Cadenas de Markov a tiempo continuo

Objetivo: generalizar la noción de cadenas de Markov discretas en espacio de estados discreto, y definidas sobre un parámetro continuo.

Es decir, lo mínimo que buscamos es estudiar procesos $X = \{X_t \,;\, t \geq 0\}$ con valores en un conjunto discreto E, que satisfagan la propiedad de Markov:

$\forall \quad \underbrace{0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n}_{} < s < t < \infty \quad$ y $\quad x_0, \dots, x_n, x, y \in E,$

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x]. \quad (*)$$

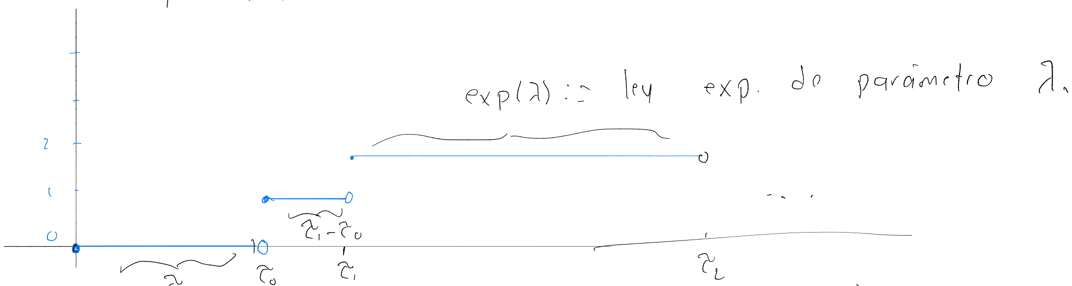
Ejemplo fundamental:

$X = N = \{N_t \,;\, t \geq 0\}$ es un proceso Poisson.

$E = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. La propiedad $(*)$ se satisface por su curso de semestres pasados.

Construcción de un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

trayectoria de N:



Construcción de un proceso de saltos $X = \{X_t \; ; \; t \geq 0\}$. con valores E:

Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots \in E$ $\qquad \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \ldots \in \mathbb{R}_+$

i) Empieza en x_0 $\quad (X_0 = x_0)$

ii) Esperamos un tiempo τ_0, y luego X "salta" a otro estado.

(Voy a permitir que $\tau_0 = \infty$, en cuyo caso, X permanece en x_0 siempre.

Si $\tau_0 < \infty$, voy al paso iii)

iii) Salto al estado x_1 en el tiempo τ_0

iii) Esperamos un tiempo $\tau_1 - \tau_0$, y luego X "salta" a otro estado.

(Voy a permitir que $\tau_1 = \infty$, en cuyo caso, X permanece en x_1 siempre.

Si $\tau_1 < \infty$, voy al paso siguiente.

⋮

n) Procedemos inductivamente.

Formalmente, estamos definiendo:

$$X_t = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_0 \\ x_1 & \text{si } \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ x_2 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \end{cases}$$

Ejemplo: # de botes de una pelota:

Supongamos que el tiempo entre el bote n y $n+1$ de un balón es de 2^{-n}. Sea $X_t = \#$ botes al tiempo t. $E = \mathbb{N}_0$

(aquí $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \ldots, x_j = j$).

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2$$

X sólo está definido en $[0, 2]$; En este caso decimos que el modelo de saltos explota. Para ajustar la def. de X, consideramos el nuevo espacio de estados $E \cup \{\infty\}$, y definamos

$$X_t = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_0 \\ x_1 & \text{si } \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ x_2 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \infty & \text{si } \lim_n \tau_n \leq t \end{cases}$$

Introduciendo estocasticidad.

Separamos E en estados que llamaremos "absorbentes" y "no absorbentes".

(Pensar en proceso Poisson como ejemplo).

a cada $x \in E$ le asocio una distribución $F_x(t)$, de una v.a. positiva. y consideramos "probabilidades de transición"

$\Pi_{x,y}$ $y \in E \setminus \{x\}$, $\left(\Pi_{x,y} > 0 \quad y \quad \sum_{y \in E \setminus \{x\}} \Pi_{x,y} = 1, \quad \Pi_{x,x} = 0. \right)$

La cadena salta a y con prob $\Pi_{x,y}$

(Pensar $\tau_0 \sim F_x$,) y que $\mathbb{P}[X_{\tau_0} = y] = \Pi_{x,y}$.

Supondremos que X_{τ_0} es independiente del tiempo τ_0. En particular,

$$\mathbb{P}[\tau_0 \leq t, X_{\tau_0} = y \mid X_0 = x] =: \mathbb{P}_x[\tau_0 \leq t, X_{\tau_0} = y] = F_{x_0}(t)\, \Pi_{x,y}.$$

Si x_0 es absorbente, haremos $X_t = x_0$ $\forall$ $t \geq \tau_0$.

Sólo si x_0 no es absorbente hacemos la transición en τ_0.

seguimos la construcción inductivamente.

Suposición: Con probabilidad 1, $\lim_{n \to \infty} \tau_n = \infty$ (caso no explosivos).

A un proceso con éstas propiedades le llamaremos proceso de saltos puro.

Notación:

$\mathbb{P}_{x,y}(t) := \mathbb{P}_x[X_t = y] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_0 = x], \quad t > 0, \qquad x, y \in E$

$$\mathbb{P}_{x,y}(0) = \delta_{x,y} := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Vamos a poner una ley inicial $\nu_0(x)$, $x \in E$ al valor de X_0. independiente de $\tau_0, \tau_1 - \tau_0, \tau - \tau_1, \ldots,$ y de las transiciones.

Resumiendo:

- $X_0, \tau_0, \tau_1 - \tau_0, \tau - \tau_1, \ldots, X_{\tau_0}, X_{\tau_1}, \ldots$ son variabes independientes.

Estamos interesados en procesos que satisfacen

$\forall \quad 0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n < s < t < \infty \quad$ y $\quad x_0, \ldots, x_n, x, y \in E,$

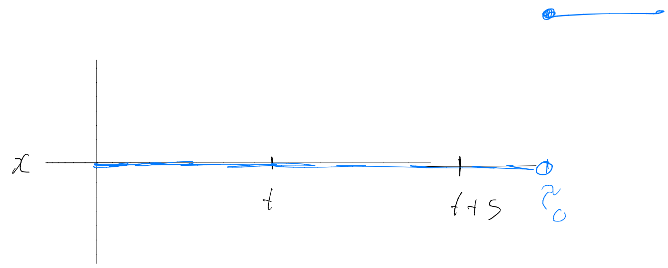
$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x] = \mathbb{P}_x[X_{t-s} = y] = \mathbb{P}_{x,y}(t-s)$$

Lemma:

Si $\{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov de saltos puro (es decir, de saltos puros con propiedad de Markov, y si $x \in E$ es no absorbente, entonces

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t] = \mathbb{P}[\tau_0 > s] \quad \forall \quad s,t > 0.$$

$\Rightarrow$ τ_0 tiene distribución exponencial. (Ver prueba de ésto en libro de Norris).



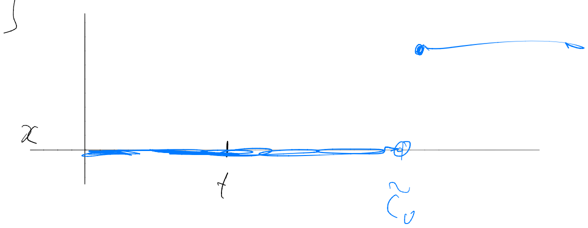
prueba: (idea)

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t)$$

$$= \mathbb{P}_x[X_u = x \quad \forall \quad u \in [t, t+s] \mid X_u = x \quad \forall \quad u \in [0,t]]$$

$$= \mathbb{P}_x[X_v = x \quad \forall \quad v \in [0,s]] = \mathbb{P}_x[\tau_0 > s] \quad \square$$

propiedad de Markov (Paso delicado)



Lemma:

Si $\{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov de saltos puro (es decir, de saltos puros con propiedad de Markov, y si $x \in E$ es no absorbente, entonces

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t] = \mathbb{P}[\tau_0 > s] \quad \forall \quad s,t > 0.$$

$\Rightarrow$ τ_0 tiene distribución exponencial. (Ver prueba de ésto en libro de Norris).

↑ clase pasada. Nota: los tiempos entre saltos para X siempre son exponenciales si se tiene propiedad de Markov.

Nota:

Si $X_0 = x$, entonces $\tau_0 \sim$ exponencial. La intensidad depende de x, y se denotará por q_x.

i.e. $\tau_0 \sim exp(q_x)$ (iniciando la cadena en x).

convención: $q_x = \dfrac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_0]}$.

La propiedad de Markov nos permite escribir Chapman-Kolmogorov.

$$\mathbb{P}[X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1]$$

$$= \mathbb{P}[X_{t_1} = x_1]\, \mathbb{P}_{x_1, x_2}(t_2 - t_1) \cdots \mathbb{P}_{x_{n-1}, x_n}(t_n - t_{n-1}).$$

La familia de matrices $\{\mathbb{P}(t),\ t \geq 0\}$ satisface la prop. de semigrupo (pensar $\mathbb{P}(t) = [\mathbb{P}_{x,y}(t);\ x, y \in E]$

$$\mathbb{P}(t) \cdot \mathbb{P}(s) = \mathbb{P}(t+s)$$

justificación:

$$\mathbb{P}_{x,y}(t+s) = \mathbb{P}_x[X_{t+s} = y] = \sum_{z \in E} \mathbb{P}_x[X_t = z]\, \mathbb{P}_z[X_s = y] = (\mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t))_{x,y}$$

Lemma 2.2.

$$P_{x,y}(t) = \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \int_0^t q_x e^{-q_x s} \Big(\sum_{z \in E\setminus\{x\}} \Pi_{x,z}\, P_{z,y}(t-s)\Big) ds$$

prueba:

$$P_{x,y}(t) = \mathbb{P}.[X_t = y \mid X_0 = x] = \mathbb{P}_x[X_t = y,\ \tau_0 > t] + \mathbb{P}_x[X_t = y,\ \tau_0 \le t]$$

$$= \delta_{x,y}\, \mathbb{P}[\tau_0 > t] + \int_0^t \mathbb{P}_x[X_t = y \mid \tau_0 = s]\, q_x e^{-q_x s} ds$$

$$= \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \mathbb{P}_x[X_t = y,\ X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s]\, q_x e^{-q_x s} ds$$

$$= \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \underbrace{\mathbb{P}_x[X_{t-s+\tau_0} = y,\ X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s]}\, q_x e^{-q_x s} ds$$

$$\mathbb{P}_{z,y}(t-s) \leftarrow \mathbb{P}_x[X_{t-s+\tau_0} = y \mid X_{\tau_0+0} = z,\ \tau_0 = s]$$

$$\Pi_{x,z} \leftarrow \mathbb{P}_x[X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s]$$

Nota: $X_{u+\tau_0}$ por construcción, es un proceso de Marvov de saltos puro que empieza en $X_{\tau_0} = z$

$$= \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(t-s)\, q_x e^{-q_x s} ds \quad \blacksquare$$

Consecuencia:
haciendo un cambio de variable,

$u = t - s$
$s = t - u$

$$\mathbb{P}_{x,y}(t) = \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{-q_x(t-u)}\, du$$

$$= \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + e^{-q_x t} \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{q_x u}\, du$$

Notar que

$$t \longmapsto \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{q_x u}\, du \text{ es continuo.}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}_{x,y}(t)$ continuo

$$\Rightarrow \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{q_x u}\, du \quad \text{es derivable en } t.$$

$$\Rightarrow \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + e^{q_x t} \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{q_x u}\, du = \mathbb{P}_{x,y}(t)$$

es derivable en t.

Cálculo de la derivada

$$\mathbb{P}'_{x,y}(t)$$

$$= \delta_{x,y}(-q_x)e^{-q_x t}$$

$$+ (-q_x)e^{-q_x t}\int_0^t \sum_{z\in E\setminus\{x\}} \Pi_{x,z}\,\mathbb{P}_{z,y}(u)\,q_x e^{q_x u}\,du \qquad \circledast$$

$$+ e^{-q_x t}\sum_{z\in E\setminus\{x\}} \Pi_{x,z}\,\mathbb{P}_{z,y}(t)\,q_x e^{q_x t}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}'_{x,y}(0) = -\delta_{x,y}q_x + q_x\sum_{z\in E\setminus\{x\}} \Pi_{x,z}\,\underbrace{\mathbb{P}_{z,y}(0)}_{=\delta_{z,y}}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}'_{x,y}(0) = -\delta_{x,y}q_x + q_x\Pi_{x,y} \qquad \forall\ x,y\in E$$

Notación:

Definiremos:

$$Q_{x,y} := \mathbb{P}'_{x,y}(0) = \begin{cases} -q_x & \text{si } x=y \\ q_x\Pi_{x,y} & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

La familia $Q = [Q_{x,y}\ ;\ x,y\in E]$ se conoce como Q-matriz. La ecuación $\circledast$ se escribe entonces como

$$\mathbb{P}'_{x,y}(t) = \sum_{z\in E} Q_{x,z}\,\mathbb{P}_{z,y}(t) = (Q\,\mathbb{P}(t))_{x,y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}'(t) = Q\,\mathbb{P}(t)$$

Nota: Conocer Q, junto la ley inicial determina la ley de la matriz.

Por otro lado, derivando la expresión, y luego

$$\mathbb{P}_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in E} \mathbb{P}_{x,z}(t)\, \mathbb{P}_{z,y}(s),$$

evaluando en $s=0$, obtenemos

$$\mathbb{P}_{x,y}'(t) = \sum_{z \in E} \mathbb{P}_{x,z}(t)\, Q_{z,y} = (\mathbb{P}G)_{z,y}$$

ecuación forward.

La ecuación backward la pueden obtener usando

$$\mathbb{P}_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in E} \mathbb{P}_{x,z}(t)\, \mathbb{P}_{z,y}(s),$$

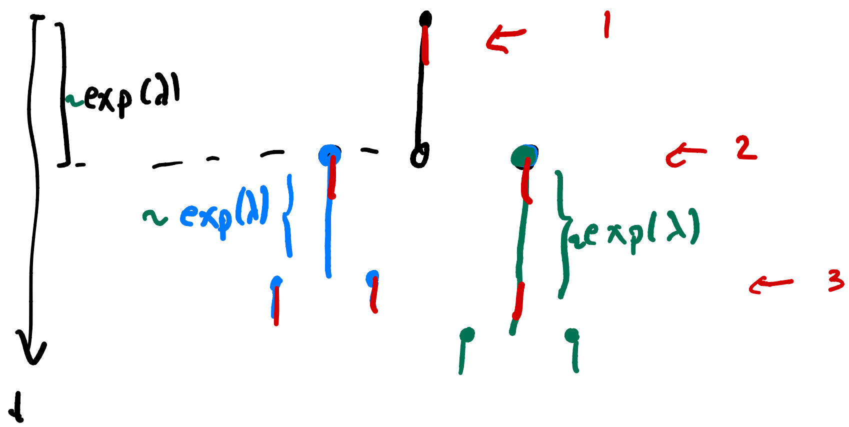
pero derivando con respecto a t.

Ejemplo:

Proceso de Yule:

i) Tenemos 1 partícula

ii) La partícula se biparte en un tiempo exponencial de parámetro $\lambda > 0$.



iii) Cada individuo nuevo se biparte con dist. exponencial(λ).

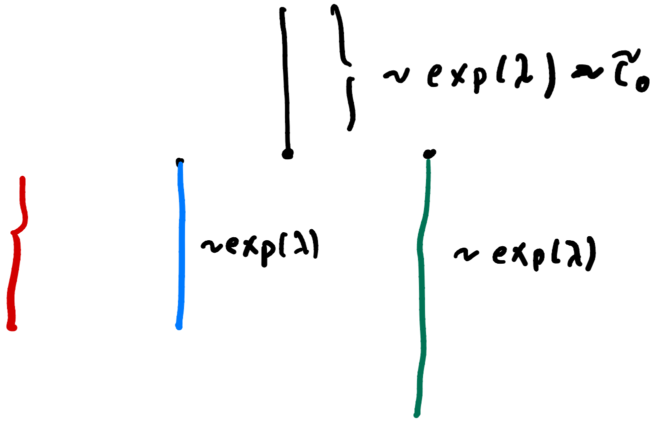
Los individuos actúan de manera independiente.

X_t = # de individuos al tiempo $t > 0$.

Nota: Se puede ver que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov de saltos puros.

Podemos calcular Q: (X_t siempre salta una unidad).

Sobre la pregunta en itempool.



$$Q_{2,3} = q_2 \, \Pi_{2,3} = q_2$$

$\Rightarrow \tau_1 - \tau_0$ se distribuye como el mínimo de la expenencial de la particula azul y la verde.

$\therefore \tau_1 - \tau_0 \sim exp(\lambda + \lambda)$.