Proceso de Yule

- Iniciamos con un individuo
- Éste se biparte en un tiempo exponencial de parámetro $\lambda > 0$.
- Cada descendiente se comporta con la misma ley e independientemente de los demás.

↳ Los saltos del estado j al $j+1$ tienen distribución $\text{Exp}(j\lambda)$

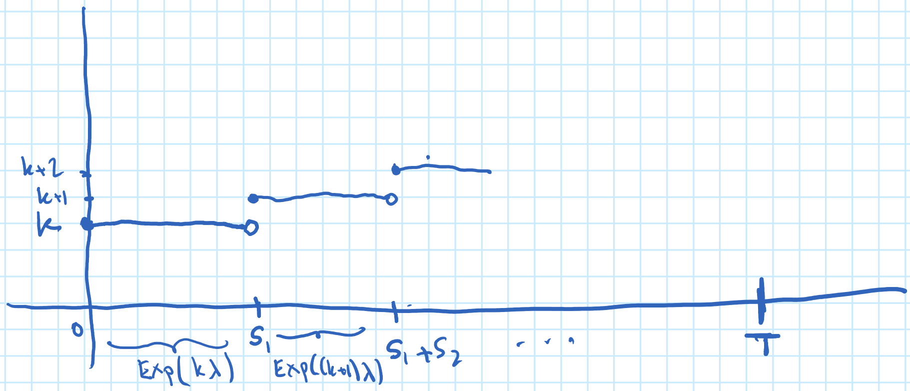
Simulación

1. Fijar punto inicial $k \geq 1$ y el intervalo $[0, T]$ y el parámetro λ para simular
2. Generar los tiempos exponenciales entre saltos: $S_1, S_2, S_3, \ldots$ donde $S_1 + \ldots + S_{m-1} \leq T < S_1 + \ldots + S_m$. Dado el punto inicial k,

$$S_j \sim \text{Exp}(\lambda(k+j-1))$$

3. Graficar los segmentos (abiertos por la derecha)

$$(0, k) \longrightarrow (S_1, k)$$
$$(S_1, k+1) \longrightarrow (S_1 + S_2, k+1)$$
$$\vdots$$
$$(S_1 + \ldots + S_{m-1}, k+m-1) \longrightarrow (T, k+m-1)$$



Observación: Para $n \geq 1$, si τ_n es el tiempo del n-ésimo salto entonces

$$\mathbb{E}_k(\tau_n) = \mathbb{E}_k(S_1 + \ldots + S_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda(k+j-1)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k+j-1} \approx \frac{1}{\lambda} \log(n)$$

- Por ejemplo: si $k=1, \lambda=1$, el valor esperado del tiempo en que el proceso ya dio 1,000,000 saltos es $\approx \log(1{,}000{,}000) \approx 13.81$.

Proceso de Nacimiento

El planteamiento es similar:

- Iniciamos en el estado 1
- El proceso pasa del estado k al $k+1$ a tasa exponencial de parámetro $\alpha_k > 0$.

* Explosión: El proceso salta una cantidad infinita de veces en un tiempo finito con probabilidad 1.

Ejemplo: Supongamos que $\alpha_k = k^2$. Luego,

$$\mathbb{E}_1(\tau_n) = \mathbb{E}_1(S_1 + \dots + S_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} < \frac{\pi^2}{6} \approx 1.64, \quad \forall n \geq 1$$

Para ver formalmente que el proceso explota en este caso, podemos usar el Teo. 2.3.2 de Norris para concluir que $\mathbb{P}_1\left(\sum_{j=1}^{\infty} S_j < \infty\right) = 1$, i.e. ocurren infinitos saltos en tiempo finito con probabilidad 1 (consecuencia de que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} < \infty$)

Teorema 2.1.1 (Norris p. 62) Sea Q una matriz sobre un conjunto finito I. Sea $P(t) = e^{tQ}$, $t \geq 0$. Entonces $(P(t), t \geq 0)$ satisface

(i) $P(s+t) = P(s)P(t)$, $\forall s, t \geq 0$.

(ii) $(P(t), t \geq 0)$ es la única solución a la ecuación forward:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) Q, \quad P(0) = I$$

(iii) $(P(t), t \geq 0)$ es la única solución a la ecuación backward:

$$\frac{d}{dt} P(t) = Q P(t), \quad P(0) = I.$$

iv) Para $k \geq 0$ se tiene que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \Big|_{t=0} P(t) = Q^k.$$

Dem: **Nota** Para hablar de $e^{tQ} = \sum_{k \geq 0}^{\infty} \frac{(tQ)^k}{k!}$, se necesita definir un sentido de convergencia de matrices. Para ello se trabaja en el espacio de matrices de $|I|\times|I|$ real valuadas con la norma

$$|Q| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Qv|}{\|v\|}$$

- En este espacio, decimos que $Q_n \to Q$ si $|Q_n - Q| \to 0$, $n\to\infty$
- Este espacio es completo
- Resultado: (p. 105 Norris) Si $E(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^k}{k!}$, entonces existe una matriz E sobre I tal que $E(n) \to E$ y a E se le denota por $E = e^Q$. Además, la serie de potencias de matrices

$$t \longmapsto e^{tQ}$$

tiene infinito radio de convergencia. $\dashv$

(i)

$$P(s+t) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \frac{[(s+t)Q]^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{s^j t^{k-j}}{k!} Q^j Q^{k-j}$$

$$= \sum_{k\geq 0}^{\infty}\sum_{j\geq 0}^{k} \frac{(sQ)^j}{j!} \frac{(tQ)^{k-j}}{(k-j)!}$$

$0\leq j\leq k$

$\Updownarrow$

$j\geq 0,\ k\geq j$

$$= \sum_{j\geq 0}^{\infty}\sum_{k\geq j}^{\infty} \frac{(sQ)^j}{j!} \frac{(tQ)^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= \sum_{j\geq 0}^{\infty} \frac{(sQ)^j}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(tQ)^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= e^{sQ} e^{tQ}$$

$$= P(s)P(t)$$