Ayudantía 29/01

Teorema 3.4.3 (Norris, p.116) Sea $(X_t, t\geq 0)$ una cadena de Markov a tiempo continuo y $h>0$ fijo. Definimos $Z_n = X_{nh}$, $n\geq 0$.

(i) Si i es recurrente para X, entonces lo es para Z.

(ii) Si i es transitorio para X, entonces lo es para Z.

Nota: $Z=(Z_n, n\geq 0)$ es en efecto una CM discreta con mismo espacio de estados y transiciones

$$\tilde{P}_{ij} := \mathbb{P}(Z_{n+1}=j \mid Z_n = i) = \mathbb{P}(X_{(n+1)h} = j \mid X_{nh}=i) = P_{ij}(h)$$

(i) Supongamos que i es recurrente. Si i es absorbente para X, entonces c.p. 1 $X_t = i$, $\forall t\geq 0$ y en particular $X_{nh}=i$, $\forall n\geq 0$, por lo que

$$\mathbb{P}_i(Z_n = i \text{ para infinitos } n) = 1$$

$$\Rightarrow i \text{ es recurrente para } Z.$$

Si i no es absorbente entonces $q_i>0$ y por el último resultado de dicotomía (visto en clase 27/01) tenemos que i es recurrente para X ssi

$$\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \infty$$

Del curso anterior sabemos que i es recurrente $\overset{\text{para } Z}{}$ si $\sum_{n\geq 0} \tilde{P}_{ii}^{(n)} = \infty$. Para cada $n\geq 0$ y cada t en el intervalo $nh\leq t < (n+1)h$ tenemos la estimación:

$$P_{ii}((n+1)h) = \mathbb{P}_i(X_{(n+1)h}=i) \geq \mathbb{P}_i(X_t = i, X_{(n+1)h}=i)$$

prop. de Markov

$$= \mathbb{P}_i(X_t=i)\,\mathbb{P}_i(X_{(n+1)h-t}=i)$$

$$\geq P_{ii}(t)\,\mathbb{P}_i(\underset{\text{primer salto}}{\tau_0} > (n+1)h - t)$$

$$\geq P_{ii}(t)\,\mathbb{P}_i(\tau_0 > h)$$

$$= P_{ii}(t)\,e^{-q_i h}$$

Luego,

$$\infty = \int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \sum_{n\geq 0}\int_{nh}^{(n+1)h} P_{ii}(t)\,dt \leq \sum_{n\geq 0}\int_{nh}^{(n+1)h} e^{q_i h} P_{ii}((n+1)h)\,dt = \sum_{n\geq 0} h e^{q_i h} P_{ii}((n+1)h)$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0}^{\infty} \tilde{P}_{ii}^{(n)} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} P_{ii}(nh) = \infty$ y por lo tanto i es recurrente para Z. //

(ii) Recordemos que i es transitorio para X si

$$\mathbb{P}_i(\{t : X_t = i\} \text{ es acotado}) = 1$$

e i es transitorio para Z si $\mathbb{P}_i(Z_n = i$ para infinitas $n) = 0$, y como

$$\{Z_n = i \text{ para infinitas } n\} = \{X_{nh} = i \text{ para infinitas } n\} \subset \{t : X_t = i \text{ es no acotado}\}$$

y este último tiene probabilidad cero. $\therefore$ i es transitorio para Z. $\square$

Ejemplos de probabilidades y tiempos esperados de llegada.

Ejemplo 1. Considera la cadena $(X_t, t\geq 0)$ con $E = \{1,2,3,4\}$ y Q-matriz

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/6 & 0 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula: a) $\mathbb{P}_1(D_3 < \infty)$ b) $\mathbb{E}_1(D_4)$.

a) Denotamos

$$h_i = \mathbb{P}_i(D_3 < \infty)$$

Queremos encontrar h_1. Sabemos $h_4 = 0$, pues 4 es absorbente y $h_3 = 1$. Por otro lado, para $i \neq 3$ sabemos que

$$\sum_{j\in E} Q_{ij} h_j = 0$$

Con $i=1$, $\quad -h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2} = 0$

Con $i=2$, $\quad \frac{1}{4}h_1 - \frac{1}{2}h_2 = 0$

$$-\frac{3}{4}h_1 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) Sea

$$k_i = \mathbb{E}_i(D_4) \quad , i\in E$$

Sabemos que $k_4 = 0$ y como $q_i > 0$ $\forall i \neq 4$ entonces los k_i satisfacen

$$-\sum_{j\in E} Q_{ij} k_j = 1 \quad , \; i \neq 4$$

- Con $i=1$: $\quad k_1 - \frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{2}k_3 = 1$

- Con $i=2$: $\quad -\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{2}k_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}k_2 = -\frac{1}{4}k_1 - 1$

- Con $i=3$: $\quad -\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{k_3 = 3 + \frac{1}{2}k_1}_{\text{Sustituyendo en } i=1:}$

$$k_1 - \frac{1}{4}k_1 - 1 - \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{2}k_1\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k_1 = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k_1 = 7 \; //}$$

Ejemplo 2. Sean $N \geq 1$, $\lambda, \mu > 0$ y $E = \{0, 1, \ldots, N\}$. Sea X una CMTC con Q-matriz

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & \mu & -\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i+1, \; 1 \leq i \leq N-1 \\ \mu, & j = i-1, \; 1 \leq i \leq N \\ -(\lambda+\mu), & j = i, \; 1 \leq i \leq N-1 \\ 0, & j = i = 0 \\ -\mu, & j = i = N \end{cases}$$

a) Encontrar la probabilidad de llegar a N iniciando de $i \in E$.

- $h_N = 1$, $h_0 = 0$

- Para $1 \leq i \leq N-1$, sabemos que $\sum_{j\in E} Q_{ij} h_j = 0$

$$\Rightarrow \mu h_{i-1} - (\lambda+\mu) h_i + \lambda h_{i+1} = 0 \qquad (1)$$

- De (1), si $1 \leq i \leq N-1$,

$$\lambda (h_{i+1} - h_i) = \mu (h_i - h_{i-1})$$

$$\Rightarrow \quad h_{i+1} - h_i = \frac{\mu}{\lambda}(h_i - h_{i-1})$$

$$\Rightarrow h_{i+1} - h_i = \frac{\mu}{\lambda}(h_i - h_{i-1})$$

$$\Rightarrow h_{i+1} - h_i = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i (h_1 - \underbrace{h_0}_{0}) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i h_1 \quad , \quad 0 \le i \le N-1 \qquad (2)$$

- Sumando (2) para $i=0,\dots,j-1$, $1 \le j \le N$,

$$h_j = h_j - h_0 = h_1 \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i \qquad (3)$$

En particular, para $j=N$

$$1 = h_N = h_1 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i = h_1 \times \begin{cases} N, & \text{si } \lambda = \mu \\ \dfrac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^N - 1}{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) - 1}, & \text{si } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

$\therefore$ En el caso $\underline{\mu = \lambda}$, $h_1 = \frac{1}{N}$ y de (3)

$$h_j = h_1 \sum_{i=0}^{j-1} 1^i = \frac{j}{N} \quad , \quad 0 \le j \le N.$$

$\therefore$ En el caso $\underline{\mu \neq \lambda}$, $h_1 = \dfrac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) - 1}{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^N - 1}$ y de (3)

$$h_j = h_1 \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) - 1}{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^N - 1} \cdot \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j - 1}{\frac{\mu}{\lambda} - 1} = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j - 1}{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^N - 1},$$

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^j - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \qquad 0 \le j \le N.$$

<u>Observación</u>: Note que esto coincide con la caminata simple discreta con proba $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = p$ de dar un paso hacia arriba $(+1)$ y $\frac{\mu}{\lambda+\mu} = q$ de dar uno hacia abajo (-1).

b) <u>Encuentra el tiempo de absorción en 0 iniciando en 1.</u>

- $k_0 = 0$
- Si $1 \le i \le N$ sí se cumple que $q_i > 0$

$$\Rightarrow -\sum_j Q_{ij} k_j = 1$$

$$\Rightarrow \; -\sum_{j\in E} Q_{ij}\,k_j = 1.$$

$$\Rightarrow \quad 1\le i\le N-1 \;: \quad -\mu k_{i-1} + (\lambda+\mu)k_i - \lambda k_{i+1} = 1 \qquad (*)$$

$$i = N \;: \quad -\mu k_{N-1} + \mu k_N = 1 \qquad (**)$$

<u>Afirmación</u>: Para $1\le i\le N-1$

$$k_{i+1} - k_i = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i k_1 - \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j$$

Por inducción:

- Si $i=1$, de $(*)$ y $k_0=0$ tenemos

$$-\cancel{\mu k_0}^{0} + (\lambda+\mu)k_1 - \lambda k_2 = 1 \;\Rightarrow\; \mu k_1 - 1 = \lambda(k_2 - k_1)$$

$$\Rightarrow k_2 - k_1 = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)k_1 - \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)k_1 - \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j \;\checkmark$$

- Supongamos cierto para algún i entre 1 y $N-2$. Luego, usando $(*)$ con $i+1$,

$$-\mu k_i + (\lambda+\mu)k_{i+1} - \lambda k_{i+2} = 1$$

$$\Rightarrow \mu(k_{i+1} - k_i) - 1 = \lambda(k_{i+2} - k_{i+1})$$

$$\Rightarrow k_{i+2} - k_{i+1} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)(k_{i+1} - k_i) - \frac{1}{\lambda}$$

$$\overset{\text{hip. de ind.}}{=} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\left[\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i k_1 - \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j\right] - \frac{1}{\lambda}$$

$$= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i+1} k_1 - \frac{1}{\mu}\sum_{j=2}^{i+1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j - \frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^1$$

$$= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i+1} k_1 - \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{i+1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j$$

Esto prueba la afirmación //

Usando la afirmación con $i=N-1$ y $(**)$, tenemos:

$(**)$: $\quad -\mu k_{N-1} + \mu k_N = 1 \;\Rightarrow\; k_N - k_{N-1} = \dfrac{1}{\mu}$

(Af): $\quad k_N - k_{N-1} = \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{N-1} k_1 - \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\sum_{j=1}^{N-1}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^j$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{N-1} k_1 = \frac{1}{\mu}\left[1+\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}\right] = \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}$$

$$\Rightarrow \quad k_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N-1}\frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{N}{\lambda}, & \text{si } \lambda=\mu \\[2ex] \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N-1}\cdot\dfrac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{N}-1}{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)-1} = \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N}}{\lambda}\cdot\dfrac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{N}-1}{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)-1} \\[2ex] \qquad = \dfrac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N}}{\mu-\lambda}, & \mu\neq\lambda. \end{cases}$$

Obs: Usando la Afirmación y el valor de k_1, podemos obtener k_j, $2\le j\le N$.