma_n} \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] + 3 \sum_{K_1, K_2=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_{K_1}}{\sigma_n} \right)^2 \right] \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_{K_2}}{\sigma_n} \right)^2 \right] - 3 \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^2 \right]^2$$

$$= \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] + 3 \left( \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^2 \right] \right)^2 - 3 \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^2 \right]^2$$

$$= \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] + 3 - 3 \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^2 \right]^2$$

De esta manera, vemos que

$$\sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{z_K}{\sigma_n} \right)^4 \right] = \mathbb{E} \left[ S_n^4 \right] - 3 + 3 \sum_{K=1}^n \mathbb{E} \left[ \left| \frac{z_K}{\sigma_n} \right|^2 \right]^2$$

Si los  $\{z_k\}$  son i.i.d,  $\mathbb{E}[z_k^2] = \mathbb{E}[z_1^2]$ ,  
de manera que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \left| \frac{z_k}{\sigma_n} \right|^2 \right] = \frac{1}{n}, \quad \text{lo cual implica que}$$

$$d_K \left( \frac{S_n}{\sigma_n}, N \right) \leq C \left( \mathbb{E}[S_n^4] - 3 + \frac{3}{n} \right)^{1/2}$$

como se requiere.

Paréntesis de esperanza condicional:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \leftarrow$  espacio de probabilidad.

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  una sub  $\sigma$ -álgebra.

$\mathcal{G}$  = conjunto de eventos

Idea: cómo formalizo el fenómeno de  
que exista aleatoriedad, pero ya  
conozco toda la "información" disponible  
en  $\mathcal{G}$ ?

Interpretación de  $\sigma$  como info:

$$X_1, \dots, X_n \leftarrow \text{v.a.}$$

$$\sigma = \sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Ejemplo:

$Y =$  Resultado del TOEFL.

$$n=2$$

$X_1 =$  # Horas que estudié

$X_2 =$  tiempo en que terminé el examen

Suponer que conocemos  $X_1 = x_1$  y  $X_2 = x_2$

Cuál sería el valor esperado de  $Y$

$$= E[Y | X_1, X_2].$$

Interpretación en proba:

En proba 1:

$(Y, X_1, X_2)$  tienen densidad  $f(y, x_1, x_2)$

$$f_{Y|X_1, X_2}(y | x_1, x_2) = \frac{f_{Y, X_1, X_2}(y, x_1, x_2)}{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)} \leftarrow \text{ver como función de } y.$$

Entonces,

$$E[Y | X_1 = x_1, X_2 = x_2] = \int_{\mathbb{R}} f_{Y|X_1, X_2}(y | x_1, x_2) dy.$$

Hoy no conozco  $X_1, X_2$

Pero mañana me dicen.

Definimos

$$\Theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \Theta(x_1, x_2) = \mathbb{E}[Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2]$$

$\Theta$   $\leftarrow$  interpretación de Julián de esperanza cond.

Pero esto va a ser mañana que conozca a  $X_1$  y  $X_2$ .

Hoy, es razonable, pensar en

$$\Theta(X_1, X_2) \leftarrow \text{v.a.}$$

llamamos

$$\mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2] := \Theta(X_1, X_2).$$

Si  $G := \sigma(X_1, X_2)$ , definimos

$$\mathbb{E}[Y \mid G] := \Theta(X_1, X_2).$$

Resultado enorme:

Se puede definir  $\mathbb{E}[Y \mid G]$  en términos de sus propiedades.

i) Prelims (al menos  $Y \in L^1(\Omega)$ ).

ii)  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|G]] = \mathbb{E}[Y]$ .  
↑  
información

iii)  $\mathbb{E}[FY|G] = F \mathbb{E}[Y|G]$

$A \in G$  o  $F \in v.a.$   $F$  es  $G$ -medible y acotada

Teorema:

$\exists!$  v.a.  $\mathbb{E}[Y|G]$  (f.g. i), ii) y iii)

Caso fácil:

$Y \in L^2(\Omega)$ .

Construcción para  $\mathbb{E}[Y|G]$ .

$V = \{ F: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ v.a.} \mid F \text{ es } G\text{-medible} \}$

$V$  es espacio de Hilbert (con  $\|\cdot\|_{2,2}$ ).

$\mathbb{E}[Y|G] =$  Proyección de  $Y$  en  $G$ .

## Pares intercambiables

Setting:

$(W, W')$  satisfacen

$$(W, W') \stackrel{\text{ley}}{=} (W', W). \quad \leftarrow \text{par intercambiable.}$$

$\Downarrow$

$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

$$\mathbb{P}[(W, W') \in A \times B] = \mathbb{P}[(W', W) \in A \times B].$$

Motivación: en el contexto de

$$S_n^{(k)} = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n Z_k$$

$$W = S_n$$

Método visto antes:

considera las variables  $S_n^{(k)}$ , de la

siguiente manera:

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)]$$

$$= \sum_{k=1}^n Z_k f(S_n^{(k)} + Z_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n Z_k \left( \underbrace{f(S_n^{(k)} + Z_k)}_{W_k} - \underbrace{f(S_n^{(k)})}_{W_k'} \right).$$

Ahora  $\sum \leftarrow$  interpretamos como medida  
de prob.

$\sum_{k=1}^n S_n^{(k)} \leftarrow$  acción de remover una  
componente unif. sobre los índices,

Formalización del arg. de sumas de v.a.

Setting:  $E[\xi_i] = 0$  y  $\sum_{i=1}^n E[\xi_i^2] = 1$ .

llamamos

$$W = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

y

no tiene a  $\xi_i$   
 $\downarrow$   
 $W^{(i)} = W - \xi_i$

Objetivo

$E[W f(W)] =$  Algo que "abstrae" las ideas  
anteriores.

$$\left\{ \sum_{i=1}^n E[\xi_i (f(W^{(i)} + \xi_i) - f(W^{(i)}))] \right\}.$$

$$= \sum_{i=1}^n E[\xi_i \int_0^{\xi_i} f'(W^{(i)} + t) dt]$$

=

Notar que

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi_i} f'(w^{(i)} + t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} \xi_i f'(w^{(i)} + t) \right) dt \quad \text{si } \xi_i \geq 0 \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}} \left( \mathbb{1}_{\{\xi_i \leq t \leq 0\}} \xi_i f'(w^{(i)} + t) \right) dt \quad \text{si } \xi_i < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[W f(W)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_i \leq t \leq 0\}} \right) \xi_i f'(w^{(i)} + t) \right] dt.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E} \left[ \left( \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_i \leq t \leq 0\}} \right) \xi_i \right]}_{K_i(t) \geq 0} \mathbb{E} \left[ f'(w^{(i)} + t) \right] dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n K_i(t) \mathbb{E} \left[ f'(w^{(i)} + t) \right] dt$$

Notar que

$$\int_{\mathbb{R}} K_i(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ \left( \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \xi_i\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_i \leq t \leq 0\}} \right) \xi_i \right] dt = 0$$



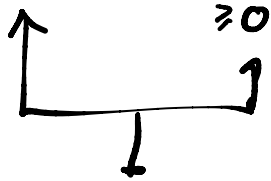
$$\Rightarrow \Theta = \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} (1_{\{0 \leq t \leq z_i\}} - 1_{\{z_i \leq t \leq 0\}}) z_i \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[ \underbrace{1_{\{z_i \geq 0\}} z_i^2}_{|z_i|^2 1_{\{z_i < 0\}}} - \underbrace{1_{\{z_i < 0\}} z_i}_{|z_i|^2 1_{\{z_i < 0\}}} \right] = \mathbb{E} [z_i^2]$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E} [w f(w)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E} [z_i^2]}_{\geq 0} \left( \underbrace{\frac{K_i(t)}{\mathbb{E} [z_i^2]}}_{\geq 0} \right) \mathbb{E} [f'(w^{(i)} + t)] dt$$



se interpretan como med. de prob.

Pues  $\sum_{i=1}^n \mathbb{E} [z_i^2] = 1.$

Sea  $\{z_i^*\}_{i=1}^n \leftarrow$  colección de v.a. indep. de  $\{z_i\}.$

t.g.  $z_i^*$  tienen densidad  $\frac{K_i(t)}{\mathbb{E} [z_i^2]}$  respecto a t.

$\mathbf{I} \leftarrow$  v.a. indep. de todo lo demás, t.g.

$$P\{I=i\} = \sigma_i^2 = E\{\xi_i^2\}.$$

Lo que obtuvimos antes se lee

$$E\{w f(w)\}$$

$$= \sum_{i=1}^n E\{\xi_i^2\} \int \left( \frac{k_i(t)}{E\{\xi_i^2\}} \right) E\{f'(w^{(i)} + t)\} dt$$

$$= \sum_{i=1}^n E\{\xi_i^2\} E\{f'(w^{(i)} + \xi_i^*)\}.$$

$$= E\{f'(w^{(I)} + \xi_I^*)\}.$$

En particular,

$$E\{w f(w) - f'(w)\}$$

$$= E\{f'(\underbrace{w^{(I)} + \xi_I^*}_{w'}) - f'(w)\}.$$

Tasa de crecimiento debe tener que  
ver con  $w - w'$ .