Método de Stein:

Haces approx de leyes de proba complicadas mediante leyes "Menos complicadas" ← { · Gaussianas. · Poisson

Ejemplo de aprox. Poisson.

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^n \qquad \xi_k^n \leftarrow \begin{matrix}\text{independientes} \\ \text{Bernoulli}(p_k).\end{matrix}$$

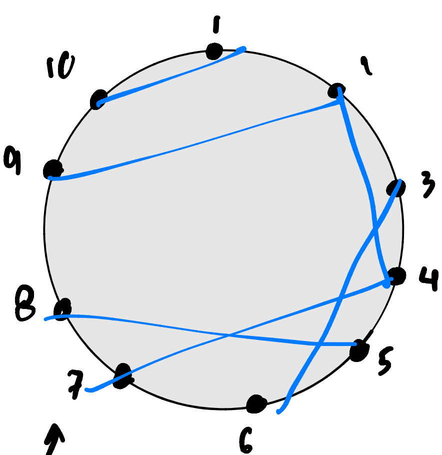
En algunas circunstancias:

$$\mathcal{L}(X_n) \approx \text{Ley Poisson}(\mathbb{E}[X_n]).$$

Ejemplos:

1). X_n = conteo en contextos de

- De fondo hay una gráfica:



realización de una gráfica.

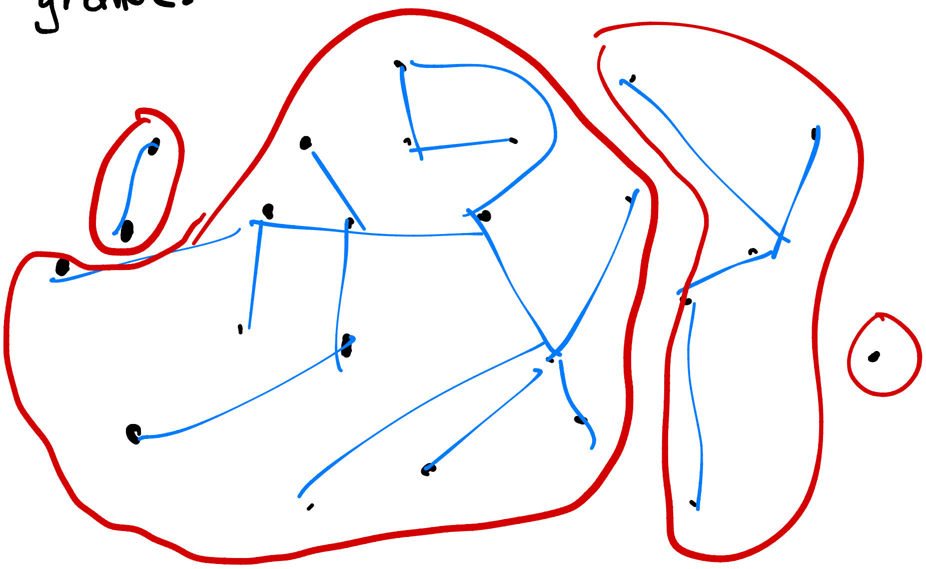
Conteo de "cruces"

$$= \sum_{\substack{(a,b) \\ (c,d)}} \mathbb{1}_{\{\text{hay un cruce entre } (a,b) \text{ y } (c,d)\}} \circledast$$

Pregunta central:

$\circledast \approx$ Algo "sencillo"?

2.-) Ejemplo: una gráfica grande:



Se estudia la conectividad de una gráfica.

Conteo de # componentes conexas ¿$\approx$ Algo simple?

Motivación:

Problema:

$\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ ← variables aleatorias independientes, con $\mathbb{E}[\xi_k]=0$, y definimos

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^2].$$

$$S_n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

Pregunta: $d_K(S_n, N) \approx ?$ $\quad N \sim \text{Normal}(0,1)$ ¿?

Heurística de Stein:
es "razonable" pensar que es equivalente

a) $$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}[S_n \le z] - \mathbb{P}[N \le z]| \approx 0$$

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n \le z\}}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \le z\}}]|$$

b) $$\sup_{f\in\mathcal{C}} |\mathbb{E}[S_n f(S_n) - f'(S_n)]| \approx 0.$$

familia de funciones de prueba

Equivalencia entre a) y b):

considerar la ecuación

$$x f(x) - f'(x) = \mathbb{1}_{\{x \le z\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \le z\}}] \quad (*)$$

llamamos f_z a la solución a $(*)$.

Notar que

$$|\mathbb{E}[S_n f_z(S_n) - f_z'(S_n)]|$$
$$= |\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n \le z\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \le z\}}]]|$$
$$= |\mathbb{P}[S_n \le z] - \mathbb{P}[N \le z]|.$$

$\Rightarrow$ tomando $\sup\limits_{z \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$

$$d_K(S_n, N) = \sup_z |\mathbb{P}[S_n \leq z] - \mathbb{P}[N \leq z]|.$$

$$= \sup_z |\mathbb{E}[S_n f_z(S_n) - f_z'(S_n)]|$$

Claim:

$f_z \leftarrow$ sale de de $\mathbb{1}_{[0,z]}(\cdot)$.

pero tiene mejores propiedades.

$$\|f_z\|_\infty, \|f_z'\|_\infty \leq 10$$

Por lo tanto,

$$d_K(S_n, N) \leq \sup_{\substack{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \|f\|_\infty, \|f'\|_\infty \leq 10}} |\mathbb{E}[\underbrace{S_n f(S_n) - f'(S_n)}_{\mathcal{L}[f](S_n)}]|,$$

con $\mathcal{L}[f](x) = x f(x) - f'(x)$

Pregunta:

Heurística de Stein:

$\mathcal{C} \leftarrow$ cjto de funciones de prueba.

$$d_{\mathcal{C}}(X,N) := \sup_{h\in\mathcal{C}} |\mathbb{E}[h(X) - h(N)]|$$

$X \leftarrow$ v.a.

$N \leftarrow \sim N(0,1)$

$\Big\downarrow$ intercambio mediante heurística de Stein:

$$\sup_{h\in\mathcal{C}} |\mathbb{E}[X f_h(X) - f_h'(X)]|$$

resolver:

$$\underbrace{x f(x) - f'(x)}_{\mathcal{L}[f](x)} = \mathbb{E}[h(X) - h(N)]$$

Nota:

f_h tiene "mejores" propiedades que h.

Ejemplo:

$$\mathcal{C} = \{ \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x) \ ; \quad z \in \mathbb{R} \}.$$

Claim: si $h \in \mathcal{C} \Rightarrow f_h$ es absolutamente continua; & $\|f_h'\|_\infty \leq 1$.

Lema 2.3.

libro Normal approximation by Stein Method.

$$\Rightarrow \quad d_{\mathcal{C}}(X,N) \leq \sup_{f\in\tilde{\mathcal{C}}} |\mathbb{E}[X f(X) - f'(X)]|.$$

con $\hat{\mathcal{C}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ f'$ existe c.s. $\}$

y $\|f'\|_\infty \leq 1$

Nota:

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ y consideramos.

$$\underbrace{\vec{x}\, \nabla f(\vec{x}) - \Delta f(\vec{x})}_{\mathcal{L}[f](\vec{x})} = h(\vec{x}) - \mathbb{E}[h(\vec{N})]$$

$\vec{N} \sim N(0, I_d)$.

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(h(\vec{x} e^{-\theta} + \sqrt{1-e^{-2\theta}}\, \vec{y}) - \mathbb{E}[h(\vec{N})] \right) F_N(d\vec{y})$$

Si $\mathcal{C} = \{ h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : h$ es 1-Lipchitz $\}$.

$d_{\mathcal{C}}(X, N) \leftarrow$ solución explícita. y está en términos de una ec. de transporte (libro de C.Villani).

Hay situaciones en las que

$d_{TV}(X,$ Otra cosa$)$ es approximable.

Otra situación:

- Expansiones de Edgeworth.

$\mu_{X_n} \leftarrow$ medida de proba de X_n

$$\tilde{\mu}_n = \mu_{\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}} \approx \gamma$$

medida Gaussiana estandard.

$$\int F(x)\, \mu_n(dx) \approx \int F(x)\, \gamma(dx) + \int F(x)\, \hat{\gamma}(dx)$$

medida real. medida compleja.

Hasta el momento, hemos visto que

$$d_K(S_n, N) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}.} |\mathbb{E}[\, x f(x) - f'(x)]|$$

$$\mathcal{C} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t.q. \quad x f_h(x) - f_h'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)]$$

con $h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, z)}(x) \}$.

¿Cómo manejamos a

$$\mathbb{E}[\, x f(x) - f'(x)] \, ?$$

Caso que consideraremos:

$$X = S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \text{con } \xi_k \text{ son centradas} \Leftarrow$$

e indep. (NO necesariamente i.i.d.).

$$\text{donde} \quad \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^2].$$

Vamos a probar que $S_n \xrightarrow{\text{ley}} N(0,1)$

$$\text{si} \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left| \frac{\xi_k}{\sigma_n} \right|^3 \right] \to 0$$

De hecho, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left| \frac{\xi_k}{\sigma_n} \right|^3 \right]$ es la velocidad de convergencia.

Idea:

Acotar el funcional

$$\left|\mathbb{E}\left[S_n f(S_n) - f'(S_n)\right]\right|$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^n, \qquad \text{con} \qquad \xi_k^n = \frac{\xi_k}{\sigma_n}$$

$$\mathbb{E}\left[S_n f(S_n)\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k^n f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^n\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k^n \left(f\left(\sum_{\substack{1\le j\le n\\ k\ne j}} \xi_j^n + \xi_k^n\right) - f\left(\sum_{\substack{1\le j\le n\\ k\ne j}} \xi_j^n\right)\right)\right]$$

heurística

$$\approx$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^2\right] \mathbb{E}\left[f'\left(\sum_{\substack{1\le j\le n\\ k\ne j}} \xi_j^n\right)\right]$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^2\right]\right) \mathbb{E}\left[f'(S_n)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[\xi_k^2]}{\sigma_n^2} = 1$$

Moraleja: $\mathbb{E}[S_n f(S_n)] \approx \mathbb{E}[f'(S_n)]$.

Formalidades:

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k^n \left(f\left(S_n^{(k)} + \xi_k^n\right) - f\left(S_n^{(k)}\right)\right)\right]$$

$$S_n^{(k)} := \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ k \ne j}} \xi_j^n$$

Ahora,

$$\underbrace{f(S_n^{(k)} + \xi_k^{(n)}) - f(S_n^{(k)})}_{= f(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^{(n)})\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1}} = \xi_k^{(n)} \int_0^1 f'(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^{(n)})\, d\lambda =* \quad \mp f'(S_n^{(k)})$$

$$* = \xi_k^{(n)} f'(S_n^{(k)}) + \xi_k^{(n)} \int_0^1 \int_0^1 f''(S_n^{(k)} + \gamma\lambda \xi_k)\, \lambda \xi_k \, d\gamma\, d\lambda$$

$\Rightarrow$

$$\left| \mathbb{E}[S_n f(S_n)] - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^2 f'(S_n^{(k)})\right]\right|$$

$$\le \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^3\right]$$

$\Rightarrow$

$$\left| \mathbb{E}[S_n f(S_n)] - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\beta_k^n|^2 f'(S_n)\right] \right|$$

$$\le \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^3\right] + \sum_{k=1}^{n} \left| \mathbb{E}\left[|\beta_k^n|^2 \underbrace{\left(f'(S_n^{(k)}) - f'(S_n)\right)}_{|\sim| \le \|f''\|_\infty |\xi_k^n|}\right]\right|$$

$$\le 2\|f''\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^3\right]. \quad \square$$

Conclusión:

Teorema:

$$\frac{\xi_k}{\sigma_n} = \xi_k^n$$

$$\sup_{h\in\mathcal{C}} \left|\mathbb{E}[h(S_n) - h(N)]\right| \le 2\left(\sup_{h\in\mathcal{C}} \|f_h''\|_\infty\right) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^3\right].$$

$\leftarrow$ versión del teorema de Berry-Esseen

Caso particular: $\{\xi_k\}_{k\ge 1}$ son i.i.d

$$\sup_{h\in\mathcal{C}} \left|\mathbb{E}[h(S_n) - h(N)]\right| \le 2\left(\sup_{h\in\mathcal{C}} \|f_h''\|_\infty\right) \frac{\mathbb{E}[|\xi_1|^3]}{\mathbb{E}[|\xi_1|^2]^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Capítulo 2:)

Cómo manejar de manera clásica a

$\mathbb{E}[xf(x)] - \mathbb{E}[f'(x)]$.

- Contexto de sumas de variables aleatorias
- Contexto de v.a. que no son sumas de variables aleatorias, pero pides "intercambiabilidad".

⋮

Transformadas - de sesgo
- de sesgo cero.

Sección 2.1 Ecuación de Stein.

Lema: ⊛

Si $W \sim N(0,1)$, y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absol. cont.

(i.e. $f(x) = \int_0^x f'(r)\,dr$) t.q. $\mathbb{E}[|f'(Z)|] < \infty$,

entonces

$$\mathbb{E}[f'(W)] - \mathbb{E}[Wf(W)] = 0 \quad ⊛$$

Recíprocamente, si se vale ⊛ $\forall$ f como en ⊛,

entonces $W \sim N(0,1)$. prueba pendiente.

Vamos directo a la eq. de Stein:

Tomamos $z \in \mathbb{R}$ y $h(x) := \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x)$.

Lema:

La ecuación

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]$$

$\mathbb{1}_{\{w \le z\}} - \mathbb{P}[W \le z]$

tiene una única solución dada por

$$f_z(w) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, e^{w^2/2}\, \Phi(w)\,(1 - \Phi(z)) & \text{si } w \le z \\ \sqrt{2\pi}\, e^{w^2/2}\, \Phi(z)\,(1 - \Phi(w)) & \text{si } w > z. \end{cases}$$

$\Phi(w) = \mathbb{P}[Z \le w]$

prueba:

$$f'(w) - wf(w) = \theta(w)$$

Idea es usar factor integrante:

$$e^{\psi(w)}(f'(w) - wf(w)) = \tilde{\theta}(w)$$

Paso I: ver a

$e^{\psi(w)}(f'(w) - wf(w))$ como la derivada de

$e^{\psi(w)} f(w)$

Propuesta: $\gamma(w) = -\frac{w^2}{2}$. Ahora sí:

$$\frac{d}{dw}\left(e^{-\frac{w^2}{2}} f(w)\right) = e^{-\frac{w^2}{2}} f'(w) - w e^{-\frac{w^2}{2}} f(w)$$

$$= e^{-\frac{w^2}{2}} \left(f'(w) - w f(w)\right)$$

$$= e^{-\frac{w^2}{2}} \left(h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]\right)$$

Moraleja:

es equivalente resolver

$$\frac{d}{dw}\left(e^{-\frac{w^2}{2}} f(w)\right) = e^{-\frac{w^2}{2}} \left(h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]\right)$$

y esto se resuelve como

$$e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) = C + \int_{-\infty}^{w} \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \underbrace{\mathbb{P}[Z \leq z]}_{\Phi(z)}\right) e^{-\frac{r^2}{2}} \, dr$$

Notar que $C = 0$.

$$e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) = \int_{-\infty}^{w} \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \Phi(z)\right) e^{-\frac{r^2}{2}} \, dr$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \Phi(z)\right) \mathbb{1}_{(-\infty, w)}(r) \, \phi(r) \, dr$$

con

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} \qquad = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\left(\Phi(z) - \Phi(z)\Phi(w)\right). & \text{si } w \geq z \\ & \text{si } w < z \end{cases}$$

Prueba de la caracterización de $N(0,1)$:

$$\mathbb{E}[f'(W)] - \mathbb{E}[Wf(W)] = 0 \quad (*) \iff W \sim N(0,1).$$

$\Rightarrow)$ Si $(*)$ se vale: tomamos f como la solución de

$$f'(w) - w f(w) = h(w) - \Phi(z).$$

tomar $w = W$ y sacas esperanza

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis}}}{0 =} \mathbb{E}[f'(W) - Wf(W)] = \mathbb{P}[W \leq w] - \Phi(w)$$

$$\Rightarrow W \sim N(0,1).$$

Si $W \sim N(0,1)$, por el arg. del libro $(*)$ se vale.

$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \int_{\mathbb{R}} w f(w) \phi(w) dw = \int_{\mathbb{R}} f(w)\, w \phi(w)\, dw = (\#\#)$$

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

Notar que $w \phi(w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} w e^{-\frac{w^2}{2}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dw} e^{-\frac{w^2}{2}} = -\frac{d}{dw} \phi(w)$$

$$(\#\#) = -\int_{\mathbb{R}} f(w) \frac{d}{dw} \phi(w) dw = \int_{\mathbb{R}} f'(w) \phi(w) dw = \mathbb{E}[f'(W)].$$

Propiedades de regularidad:

Recordar que

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]$$

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(w)\,dw$$

$$= \int_x^y (h(w) - \mathbb{E}[h(Z)])\,dw + \int_x^y wf(w)\,dw.$$

Tarea:

Demostrar 2.3 y 2.4

Solución de la ecuación general

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(N)].$$

puede resolverse obteniendo la expresión.

$$f_h(w) = e^{w^2/2} \int_{-\infty}^{w} (h(x) - \mathbb{E}[h(N)])\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Recordar ecuación de Stein

$$f'(w) - w f(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(N)].$$

Recordatorio de tma. Berry-Essen:

si $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\xi_i \leftarrow$ centradas

y $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_i^2]$. Entonces

$$d_K\left(\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k, N(0,1)\right) \leq C \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|\xi_i|^3]$$

prueba:

Queremos que si $h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, z]}$ y f_h resuelve

$$x f(x) - f'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)],$$

Queremos estimar

$$\mathbb{E}[x f(x)]:$$

Nota: la regularidad de f depende de la regularidad de h.

Recordar que si

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^n \quad \text{con} \quad \xi_k^n = \frac{\xi_k}{\sigma_n}$$

$\mathbb{E}[S_n f(S_n)]$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big[\xi_k^n \Big(f\Big(\overbrace{\sum_{\substack{1\le j\le n\\ k\ne j}} \xi_j^n}^{S_n^{(k)}} + \xi_k^n\Big) - f\Big(\overbrace{\sum_{\substack{1\le j\le n\\ k\ne j}} \xi_j^n}^{S_n^{(k)}}\Big)\Big)\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k^n \left(f(S_n^{(k)} + \xi_k^n) - f(S_n^{(k)})\right)\right]$$

La vez pasada hicimos

$$\left| f(S_n^{(k)} + \xi_k^n) - f(S_n^{(k)}) - \xi_k^n f'(S_n^{(k)}) \right|$$

$$\le \|f''\|_\infty |\xi_k^n|^2$$

¿Es esta cota buena?

Depende: recordar que

- $x f(x) - f'(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, z)}(x) - \mathbb{P}[N \le z]$ ← Regularid. dudosa

f'' no debería funcionar.

- $x f(x) - f'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)]$, ← Es una cota buena si h es Lipchitz.

Lemma de la tarea:

Si h es Liphitz, $\Rightarrow$ $\|f''\|_\infty \le 1$!!

Caso $h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x)$,

Llevabamos bien la parte:

$$\pm \quad \xi_k^n f'(S_n^{(k)})$$

$\mathbb{E}[f(X)X]$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^n (f(S_n^{(k)} + \xi_k^n) - f(S_n^{(k)}))]$$

aprox de 1º orden

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^n \cdot \xi_k^n f'(S_n^{(k)})] + R_n,$$

con

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^n (\underbrace{f(S_n^{(k)} + \xi_k^n) - f(S_n^{(k)})}_{\psi(1) - \psi(0),} - \xi_k^n f'(S_n^{(k)}))].$$

$$\psi(\lambda) = f(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^n)$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^n \int_0^1 (f'(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^n) \xi_k^n - \xi_k^n f'(S_n^{(k)})) d\lambda]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|\xi_k^n|^2 \int_0^1 (f'(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^n) - f'(S_n^{(k)})) d\lambda]$$

Idea para el caso irregular:

Si $a = S_n^{(k)}$ y $\varepsilon = \lambda \xi_k^n$, necesitamos

estimar $|f'(a+\varepsilon) - f'(a)|$:

Recordemos que

$$xf(x) - f'(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x) - \mathbb{P}[N \leq z].$$

$$\Rightarrow |f'(a+\varepsilon) - f'(a)|$$

$$= |(a+\varepsilon) f(a+\varepsilon) - af(a) - \underbrace{(\mathbb{1}_{\{a+\varepsilon \leq z\}} - \mathbb{1}_{\{a \leq z\}})}_{\text{si } \varepsilon > 0 \quad \mathbb{1}_{(z-\varepsilon, z]}(a)}|$$

$$\leq |(a+\varepsilon) f(a+\varepsilon) - af(a)| + \mathbb{1}_{(z-|\varepsilon|, z+|\varepsilon|)}(a).$$

$$\leq \left(a + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right) |\varepsilon| + \mathbb{1}_{(z-|\varepsilon|, z+|\varepsilon|)}(a)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[|f'(S_n^{(k)} + \varepsilon) - f'(S_n^{(k)})| \, |\xi_k^n|^2\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\left(|S_n^{(k)}| + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right) |\xi_k^n|^3\right]$$ orden $\mathbb{E}[|\xi_k^n|^3]$

orden es $\mathbb{E}[|\xi_k^n|^3]$

$$+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{z - |\xi_k^n| \leq S_n^k \leq z + |\xi_k^n|\}} |\xi_k^n|^2\right]$$

Se puede mostrar que

$$\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ \varepsilon>0}} \mathbb{P}\left(S_n^k \in [a, a+\varepsilon]\right) \leq C\,\varepsilon.$$

desigualdades de concentración.

Una formalización de esto nos da

$$d_K(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(|\xi_k^n|^3\right).$$

Nota:

La regularidad de f importa

Si f no es regular, podemos considerar otras métricas d que sustituyen a d_K:

Ejmp:

- $d_W(\mu,\nu) := \sup_{f \text{ Lipshitz}} \left| \int f\,d\mu - \int f\,d\nu \right|.$

- $d_m(\mu,\nu) = \sup_{f\in C^n(\mathbb{R},\mathbb{R});\ \|f^{(i)}\|_\infty \leq 1} \left| \int f\,d\mu - \int f\,d\nu \right|.$

Regularidad: ✓

Problema:

Para Z_n ← cualquier v.a.

¿Cómo manejo

$\mathbb{E}[Z_n f(Z_n)]$?

Motivación de la cota:

$$d_K(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|\frac{\xi_k}{\sigma_n}\right|^3\right]$$

Recordatorio del método de momentos:

. $S_n \xrightarrow{ley} N$ ⊛

Tma: Si S_n satisface ciertas condiciones muy generales (condición de Carlemann).

para obtener ⊛ es suficiente

$$\mathbb{E}[S_n^m] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[N^m] \quad \forall \; m \in \mathbb{N}.$$

Teorema:

Si $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, con $\xi_k \leftarrow$ indep. centradas

entonces, si $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^2]$, se

tiene que

$$d_k\left(\frac{S_n}{\sigma_n}, N\right) \leq C\sqrt{\mathbb{E}[S_n^4] - \mathbb{E}[N^4] + \frac{1}{n}}$$

Corolario:

Si $\frac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ley}} F$, entonces

$$d_k(F, N) \leq C\sqrt{\mathbb{E}[F^4] - 3}$$

Prueba:

$$d_k(S_n, N) \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|\,|\xi_k^n|^2\right]$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|\xi_k^n|^2]^{1/2}\, \mathbb{E}[|\xi_k^n|^4]^{1/2}$$

$$\leq C \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{|\xi_k|^2}{\sigma_n^2} \right] \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^4 \right] \right)^{1/2}$$

$$= C \left(\frac{1}{\sigma_n^4} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k|^4 \right] \right)^{1/2}$$

Notar que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\sigma_n} \right)^4 \right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{\sigma_n} \right)^4 \right]$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_4=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{\xi_{k_1}}{\sigma_n} \cdots \frac{\xi_{k_4}}{\sigma_n} \right] = *$$

Si $k_i \neq k_j$ para $i \neq j$, la esperanza es cero por la condición de centramiento, por lo que se cumple alguna de las siguientes condiciones

- $k_1 = k_2$ y $k_3 = k_4$
- $k_1 = k_3$ y $k_2 = k_4$
- $k_1 = k_4$ y $k_2 = k_3$

De aquí se sigue que

$$* = 3\sum_{K_1,K_2=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{K_1}}{\sigma_n}\right)^2\left(\frac{\xi_{K_2}}{\sigma_n}\right)^2\right]$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{K_1}}{\sigma_n}\right)^4\right] + 3\sum_{\substack{K_1,K_2=1\\ K_1\neq K_2}}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{K_1}}{\sigma_n}\right)^2\left(\frac{\xi_{K_2}}{n}\right)^2\right]$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{K_1}}{\sigma_n}\right)^4\right] + 3\sum_{K_1,K_2=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{K_1}}{\sigma_n}\right)^2\right]\mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{K_2}}{n}\right)^2\right] - 3\sum_{K=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_K}{\sigma_n}\right)^2\right]^2$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{K_1}}{\sigma_n}\right)^4\right] + 3\left(\sum_{K=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_K}{\sigma_n}\right)^2\right]\right)^2 - 3\sum_{K=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_K}{\sigma_n}\right)^2\right]^2$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_K}{\sigma_n}\right)^4\right] + 3 - 3\sum_{K=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_K}{\sigma_n}\right)^2\right]^2$$

De esta manera, vemos que

$$\sum_{K=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_K}{\sigma_n}\right)^4\right] = \mathbb{E}\left[S_n^4\right] - 3 + 3\sum_{K=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\frac{\xi_K}{\sigma_n}\right|^2\right]^2$$

Si los ξ_k son i.i.d, $\mathbb{E}[\xi_k^2] = \mathbb{E}[\xi_1^2]$,

de manera que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|\frac{\xi_k}{\sigma_n}\right|^2\right]^2 = \frac{1}{n},$$ lo cual implica que

$$d_K\left(\frac{S_n}{\sigma_n}, N\right) \leq C\left(\mathbb{E}[S_n^4] - 3 + \frac{3}{n}\right)^{1/2}$$

como se requiere.

Paréntesis de esperanza condicional:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ← espacio de probabilidad.

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub σ-álgebra.

$\mathcal{G}$ = conjunto de eventos

Idea: ¿cómo formalizo el fenómeno de que exista aleatoriedad, pero ya conozco toda la "información" disponible en $\mathcal{G}$?

Interpretación de $\mathcal{G}$ como info:

$X_1, \ldots, X_n$ ← v.a.

$\mathcal{G} = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Ejemplo:

Y = Resultado del TOEFL.

$n=2$

X_1 = # Horas que estudié

X_2 = tiempo en que terminé el exámen

Suponer que conocemos $X_1 = x_1$ y $X_2 = x_2$

Cuál sería el valor esperado de Y

$$= \mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2].$$

Interpretación en proba:

En proba 1:

(Y, X_1, X_2) tienen densidad $f(y, x_1, x_2)$

$$f_{Y \mid X_1, X_2}(y \mid x_1, x_2) = \frac{f_{Y,X_1,X_2}(y, x_1, x_2)}{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}$$ ← ver como función de y.

Entonces,

$$\mathbb{E}[Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2] = \int_{\mathbb{R}} f_{Y \mid X_1, X_2}(y \mid x_1, x_2)\, dy.$$

Hoy no conozco X_1, X_2

Pero mañana me dicen.

Definimos

$\Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$(x_1, x_2) \longmapsto \Theta(x_1, x_2) = \mathbb{E}[Y \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2]$

$\Theta \leftarrow$ interpretación de Julián de esperanza cond.

Pero esto va a ser mañana que conozca a X_1 y X_2.

Hoy, es razonable, pensar en

$\Theta(X_1, X_2) \leftarrow$ v.a.

llamamos

$\mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2] := \Theta(X_1, X_2)$.

Si $\mathcal{G} := \sigma(X_1, X_2)$, definimos

$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] := \Theta(X_1, X_2)$.

Resultado enorme:

Se puede definir $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ en términos de sus propiedades.

i) Prelims (al menos $Y \in L^1(\Omega)$).

ii) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid G]] = \mathbb{E}[Y]$.

información

iii) $\mathbb{E}[FY \mid G] = F\,\mathbb{E}[Y \mid G]$

$A \in G$ o F v.a. F es G-medible y acotada

Teorema:

$\exists!$ v.a. $\mathbb{E}[Y \mid G]$ t.q. i), ii) y iii)

Caso fácil:

$Y \in L^2(\Omega)$.

Construcción para $\mathbb{E}[Y \mid G]$.

$V = \{ F : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. $\mid$ F es G medible$\}$

V espacio de Hilbert (con $\|\cdot\|_{L^2}$).

$\mathbb{E}[Y \mid G]$ = Proyección de Y en G.

Pares intercambiables

Setting:

(W, W') satisfacen

$(W, W') \overset{ley}{=} (W', W)$. $\leftarrow$ par intercambiable.

$\Updownarrow$

$\forall \ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$\mathbb{P}[(W, W') \in A \times B] = \mathbb{P}[(W', W) \in A \times B]$.

Motivación: en el contexto de

$$S_n^{(k)} = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

$$W = S_n$$

Método visto antes:

considera las variables S_n^k, de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(S_n^{(k)} + \xi_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Big(f(\underbrace{S_n^{(k)} + \xi_k}_{W_k}) - f(\underbrace{S_n^{(k)}}_{W_k'}) \Big).$$

Ahora $\sum$ ← interpretamos como medida de prob.

$\sum_{k=1}^{n} S_n^{(k)}$ ← acción de remover una componente unif. sobre los índices,

Formalización del arg. de sumas de v.a.

Setting: $\mathbb{E}[\xi_i]=0$ y $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\xi_i^2]=1$.

llamamos

no tiene a ξ_i

$$W=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \quad \text{y} \quad W^{(i)}=W-\xi_i$$

Objetivo

$\mathbb{E}[W f(W)]$ = Algo que "abstrae" las ideas anteriores.

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\xi_i(f(W^{(i)}+\xi_i)-f(W^{(i)}))].$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\xi_i\int_0^{\xi_i}f'(W^{(i)}+t)\,dt]$$

$=$

Notar que

$$\xi_i \int_0^{\xi_i} f'(w^{(i)}+t)\,dt$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{0\le t\le \xi_i\}}\ \xi_i\ f'(w^{(i)}+t)\ dt & \text{si } \xi_i \geq 0 \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\xi_i\le t\le 0\}}\ \xi_i\ f'(w^{(i)}+t)\ dt & \text{si } \xi_i<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[Wf(W)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{\{0\le t\le \xi_i\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_i\le t\le 0\}}\right)\xi_i\, f'(w^{(i)}+t)\right] dt.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{\{0\le t\le \xi_i\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_i\le t\le 0\}}\right)\xi_i\right]}_{K_i(t)\,\geq\, 0} \mathbb{E}\left[f'(w^{(i)}+t)\right] dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} K_i(t)\ \mathbb{E}\left[f'(w^{(i)}+t)\right] dt$$

Notar que

$$\int_{\mathbb{R}} K_i(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{\{0\le t\le \xi_i\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_i\le t\le 0\}}\right)\xi_i\right] = \circledast$$

$\Rightarrow$

$$\circledast = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{1}_{\{0 \le t \le \xi_i\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_i \le t \le 0\}} \right) \xi_i \right]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{\xi_i \ge 0\}} \xi_i^2 - \underbrace{|\xi_i| \xi_i \mathbb{1}_{\{\xi_i < 0\}}}_{|\xi_i|^2 \mathbb{1}_{\{\xi_i < 0\}}} \Big] = \mathbb{E}[\xi_i^2]$$

$\Rightarrow$

$\mathbb{E}[W f(W)]$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[\xi_i^2]}_{\ge 0} \underbrace{\left(\frac{K_i(t)}{\mathbb{E}[\xi_i^2]} \right)}_{\ge 0} \mathbb{E}[f'(W^{(i)} + t)] \, dt$$

se interpretan como med. de prob.

Pues $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_i^2] = 1.$

Sea $\{\xi_i^*\}_i \leftarrow$ colección de v.a. indep. de $\{\xi_i\}$.

t.q. ξ_i^* tienen densidad $\dfrac{K_i(t)}{\mathbb{E}[\xi_i^2]}$ respecto a t.

$I \leftarrow$ v.a. indep. de todo lo demás, t.q.

$$\mathbb{P}[I=i] = \sigma_i^2 = \mathbb{E}[\xi_i^2].$$

Lo que obtuvimos antes se lee

$$\mathbb{E}[W f(W)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_i^2] \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{K_i(t)}{\mathbb{E}[\xi_i^2]}\right) \mathbb{E}[f'(W^{(i)}+t)]\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_i^2]\, \mathbb{E}[f'(W^{(i)} + \xi_i^*)].$$

$$= \mathbb{E}[f'(W^{(I)} + \xi_I^*)].$$

En particular,

$$\mathbb{E}[W f(W) - f'(W)]$$

$$= \mathbb{E}[f'(\underbrace{W^{(I)} + \xi_I^*}_{W'}) - f'(W)].$$

Tasa de crecimiento debe tener que ver con $W - W'$.

Más allá de W = suma de v.a.

. Ingrediente 1: $W, W' \leftarrow$ definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(W, W') es intercambiable si

$$(W, W') \overset{ley}{=} (W', W).$$

. Decimos que W y W' satisfacen una condición de regresión si $\exists$ $\lambda \in (0,1)$ t.q.

$$\mathbb{E}[W - W' \mid W] = \lambda W \iff \mathbb{E}[W' \mid W] = (1-\lambda) W$$

Ejemplo: $(W, W') \leftarrow$ vector Gaussiano bivariado, media 0, covarianzas $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

(X, Y) tiene distribución Gaussiana bivariada con media $\mu = \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}$ y covarianzas $\Sigma = \begin{bmatrix} Var[X] & cov[X,Y] \\ cov[X,Y] & Var[Y] \end{bmatrix}$ si

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{(2\pi) |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} ((x,y)-\mu) \Sigma^{-1} ((x,y)-\mu)^{t} \right\}$$

De vuelta a

$$\mathbb{E}[W - W' \mid W] = (1 - \lambda) W \qquad \text{\#}$$

Decimos (W, W') es un λ-par de Stein si

i) (W, W') es un par intercambiable

ii) se vale #

Observación: si $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es anti-simétrica $g(x,y) = -g(y,x)$, entonces

$$\mathbb{E}[g(W, W')] = 0$$

← esto se vale para cualquier antisimétricas,

tomar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de prueba.

¿Puedo obtener términos que involveren a

$$(f(w) - f(w'))(w - w')$$

considerar

$$g(x,y) = (x - y)(f(w) + f(w')).$$

← antisimétrica

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[g(w, w')] = 0$$

En Particular

$$0 = \mathbb{E}[(W-W')(f(W)+f(W'))]$$

$$= \mathbb{E}[(W-W')(f(W')-f(W))] + 2\,\mathbb{E}[(W-W')f(W)] \quad ①$$

Notar que

$$\mathbb{E}[(W-W')f(W)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(W-W')f(W) \mid W]]$$

$$= \mathbb{E}[f(W)\,\mathbb{E}[(W-W') \mid W]] \quad \text{cond. de regresión}$$

$$= \mathbb{E}[f(W)\,\lambda W] = \lambda\,\mathbb{E}[f(W)W]. \quad ②$$

① y ② $\Rightarrow$

$$0 = \mathbb{E}[(W-W')(f(W')-f(W))] + 2\lambda\,\mathbb{E}[f(W)W]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[f(W)W] = \frac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}[(W'-W)(f(W')-f(W))]$$

Teorema: Bajo los supuestos anteriores,

i). $\mathbb{E}[f(W)W] = \dfrac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}[(W-W')(f(W)-f(W'))].$

ii) $\mathbb{E}[f(W)W] = \mathbb{E}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f'(W+t)\,\hat{K}(t)\,dt\right]$

Donde $\hat{K}(t) = \left(\mathbb{1}_{\{\Delta<0\}} - \mathbb{1}_{\{\Delta\geq 0\}}\right)\dfrac{\Delta}{2\lambda}$

$\Delta := W - W'$

iii)

$$\mathbb{E}\left[W f(W) - f'(W) \right] =$$

$$\mathbb{E}\left[f'(W) \left(1 - \frac{\Delta^2}{2\lambda} \right) \right] +$$

$$+ \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left(f'(W) - f'(W + t) \right) \hat{K}(t)\, dt \right].$$

$$y f(y) - \lambda \int_{\mathbb{R}} x f(y+x) \, F(dx) = h(y) - \mathbb{E}[h(X)]$$