Capítulos 3.5 y 3.6 (Klebaner)

Lema: Si B un movimiento browniano con $B(0)=0$, entonces $\widehat{B}(t) := -B(t)$, es también un mov. browniano con $\widehat{B}(0)=0$.

Dem: $\widehat{B}$ tiene trayectorias continuas, incrementos independientes y estacionarios, pues B los tiene. Y para $0 \leq s < t$,

$$\widehat{B}(t) - \widehat{B}(s) = -\underbrace{\left(B(t) - B(s)\right)}_{N(0,t-s)} \overset{(d)}{=} N(0, t-s),$$

por la simetría de la distribución normal alrededor de su media. $\square$

• Tiempos de llegada y tiempos de salida

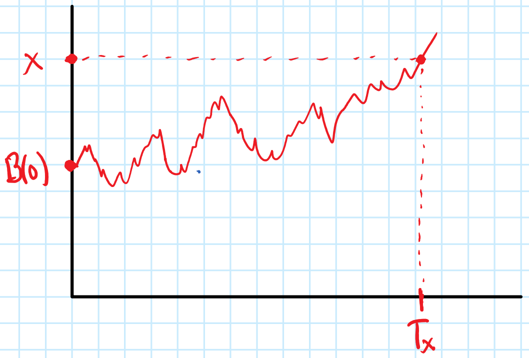
Def: Sean $x, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. El tiempo de llegada a x se define por

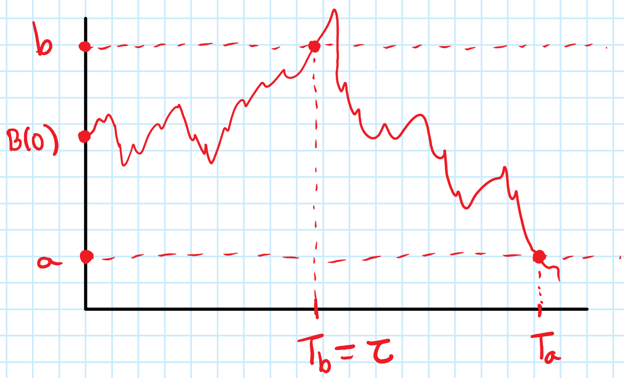
$$T_x = \inf\{t > 0 : B(t) = x\}$$

y el tiempo de salida de (a,b) se define mediante

$$\tau = T_a \wedge T_b$$

si el mov. browniano inicia en un punto dentro de (a,b).





Teorema. Sean $a < x < b$ y $\tau = T_a \wedge T_b$. Entonces

$$\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_x(\tau) < \infty.$$

Dem: Notemos que $\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}_x(\tau > n)$, pues $\{\tau = \infty\} = \bigcap\limits_{n \geq 1} \{\tau > n\}$ y $\{\tau > n\} \supset \{\tau > n+1\}$, $\forall n \geq 1$.

<u>Ideas:</u> ① $\mathbb{P}_x(\tau>1)\le\theta$, con $\theta<1$.

② Separar $\mathbb{P}_x(\tau>n+1)\le\mathbb{P}_x(\tau>n)\,\mathbb{P}_x(\tau>1)$ + inducción

① Notemos que

$$\{\tau>1\}=\{B(s)\in(a,b),\ \forall s\in[0,1]\}\subset\{a<B(1)<b\}$$

Luego,

$$\mathbb{P}_x(\tau>1)\le\mathbb{P}_x(a<\underset{\substack{\uparrow\\ N(x,1)}}{B(1)}<b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-x)^2}{2}}du$$

La función $x\longmapsto\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-x)^2}{2}}du$ es continua en $[a,b]$ y entonces alcanza su máximo en algún $x^*\in[a,b]$. En particular,

$$\mathbb{P}_x(\tau>1)\le\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-x^*)^2}{2}}du<\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-x^*)^2}{2}}du=1$$

Sea $\theta=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-x^*)^2}{2}}du<1$.

② Sea $n\ge1$. Por Propiedad de Markov al tiempo n, el proceso

$$\tilde{B}(s):=B(n+s)-B(n),\ s\ge0$$

es un mov. browniano que inicia en 0 e independiente de $\mathcal{F}_n$. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tau>n+1)&=\mathbb{P}_x(\tau>n,\ B(t)\in(a,b)\ \forall t\in[n,n+1])\\&=\mathbb{P}_x(\tau>n,\ B(n+s)\in(a,b)\ \forall s\in[0,1])\\&=\mathbb{P}_x(\tau>n,\ B(n)+\tilde{B}(s)\in(a,b)\ \forall s\in[0,1])\end{aligned}$$

Condicionamos al valor de $B(n)$ y usamos que $\tilde{B}$ es indep. de $\mathcal{F}_n$ y por lo tanto de $\{\tau>n\}$.

$$=\int^b\mathbb{P}_x(\tau>n,\ B(n)+\tilde{B}(s)\in(a,b)\ \forall s\in[0,1]\ |\ B(n)=y)\,f_{B(n)}(y)\,dy.$$

tanto de $\{\tau > n\}$.

$$= \int_a^b \mathbb{P}_x\left(\tau > n,\ B(n) + \tilde{B}(s) \in (a,b)\ \forall s \in [0,1] \,\middle|\, B(n) = y\right) f_{B(n)}(y)\, dy.$$

$$= \int_a^b \mathbb{P}_x\left(\tau > n,\ y + \tilde{B}(s) \in (a,b)\ \forall s \in [0,1] \,\middle|\, B(n) = y\right) f_{B(n)}(y)\, dy$$

$\{\tau > n\}$ indep de y $\tilde{B}$

$$= \int_a^b \mathbb{P}_x\left(\tau > n \mid B(n) = y\right) \mathbb{P}_x\left(\underbrace{y + \tilde{B}(s)}_{\text{mov. browniano que inicia en } y} \in (a,b)\ \forall s \in [0,1] \,\middle|\, B(n) = y\right) f_{B(n)}(y)\, dy$$

$$\leq \int_a^b \mathbb{P}_x(\tau > n)\ \mathbb{P}_y(\tau > 1)\ f_{B(n)}(y)\, dy$$

$$\leq \mathbb{P}_x(\tau > n) \int_a^b \mathbb{P}_{x^*}(\tau > 1)\ f_{B(n)}(y)\, dy$$

$$= \mathbb{P}_x(\tau > n)\ \underbrace{\mathbb{P}_{x^*}(\tau > 1)}_{\leq \theta}\ \underbrace{\int_a^b f_{B(n)}(y)\, dy}_{\leq 1}$$

$$\leq \theta\, \mathbb{P}_x(\tau > n).$$

Por inducción, $\mathbb{P}_x(\tau > n) \leq \theta^n$, $\forall n \geq 1$ y como $\theta < 1$,

$$\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_x(\tau > n) = 0$$

$$\therefore\ \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1.$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}_x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(\tau > n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n < \infty$$

$\square$

Teorema: $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_a(T_b < \infty) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}_a(T_a < \infty) = 1.$$

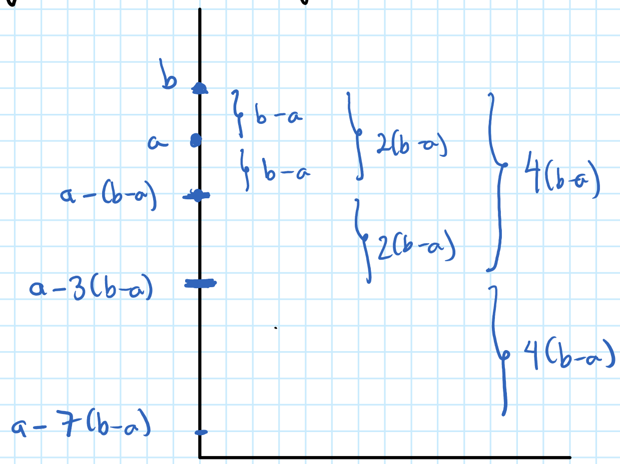
Dem: Del teorema anterior sabemos que si $\tau = T_a \wedge T_b$ entonces

$$\mathbb{P}_{\frac{a+b}{2}}(\tau < \infty) = 1$$

Del lema inicial, por la simetría de B se sigue que

$$\mathbb{P}_{\frac{a+b}{2}}(T_a < T_b) = \mathbb{P}_{\frac{a+b}{2}}(T_b < T_a) = \frac{1}{2} \qquad (*)$$

Spdg supongamos $a < b$ y definamos $A_n := \{T_{a-(2^n-1)(b-a)} < T_b\}$



Consideremos el evento A_n. Para llegar a $a-(2^n-1)(b-a)$ antes que b, necesitamos primero llegar al punto medio $a-(2^{n-1}-1)(b-a)$ y a partir de ahí alcanzar $a-(2^n-1)(b-a)$. Por Propiedad Fuerte de Markov e inductivamente,

$$\mathbb{P}_a(A_n) = \mathbb{P}_a(A_{n-1})\,\mathbb{P}_{\underbrace{a-(2^{n-1}-1)(b-a)}_{\text{punto medio}}}\left(T_{a-(2^n-1)(b-a)} < T_b\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}_a(A_{n-1})$$

$$(*) \quad \vdots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dado que $A_n \subset A_{n-1}$, se sigue que

$$\mathbb{P}_a\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_a(A_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}_a\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right) = 1.$$

y observemos que

$$\omega \in \bigcup_{n\geq 1} A_n^c \quad \text{ssi} \quad \exists n \geq 1 \text{ tal que } T_{a-(2^n-1)(b-a)}(\omega) > T_b(\omega)$$

$\Rightarrow$ en particular $T_b(\omega)<\infty$, i.e., $\omega \in \{T_b<\infty\}$

$\therefore \ \mathbb{P}_a(T_b<\infty) \geq \mathbb{P}_a\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right) = 1$. $\triangleleft$

Para ver que $\mathbb{P}_a(T_a<\infty)=1$, basta tomar $b\neq a$ y usar que T_b es tiempo de paro finito y por la prop. fuerte de Markov y el caso anterior,

$$\mathbb{P}_a(T_a<\infty) = \mathbb{P}_a(T_b<\infty)\,\mathbb{P}_b(T_a<\infty) = 1. \qquad \square$$

- **Ley del máximo del mov. browniano**

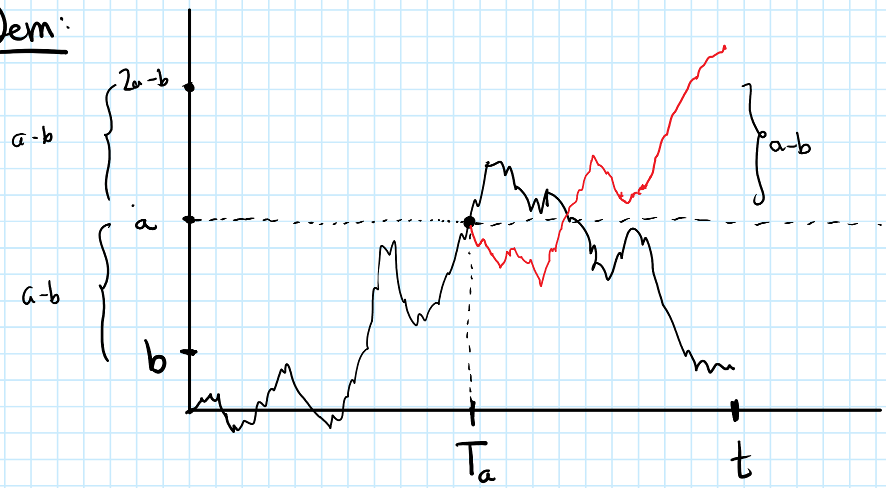
Def: Para $t>0$ definimos el máximo y el mínimo en $[0,t]$ mediante

$$M(t) = \max_{0\leq s\leq t} B(s) \qquad y \qquad m(t) = \min_{0\leq s\leq t} B(s)$$

Teorema. Sean $a\geq 0$ y $b\leq a$. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(M(t)\geq a,\ B(t)\leq b\right) = \mathbb{P}\left(B(t)\geq 2a-b\right)$$

Dem:



Principio de Reflexión

Informalmente: Por dibujo.

Un poco más formal: • T_a es tiempo de paro finito y por P.F. de Markov, $\tilde{B}(s) := B(T_a+s) - B(T_a)$ es un mov. Browniano indep. de $\mathcal{F}_{T_a}$

• Notemos que $M(t) \geq a$ ssi $T_a \leq t$ y entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(t) \geq a,\ B(t) \leq b) &= \mathbb{P}(T_a \leq t,\ B(T_a) + \tilde{B}(t - T_a) \leq b) \\
&= \mathbb{P}(T_a \leq t,\ a + \tilde{B}(t - T_a) \leq b) \\
&= \mathbb{P}(T_a \leq t,\ \tilde{B}(t - T_a) \leq b - a) \\
&\overset{\tilde{B} \overset{(d)}{=} -\tilde{B}}{=} \mathbb{P}(T_a \leq t,\ \tilde{B}(t - T_a) \geq a - b) \\
&= \mathbb{P}(B(t) \geq 2a - b) \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolario:

$$\mathbb{P}(M(t) \geq a) = 2\,\mathbb{P}(B(t) \geq a) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

con Φ la f. de dist. de $N(0,1)$.

Dem:

$$\mathbb{P}(M(t) \geq a) = \mathbb{P}(M(t) \geq a,\ B(t) \geq a) + \mathbb{P}(M(t) \geq a,\ B(t) \leq a)$$

Tomando $b = a$ en Teo. anterior

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(B(t) \geq a) + \mathbb{P}(B(t) \geq 2a - a) \\
&= 2\,\mathbb{P}(B(t) \geq a)
\end{aligned}$$

$B(t) \overset{(d)}{=} \sqrt{t}\, N(0,1)$

$$\begin{aligned}
&= 2\,\mathbb{P}\left(N(0,1) \geq \frac{a}{\sqrt{t}}\right) \\
&= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Comentario: Para la distribución de $m(t)$, podemos usar que B y $-B$ tienen la misma distribución

$$m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} B(s) \overset{(d)}{=} \min_{0 \leq s \leq t} (-B(s)) = -\max_{0 \leq s \leq t} B(s)$$