

Simulación de vectores gaussianos

Def: Un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) se dice gausiano si cualquier combinación lineal de sus entradas tiene distribución gausiana/normal en \mathbb{R} .

Supongamos que $X = (X_1, \dots, X_n) \sim N_n(0, I_n)$ y sea Σ matriz de $n \times n$ simétrica positiva definida. Entonces

$$Y = \Sigma^{1/2} X + \mu$$

tiene distribución $N_n(\mu, \Sigma)$.

Para esto, estamos usando que si Z es vector aleatorio, A es una matriz determinista y b un vector, entonces $Y = AZ + b$ satisface

$$E(Y) = AE(Z) + b$$

$$\text{Cov}(Y) = A \text{Cov}(Z) A^T$$

si las entradas de Z tienen media y varianza finita.

Para encontrar $\Sigma^{1/2}$ se puede diagonalizar Σ

$$\Sigma = U D U^{-1}$$

y como Σ es positiva definida, los elementos en la diagonal de D son no negativos y tomamos $D^{1/2} = \text{diag}(d_{11}^{1/2}, \dots, d_{nn}^{1/2})$. Con esto,

$$\Sigma^{1/2} = U D^{1/2} U^{-1}$$

Simulación de procesos gaussianos

Def: Un proceso estocástico $X = (X_t)_{t \in T}$ se dice gausiano si para cada $n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T$, el vector aleatorio $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es gausiano.

Observaciones:

- Sabemos que la distribución normal univariada o multivariada está determinada por dos parámetros: media y covarianza.
- Es natural preguntarse si en el caso en que T no sea necesariamente finito, las funciones

- Es natural preguntarse si en el caso en que I no sea necesariamente finito, las funciones

$$m(t) := \mathbb{E}(X_t), \quad t \in T,$$

$$C(s, t) := \text{Cov}(X_s, X_t), \quad s, t \in T$$

caracterizan al proceso gaussiano.

- Este resultado es de hecho cierto y tiene su recíproco: dada una función de medias m y C una función simétrica y positiva definida en $T \times T$, existe un proceso gaussiano X que satisface (*)

$$\left(C \text{ se dice positiva definida si } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i z_j C(t_i, t_j) \geq 0, \quad \forall n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T \right. \\ \left. z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R} \right)$$

Simulación del Movimiento Browniano

- Para este proceso, sabemos que $T = [0, \infty)$ y $m(t) = 0, \forall t \geq 0$ y $C(s, t) = \text{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t = \min(s, t), s, t \geq 0$.

- Como B tiene incrementos independientes y estacionarios, podemos simular como en el caso del proceso de Poisson:

Para simular en $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$

- Poner $B_0 = 0$

- Para $1 \leq j \leq n$,

$$B_{t_j} = B_{t_{j-1}} + (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

↑
simulación anterior

↑
II de $B_{t_{j-1}}$ y con distribución $N(0, t_j - t_{j-1})$

$$\Rightarrow B_{t_j} = B_{t_{j-1}} + \sqrt{t_j - t_{j-1}} \underbrace{N(0, 1)}_{\text{rnorm}(1)}$$

Otros procesos gaussianos

Otros procesos gaussianos posiblemente no tengan incrementos independientes %

estacionarios, por lo que su simulación es típicamente más costosa.

La idea es discretizar T , i.e., tomar una cantidad finita de valores de interés en él y simular un vector gaussiano en tales puntos como vimos antes.

• Ejemplo: Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

- A $X = (X_t, t \geq 0)$ un proceso gaussiano en media cero y función de covarianzas

$$C(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = e^{-|s-t|}$$

se le conoce como proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

- Se puede ver que en efecto $C(s, t)$ es una función de covarianzas válida (i.e. es simétrica y pos. def.) mediante la identidad

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2} du, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Sus incrementos son estacionarios pero no independientes:
para $t \geq 0$ y $h > 0$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{t+h} - X_t, X_t) &= \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) - \text{Cov}(X_t, X_t) \\ &= e^{-|t+h-t|} - e^{-|t-t|} \\ &= e^{-h} - 1 \end{aligned}$$

no depende de t pero $e^{-h} - 1 \neq 0$.

- Sin embargo, podemos simular usando la expresión de C .