Movimiento Browniano.

Perspectiva personal:

- Cuando analizamos v.a. i.i.d $\longleftarrow$ Objeto (v.a.) fundamental es $N(0,1)$

  $\uparrow$ distribución Gaussiana

Si $\{\xi_K\}_{K\geq 1}$ son v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[\xi_K]=0$

y $\mathbb{E}[\xi_K^2]=1$, $\mathbb{E}[|\xi_K|^3]<\infty$, entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{K=1}^{n}\xi_K \xrightarrow{\text{ley}} N(0,1).$$

- Cuando analizamos procesos, el objeto fundamental es el mov. Browniano.

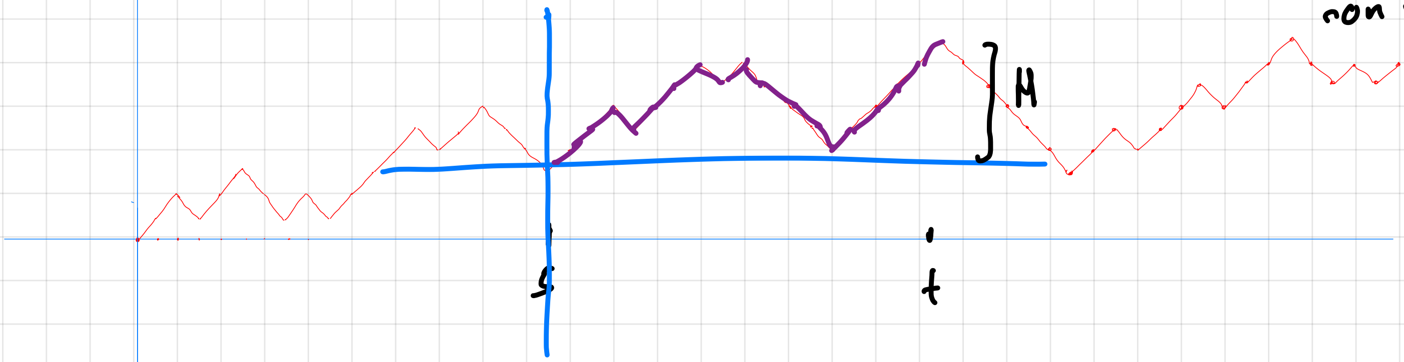
¿Qué es el mov. Browniano?

Perspectiva personal:

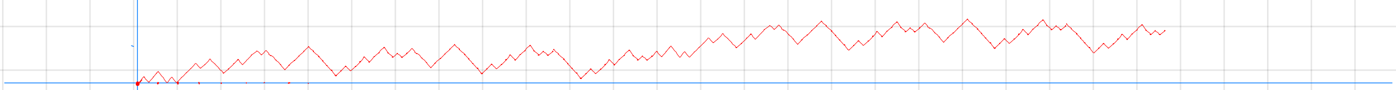
Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria:

Caminata aleatoria 1:

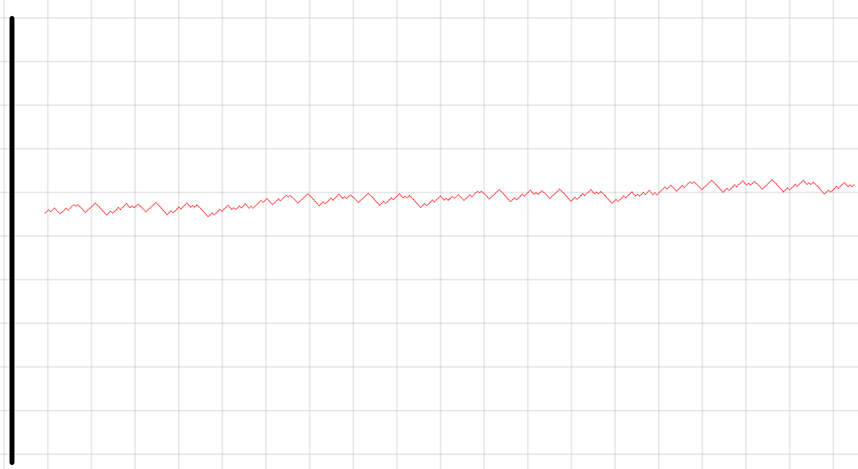
recordar que M depende de una Binomial y las binomiales reescaladas se aproximan con normales



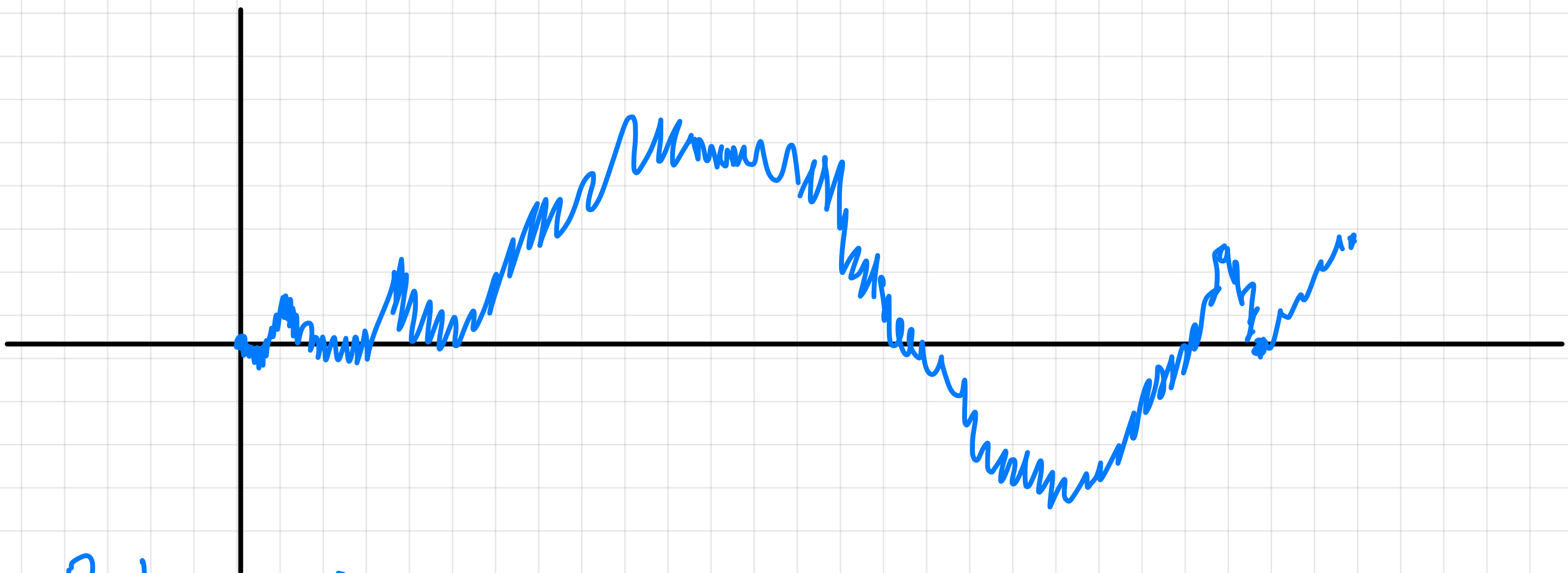
Caminata aleatoria 2:



Caminata aleatoria 3:



En el límite, cuando hacemos un plot de una caminata aleatoria, obtenemos una trayectoria que se ve con la siguiente forma:



Relevancia:

Aplicaciones en modelación:

- Precio de acciones (matemáticas financieras).
- Genética (procesos de ramificación).
- Cada vez que tengamos procesos del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k \qquad \{\xi_k\} \text{ como antes} \qquad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

- Estudio de v.a. que dependen de variables Gaussianas (Cálculo de Malliavin)
- Ecuaciones diferenciales parciales (con errores Gaussianos) → Ecuaciones parciales estocásticas. parciales

Aspectos técnicos de procesos estocásticos:

Supongamos que $X = \{X_t \, ; \, t \geq 0\}$ es un proceso estocástico. Colección de v.a definidas en UN MISMO ESPACIO DE PROBABILIDAD

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Problemas técnicos:

¿Quién es $\mathcal{F}$? ¿Cómo tomamos $\mathcal{F}$?

Definición:

Decimos que un proceso estocástico $\{B_t\}_{t\geq 0}$ (indexado por un parámetro continuo $t \in \mathbb{R}_+$) es un movimiento Browniano que empieza en $x \in \mathbb{R}$, si $B_0 = x$ y

i) Incrementos independientes:

$\forall \ t > s \geq 0$, $B_t - B_s$ es independiente de B_u, $0 \leq u \leq s$ (equivalentemente, $B_t - B_s$ es indep. de la "información generada" por B_u, $0 \leq u \leq s$.

ii) Incrementos estacionarios normales:

$\forall \ t > s \geq 0$ $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$. Es decir, $B_t - B_s$ es Gaussiano centrado, con

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = \mathrm{Var}[B_t - B_s] = t - s$$

iii) (Nota histórica)

El mov. Browniano se "observa" por primera vez por R. Brown al momento de describir partículas de polen en 1828

Esto motiva el pedir que con probabilidad 1, $t \mapsto B_t$, $0 \leq t \leq T$, $T \in \mathbb{R}_+$ sea continua

Problema "difícil":

¿Cómo sabemos que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso $B = \{B_t ; t \geq 0\}$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que B es un movimiento Browniano?

En lo sucesivo, supondremos que SI existe un $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un B que satisface las propiedades antes mencionadas.

Comentario sobre lo existencia:

(ver el libro de Durrett "Probability theory and examples" o el libro de LeGall).

1.-) Construcción incorrecta:

Teorema de consistencia de Kolmogorov.

- $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\}$.

- Si $w \in \Omega$, entonces $w = \{w(t);\ t \in \mathbb{R}_+\}$.

  $X_t := w(t)$.

- Si tenemos una familia de "leyes de probabilidad" potenciales para vectores $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ (que satisfacen la propiedad de "consistencia").

Entonces existe una medida en $(\Omega, \mathcal{F})$ t.q. $\mathbb{P}[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A]$ está dictada por las

"leyes de probabilidad" potenciales para vectores

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ propuestas.

Problema: Ya tenemos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ....

$\mathcal{F} \leftarrow$ los posibles eventos

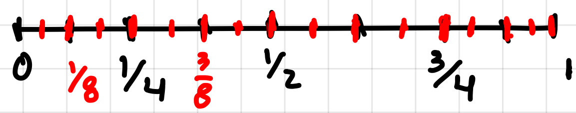
Thm: el evento $\{t \mapsto X_t$ es continua$\} \notin \mathcal{F}$.

Detalles sobre la prueba:

1.-) Construcción correcta:

Teorema de consistencia de Kolmogorov. ✓

- $D = \{ j 2^{-n} \; ; \; j \leq 2^n, \; n \in \mathbb{N} \}$ ↔



$\tilde{\Omega} = \{ f : D \to \mathbb{R} \}$

- Si $\omega \in \Omega$, entonces $\omega = \{ \omega(t) ; \; t \in D \}$ ✓

  $X_t := \omega(t)$.

- Si tenemos una familia de "leyes de probabilidad" potenciales para vectores $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ (que satisfacen la propiedad de "consistencia").

Entonces existe una medide en $(\Omega, \mathcal{F})$ t.q. $\mathbb{P}[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A]$ está dictada por las "leyes de probabilidad" potenciales para vectores $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ propuestas.

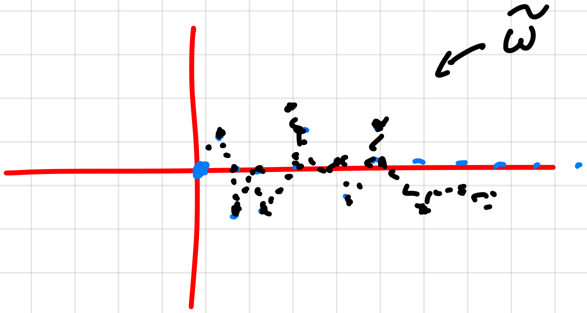
Se puede hacer.

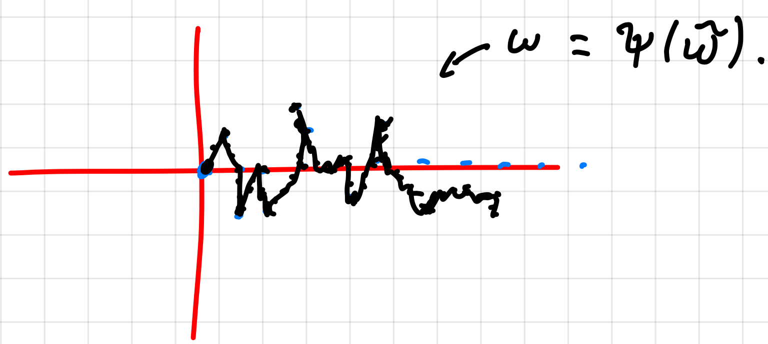
2º paso:

$\Omega = \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \}$ $\quad \mathcal{F} = \sigma$-álgebra generada por

$\Psi : \tilde{\Omega} \to \Omega$. t.q. $\omega = \Psi(\tilde{\omega})$ con $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, entonces

$\omega(t) = \hat{\omega}(t) \quad \forall \; t \in D$.





2.º construcción:

considerar $\{\xi_k\}_{k\geq 0}$ i.i.d. $\xi_k \sim N(0,1)$

$$X(t) := \xi_0 \frac{t}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jt)}{j} \xi_j .$$

es un mov. Browniano

ligeras modificaciones: • $\{\xi_k\}_{k\geq}$ sea gaussiana

y centrada $\mathbb{E}[\xi_k \xi_j] = R(k,j)$ ← función de covarianza (no trivial.

$= \rho(k-j)$

donde $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ t.q. $\sum \rho(k)^2 < \infty$.

2.-) ξ_j son intercambiabes.

Mi approach:

considerar

$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

tratar de ver la convergencia de

$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ hacia un vector Gaussiano

(se puede hacer con método de Stein ver libro de Chen-Goldstein)

Propiedades del movimiento browniano

Eventos naturales:

$B_0 = 0.$

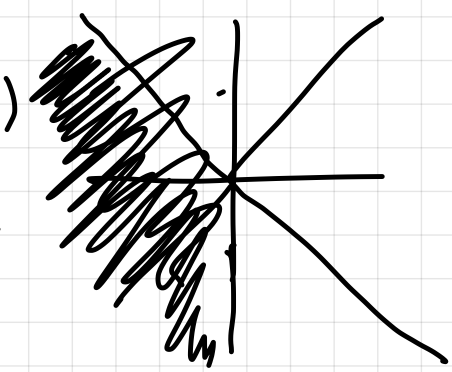
- $\mathbb{P}[B_2 \leq 0 = \mathbb{P}[N(0,2) \leq 0] = \frac{1}{2}$

  $B_2 = B_2 - B_0 \sim N(0,2)$ por la propiedad ii)

- $\mathbb{P}[B_1 \leq 0, B_2 \leq 0]$

  $= \mathbb{P}[B_1 \leq 0, (B_2 - B_1) + B_1 \leq 0]$

  $= \mathbb{P}[N_1 \leq 0, N_1 + N_2 \leq 0] = \circledast$



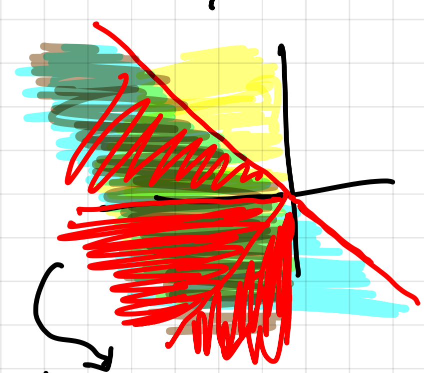
$\begin{cases} (B_1, B_2 - B_1) = (B_1 - B_0, B_2 - B_1) \overset{\text{ley}}{=} (N_1, N_2) \\ N_1 \sim N(0,1) \qquad N_1 \text{ y } N_2 \text{ indep.} \\ N_2 \sim N(0,1) \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}[B_1 \leq 0, B_2 \leq 0] \overset{N_1 = x}{=} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \mathbb{P}[N_1 \leq 0, N_1 + N_2 \leq 0 \mid N_1 = x]\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \mathbb{P}[x \leq 0, x + N_2 \leq 0 \mid N_1 = x]\, dx$$

$y \leq -x$



$$= \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\, \mathbb{P}[x + N_2 \leq 0 \mid N_1 = x]\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\, \mathbb{P}[N_2 \leq -x]\, dx = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{-x} \phi(y)\, \phi(x)\, dy\, dx = \frac{3}{8}$$

Generalización:

Probabilidades de transición:

La función cumulativa de transición como

$$P(y,t,x,s) := \mathbb{P}[B_{t+s} \leq y \mid B_s = x]$$

$$= \mathbb{P}[(B_{t+s} - B_s) + B_s \leq y \mid B_s = x]$$

$$= \mathbb{P}[B_{t+s} - B_s \leq y - x \mid B_s = x]$$

incrementos indep.

$$= \mathbb{P}[B_{t+s} - B_s \leq y - x]$$

Gaussianidad de los incrementos

$$= \mathbb{P}[B_t \leq y - x] = \mathbb{P}[B_t \leq y \mid B_0 = x]$$

$$= \int_{-\infty}^{y-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}u^2} \, du$$

La densidad (viendo a $P(y,t,x,s)$ como función cumulativa sobre y) está dada por:

$$P(y,t,x,s) = \int_{-\infty}^{y} p(u,t,x,s) \, du,$$

donde

$$p(u,t,x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(y-x)^2}$$

← no depende de s.

$$p(u,t,x,s) = p_t(x,u)$$

notación

(transito de x a u en tiempo t)

Calculo de "leyes Finito dimensionales":

Consideremos $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$

y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}[B_{t_1} \leq x_1, B_{t_2} \leq x_2, \dots B_{t_n} \leq x_n \mid B_0 = x]$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{1}{2t_1}(u-x)^2} \mathbb{P}[B_{t_2} \leq x_2, \dots, B_{t_n} \leq x_n \mid B_{t_1} = u, B_0 = x] \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} P_{t_1}(x,u) \, \mathbb{P}[B_{t_2} \leq x_2, \dots, B_{t_n} \leq x_n \mid B_{t_1} = u, B_0 = x] \, du$$

igual que antes:

$(B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$

$=((B_{t_2} - B_{t_1}) + B_{t_1}, (B_{t_3} - B_{t_1}) + B_{t_1}, \dots, (B_{t_n} - B_{t_1}) + B_{t_1})$

Entonces, condicional a $B_{t_1} = u$

$(B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$

$=((B_{t_2} - B_{t_1}) + u, (B_{t_3} - B_{t_1}) + u, \dots, (B_{t_n} - B_{t_1}) + u)$

independiente de B_{t_1} & B_0 y tiene ley

$\overset{ley}{=} (B_{t_2 - t_1} + u, B_{t_3 - t_1} + u, \dots, B_{t_n - t_1} + u) \overset{ley}{=} (B_{t_2 - t_1}, \dots, B_{t_n - t_1} \mid B_0 = u)$

checar

hint: Expresar a $(B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_1})$ en términos de $(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$.

De aquí se sigue que

$$\mathbb{P}[B_{t_1} \le x_1, B_{t_2} \le x_2, \dots B_{t_n} \le x_n \mid B_0 = x]$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x,u) \, \mathbb{P}[B_{t_2} \le \underset{-u}{x_2}, \dots, B_{t_n} \le \underset{-u}{x_n} \mid B_{t_1} = u, B_0 = x] \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x,u) \, \mathbb{P}[B_{t_2 - t_1} \le x_2, \dots, B_{t_n - t_1} \le x_n \mid B_0 = u] \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x,u_1) \int_{-\infty}^{x_2} p_{t_2 - t_1}(u_1, u_2) \, \mathbb{P}[B_{t_3 - t_2} \le x_3, \dots, B_{t_n - t_2} \le x_n \mid B_0 = u_2] \, du_2 \, du_1$$

inducción

$$\vdots$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_{t_1}(x,u_1) \, p_{t_2 - t_1}(u_1,u_2) \cdots p_{t_n - t_{n-1}}(u_{n-1},u_n) \, du_n \cdots du_1$$

Moraleja:

tengo una fórmula para la ley de

$$(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) \quad \forall \quad t_1 < \dots < t_n$$

Perspectivo 2:

Ver a $\{B_t ; t \geq 0\}$ como un proceso Gaussiano con una covarianza dada.

Definición:

Un proceso estocástio $X = \{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso Gaussiano si

$X_t = \tilde{X}_t + \mu_t$, donde μ_t es determinista

y

- $(\tilde{X}_{t_1}, \dots, \tilde{X}_{t_n})$ es un vector CONJUNTAMENTE gaussiano (i.e. vector Gaussiano multivariado) con media cero.

Nota: un vector $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ es Gaussiano centrado si:

Definición:

Decimos que $X = \{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso Gaussiano centrado si:

i) $\mathbb{E}[X_t] = 0 \quad \forall \; t \geq 0$

ii) $\forall \; 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es un vector conjuntamente Gaussiano,

Pregunta: ¿Qué es un vector Gaussiano?

$V = (V_1, \ldots, V_m)$ es un vector Gaussiano si

Caracterización 1:

i) Cualquier combinación lineal

$\lambda_1 V_1 + \cdots \lambda_m V_m$ es una v.a. gaussiana

Caracterización 2:

ii) $\exists \; \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ no negativa definida

y $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ t.q.

$$f_V(\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{:= \vec{x}}) = (2\pi^m \det(\Sigma))^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^* \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\right\}$$

Pregunta: si $A \sim N(0,1)$ y $B \sim N(0,1)$.

Entonces ¿ (A,B) es un vector Gaussiano?

¡No necesariamente!

Contraejemplo: $A \sim N(0,1)$ y $B = \zeta \cdot A$, donde

$\mathbb{P}[\zeta = 1] = 1 - \mathbb{P}[\zeta = -1] = \frac{1}{2}$.

Detalle:

ley de (A,B) no se puede "siempre" reconstruir a partir de la ley de A y la ley de B.

Hecho / lemma:

Suponer que $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ es un vector con entradas independientes y Gaussianas.

Entonces para toda $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ← matriz $m \times m$.

CZ es un vector Gaussiano.

Teorema: Suponer que $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz positiva definida no degenerada $(\ker(\Sigma) = \{0\})$

$.V = (V_1, \dots, V_m)$ es un vector Gaussiano con covarianza Σ, si alguna de las siguientes caracterizaciones se cumple

Caracterización 1:

i) Cualquier combinación lineal

$\lambda_1 V_1 + \cdots \lambda_m V_m$ es una v.a. gaussiana $(\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R})$.

Caracterización 2:

ii) $\exists$ $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ no negativa definida y $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ t.q.

$$f_V(\underbrace{x_1, \dots, x_m}_{:= \vec{x}}) = ((2\pi)^m \det(\Sigma))^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^* \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) \right\} \quad *$$

Bosquejo de prueba:

Caract 2 $\Rightarrow$ Caract. 1 :

Si V satisface caract 2: $\Rightarrow$ $w \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} V$

también satisface caract. 2

(consecuencia del tma de cambio de variable,

Más aún, $(1, \dots, 1) \cdot w = \underset{\mathbb{R}^{1 \times m}}{(1, \dots, 1)} \underset{\mathbb{R}^{m \times m}}{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}} \underset{\mathbb{R}^{m \times 1}}{V} \in \mathbb{R}$

es también una v.a. con densidad $*$ $\Rightarrow$ Gaussianidad.

Caracterización 1 $\Rightarrow$ Caracterización 2:

$V = (V_1, \dots, V_m)$.

satisface $\qquad W := \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m \sim N(\mu, \sigma)$

$$\mathbb{E}[e^{1 \cdot W}] = \exp\{\tfrac{1}{2} 1^2 \cdot \mathrm{Var}[W]\} \exp\{1 \cdot \mu\}$$

$$\mathrm{Var}[W] = \mathrm{Var}[\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m] =$$

$$= \mathbb{E}[(\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m)^2] - \mathbb{E}[\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m]^2$$

$$= \mathbb{E}[(\lambda_1 V_1)^2] + \dots + \mathbb{E}[(\lambda_m V_m)^2] + 2 \sum_{i<j} \mathbb{E}[(\lambda_i V_i)(\lambda_j V_j)] - \mathbb{E}[\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m]^2$$

Denotando por Σ a la covarianza

$$\Sigma = \{\Sigma_{i,j} \; ; 1 \le i,j \le m\}, \qquad \Sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}[V_i, V_j],$$

entonces, si $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ y $\mu := (\mathbb{E}[V_1], \dots, \mathbb{E}[V_m])$,

$$\mathrm{Var}[W] = (\vec{\lambda} - \vec{\mu})^* \Sigma (\vec{\lambda} - \vec{\mu})$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[e^{1 \cdot W}] = \exp\{\tfrac{1}{2} (\vec{\lambda} - \vec{\mu})^* \Sigma (\vec{\lambda} - \vec{\mu})\} \exp\{1 \cdot \mu\}$$

función generadora de momentos de la densidad

$$f_V(x_1, \dots, x_m) = ((2\pi)^m \det(\Sigma))^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^* \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\}$$

Corolario del cálculo anterior

Las leyes finito-dimensionales de un proceso Gaussiano centrado X, es decir, las leyes de los vectores del tipo $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ están determinadas por la función de covarianzas:

$$R : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(s,t) \longmapsto \mathbb{E}[X_s X_t] = \mathrm{Cov}[X_s, X_t]$$

Caracterización 2 del mov. Browniano:

$B = \{B_t ; t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano empezado en cero si

i) B es un proceso Gaussiano centrado

ii) su función de covarianzas está dada por

$$R(s,t) = s \wedge t$$

iii) B tiene trayectorias continuas

¿Qué debo poner en $\boxed{}$?

$$R(s,t) = \mathbb{E}[B_s B_t]$$

$$= \begin{cases} \mathbb{E}[B_s(B_s + (B_t - B_s))] = \mathbb{E}[B_s^2] = s & \text{si } s \leq t \\ \mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[(B_t + (B_s - B_t))B_t] = t & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

Para próxima tarea:

como deduzco propiedades de incrementos y estacionarios Gaussianos a partir de la formulación del m.B. como un proceso gaussiano centrado con covarianza

$$R(s,t) = \mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t$$

Aplicación directa:

$$Z = \int_0^1 B_u \, du \quad \leftarrow \text{¿Cuál es la ley?}$$

$$\int_0^1 B_u \, du = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_{t_k} \qquad \text{donde} \qquad t_k = \frac{k}{n}$$

Ahora, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_{t_k}$ es una v.a. Gaussiana centrada.

$\Rightarrow$ Sólo necesito la covarianza:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_{t_k}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k_1,k_2} B_{\frac{k_1}{n}} B_{\frac{k_2}{n}}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{checar}]{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 B_u B_v \, du \, dv\right]$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}[B_u B_v] \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^1 u \wedge v \, du \, dv = \cdots = \frac{1}{3}$$

checar

hecho:

si $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión de v.a Gaussianas, con $\mathbb{E}[\xi_k] = \mu_k$ y $Var[\xi_k] = \sigma_k^2$, entonces

$$\xi_k \xrightarrow{ley} \xi \sim N(\mu, \sigma^2),$$ donde

$$\mu = \lim_k \mu_k \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \lim_k \sigma_k^2,$$

siempre y cuando $\lim_k \mu_k$ y $\lim_k \sigma_k^2$ existen.

prueba:

Para ver que $\xi_k \xrightarrow{ley} \xi$ basta ver que

$$\mathbb{E}[e^{\lambda \xi_k}] \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{E}[e^{\lambda \xi}] \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda \xi_k}] = e^{\lambda \mu_k} \mathbb{E}[e^{\lambda(\xi_k - \mu_k)}]$$

$$= e^{\lambda \mu_k} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \sigma_k^2} \xrightarrow{k\to\infty} e^{\lambda \mu + \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2} = \mathbb{E}[e^{\lambda \xi}]$$

Propiedad Fundamental (autosimilitud):

Si $B = \{B_t ; t \geq 0\}$ es un m.B. (mov. Browniano), entonces, el proceso $\tilde{B} = \{\tilde{B}_t ; t \geq 0\}$ con

$\tilde{B}_t := \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ para $a > 0$.

es también un mov. Browniano.

prueba:

- $\tilde{B}$ tiene trayect. continuas.
- $\tilde{B}$ es un proceso Gaussiano centrado:

$$(\tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_m}) = \frac{1}{\sqrt{a}} (B_{at_1}, \dots, B_{at_m}) \leftarrow \text{vector Gaussiano.}$$

- $$\mathbb{E}[\tilde{B}_s \tilde{B}_t] = \frac{1}{a} \mathbb{E}[B_{as} B_{at}] = \frac{(as) \wedge (at)}{a} = s \wedge t \quad \blacksquare$$

Variación cuadrática:

Comercial:

Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

¿Cuando $\int_0^1 f\, dg$ tiene sentido?

Una manera de darle sentido a ésto es tomar

$$\int_0^1 f\, dg \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_{i-1}) \left| g(t_i) - g(t_{i-1}) \right| \quad (*) \quad 0 < t_0 < \dots < t_n$$

Una manera de asegurarnos que $(*)$ tenga un límite es:

i) Pedir condiciones "sencillas" sobre f

ii) $\sum_{k=1}^{n} \left| g(t_i) - g(t_{i-1}) \right|$ converge cuando el tamaño de la partición $0 < t_0 < \dots < t_n$ converge a cero.

(el límite se conoce como variación de g)

Hecho importante: las trayectorias de B no tienen variación finita.

Ecuaciones parcial

$Af = 0$ ⊕ $\quad A$ ∈ operador diferencial

Ejmp. $\quad A = \frac{\partial}{\partial t} - c\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Si pongo ciertas condiciones de frontera:

i) A veces podemos resolver explícitamente ⊕

ii) Sólo se tienen representaciones de ⊕
hay varias representaciones probabilísticas:

- Representación de Feynmac-Kac

- Representaciones del tipo $\mathbb{E}[g(X_\tau) \mid X_0 = x]$
  τ ∈ un tiempo de paro
  X ∈ un m.B.

¿Cuales son las propiedades de la solución f?

Como ver suavidad de orden alto para f?