# Cadenas de Markov a tiempo continuo

Objetivo: generalizar la noción de cadenas de Markov discretas en espacio de estados discreto, y definidas sobre un parámetro continuo.

Es decir, lo mínimo que buscamos es estudiar procesos $X = \{X_t \ ; \ t \geq 0\}$ con valores en un conjunto discreto $E$, que satisfagan la propiedad de Markov:

$\forall \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < s < t < \infty \quad$ y $\quad x_0, \dots, x_n, x, y \in E$,

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x]. \qquad \circledast$$

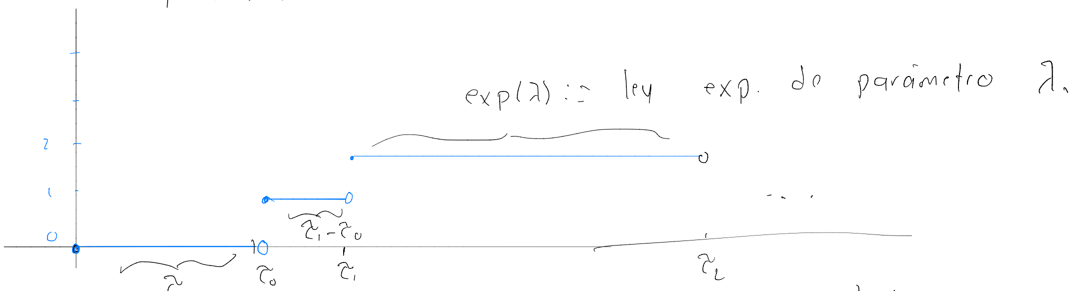
Ejemplo fundamental:

$X = N = \{N_t \ ; \ t \geq 0\}$ es un proceso Poisson.

$E = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. La propiedad $\circledast$ se satisface por su curso de semestres pasados.

Construcción de un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

trayectoria de $N$:




Construcción de un proceso de saltos $X = \{X_t \, ; \, t \geq 0\}$. con valores $E$:

Sea $x_0, x_1, x_2, \dots \in E$ $\qquad \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots \in \mathbb{R}_+$

i) Empieza en $x_0$ $(X_0 = x_0)$

ii) Esperamos un tiempo $\tau_0$, y luego $X$ "salta" a otro estado.
(Voy a permitir que $\tau_0 = \infty$, en cuyo caso, $X$ permanece en $x_0$ siempre.
Si $\tau_0 < \infty$, voy al paso iii)

iii) Salto al estado $x_1$ en el tiempo $\tau_0$

iii) Esperamos un tiempo $\tau_1 - \tau_0$, y luego $X$ "salta" a otro estado.
(Voy a permitir que $\tau_1 = \infty$, en cuyo caso, $X$ permanece en $x_1$ siempre.
Si $\tau_1 < \infty$, voy al paso siguiente.

⋮

n) Procedemos inductivamente.

Formalmente, estamos definiendo:

$$X_t = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_0 \\ x_1 & \text{si } \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ x_2 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \end{cases}$$

Ejemplo: # de botes de una pelota:

Supongamos que el tiempo entre el bote $n$ y $n+1$ de un balón es de $2^{-n}$. Sea $X_t = \#$ botes al tiempo $t$. $E = \mathbb{N}_0$

(aquí $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2, \ldots,\ x_j = j$).

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2$$

$X$ sólo está definido en $[0, 2]$; En este caso decimos que el modelo de saltos explota. Para ajustar la def. de $X$, consideramos el nuevo espacio de estados $E \cup \{\infty\}$, y definamos

$$X_t = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_0 \\ x_1 & \text{si } \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ x_2 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ & \\ \infty & \text{si } \lim_n \tau_n \leq t \end{cases}$$

## Introduciendo estocasticidad.

Separamos $E$ en estados que llamaremos "absorbentes" y "no absorbentes".

(Pensar en proceso Poisson como ejemplo).

a cada $x \in E$ le asocio una distribución $F_x(t)$, de una v.a. positiva. y consideramos "probabilidades de transición"

$\Pi_{x,y}$ $y \in E \setminus \{x\}$, $\left( \Pi_{x,y} > 0 \right.$ y $\displaystyle\sum_{y \in E \setminus \{x\}} \Pi_{x,y} = 1$, $\left. \Pi_{x,x} = 0. \right)$

La cadena salta a $y$ con prob $\Pi_{x,y}$

(Pensar $\tau_0 \sim F_x$,) y que $\mathbb{P}[X_{\tau_0} = y] = \Pi_{x,y}$.

Supondremos que $X_{\tau_0}$ es independiente del tiempo $\tau_0$. En particular,

$$\mathbb{P}[\tau_0 \leq t,\ X_{\tau_0} = y \mid X_0 = x] =: \mathbb{P}_x[\tau_0 \leq t,\ X_{\tau_0} = y] = F_{x_0}(t)\, \Pi_{x,y}.$$

Si $x_0$ es absorbente, haremos $X_t = x_0$ $\forall$ $t \geq \tau_0$.

Sólo si $x_0$ no es absorbente hacemos la transición en $\tau_0$.

seguimos la construcción inductivamente.

Suposición: Con probabilidad 1, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \tau_n = \infty$ (caso no explosivos).

A un proceso con éstas propiedades le llamaremos proceso de saltos puro.

Notación:

$$\mathbb{P}_{x,y}(t) := \mathbb{P}_x[X_t = y] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_0 = x], \quad t > 0, \qquad x, y \in E$$

$$\mathbb{P}_{x,y}(0) = \delta_{x,y} := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Vamos a poner una ley inicial $\nu_0(x)$, $x \in E$ al valor de $X_0$. independiente de $\tau_0, \tau_1 - \tau_0, \tau - \tau_1, \ldots,$ y de las transiciones.

Resumiendo:

- $X_0, \tau_0, \tau_1 - \tau_0, \tau - \tau_1, \ldots, X_{\tau_0}, X_{\tau_1}, \ldots$ son variabes independientes.

Estamos interesados en procesos que satisfacen

$\forall \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n < s < t < \infty$ y $x_0, \ldots, x_n, x, y \in E$,

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x]. = \mathbb{P}_x[X_{t-s} = y] = \mathbb{P}_{x,y}(t-s)$$

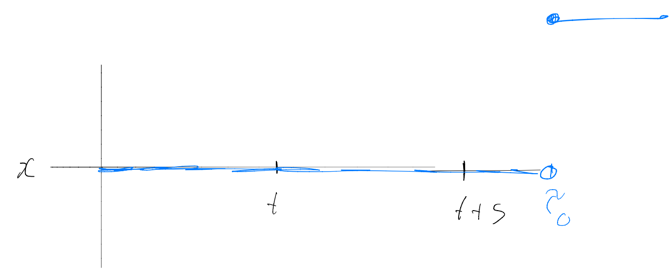
**Lemma:**

Si $\{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov de saltos puro (es decir, de saltos puros con propiedad de Markov,

y si $x \in E$ es no absorbente, entonces

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t] = \mathbb{P}[\tilde{\tau}_0 > s] \qquad \forall \quad s,t > 0.$$

$\Rightarrow$ $\tau_0$ tiene distribución exponencial. (Ver prueba de esto en libro de Norris).




**prueba: (idea)**

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t)$$

$$= \mathbb{P}_x[X_u = x \quad \forall \quad u \in [t, t+s] \mid X_u = x \quad \forall \quad u \in [0,t]]$$

$$= \mathbb{P}_x[X_v = x \quad \forall \quad v \in [0,s]] = \mathbb{P}_x[\tau_0 > s] \quad \square$$

propiedad de Markov (Paso delicado)