Ayudantía 12 de febrero

Cadena Subordinada

Sea $Y = (Y_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov discreta sobre un espacio E con matriz de transición $\Pi = (\Pi_{x,y})_{x,y \in E}$, y sea $N = (N(t), t \geq 0)$ un proceso de Poisson independiente y de parámetro $\lambda > 0$.
Definamos

$$X_t = Y_{N(t)}, \quad t \geq 0$$

i.e., $X_t = Y_n$ si $T_n \leq t < T_{n+1}$, con $0 := T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$ son los tiempos de llegada de N. (Nota: no supondremos que $\Pi_{x,x} = 0$)

a) Probar que X es un proceso de Markov de salto puro.

(1) Nota: Es claro que si $x_0 \in E$ es absorbente para Y entonces $X_t = x_0 \ \forall t \geq 0$ si $Y_0 = x_0$.
$\Rightarrow q_{x_0} = 0$

Consideremos $x_0 \in E$ no absorbente para Y. Sea $\tau_0 := \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\}$. Notemos que

$$\mathbb{P}_{x_0}(\tau_0 > t) = \mathbb{P}_{x_0}(X_s = x_0, \forall s \in [0,t]) = \mathbb{P}_{x_0}(Y_{N(s)} = x_0, \forall s \in [0,t])$$

$$= \sum_{k \geq 0}^{\infty} \mathbb{P}_{x_0}(Y_{N(s)} = x_0, \forall s \in [0,t] \mid N(t) = k)\, \mathbb{P}(N(t) = k)$$

$$= \mathbb{P}(N(t) = 0) + \sum_{k \geq 1}^{\infty} \mathbb{P}_{x_0}(Y_j = x_0, \forall j \in \{1,2,\ldots,k\} \mid N(t) = k)\, \mathbb{P}(N(t) = k)$$

por indep.

$$= e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_{x_0}(Y_j = x_0, \forall j \in \{1,2,\ldots,k\})\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda t} + \sum_{k \geq 1}^{\infty} \Pi_{x_0,x_0}^{k}\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k \geq 0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t \Pi_{x_0,x_0})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda t} e^{\lambda t \Pi_{x_0,x_0}}$$

$$= e^{-\lambda (1 - \Pi_{x_0,x_0}) t}$$

Como $\Pi_{x_0,x_0} < 1$, entonces $\lambda(1 - \Pi_{x_0,x_0}) > 0$ y por lo tanto $\tau_0 \sim Exp(\lambda(1 - \Pi_{x_0,x_0}))$ bajo $\mathbb{P}_{x_0}$.

(2) Sea ahora x no absorbente y $y \neq x$. Consideremos $\mathbb{P}_x(X_{\tau_0} = y)$.

Necesariamente τ_0 es alguno de $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Por proba total,

$$\tilde{\Pi}_{xy} := \mathbb{P}_x(X_{\tau_0} = y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_{\tau_0} = y, \tau_0 = T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_{T_k} = y, Y_1 = x, Y_2 = x, \ldots, Y_{k-1} = x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(Y_k = y, Y_1 = x, \ldots, Y_{k-1} = x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{x,x}^{k-1} \Pi_{xy}$$

$$= \Pi_{x,y} \cdot \frac{1}{1 - \Pi_{x,x}}$$

$$= \frac{\Pi_{x,y}}{1 - \Pi_{x,x}}$$

Notemos que $(\tilde{\Pi}_{x,y}, y \neq x)$ es una distribución de proba: $\sum_{y \neq x} \tilde{\Pi}_{x,y} = \frac{1}{1 - \Pi_{x,x}} \sum_{y \neq x} \Pi_{x,y} = 1$.
($\tilde{\Pi}$ será la matriz de saltos de X).

F) Falta ver que X satisface la prop. de Markov. Primero calculamos para $x, y \in E$

$$\mathbb{P}_x(X_t = y) = \mathbb{P}_x(Y_{N(t)} = y) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(Y_{N(t)} = y \mid N(t) = r)\, \mathbb{P}(N(t) = r)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(Y_r = y \mid N(t) = r)\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!}$$

$$\overset{\text{indep.}}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(Y_r = y)\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \Pi_{x,y}^{(r)}\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \quad \text{- - - - - - - - - -} \quad (*)$$

La prop. de Markov es equivalente a probar que $\forall \mu$ distribución inicial

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n) = \mu(x_0)\, \mathbb{P}_{x_0}(X_{t_1} = x_1)\, \mathbb{P}_{x_1}(X_{t_2 - t_1} = x_2) \cdots \mathbb{P}_{x_{n-1}}(X_{t_n - t_{n-1}} = x_n)$$

$\forall\, x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Notemos que

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n) = \mathbb{P}(Y_0 = x_0, Y_{N(t_1)} = x_1, \ldots, Y_{N(t_n)} = x_n)$$

$$= \sum_{\substack{r_i \geq 0 \\ i = 1, \ldots, n}} \mathbb{P}\big(Y_0 = x_0, Y_{N(t_1)} = x_1, \ldots, Y_{N(t_n)} = x_n, N(t_1) = r_1, N(t_2) - N(t_1) = r_2, \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = r_n\big)$$

$$= \sum \mathbb{P}(Y_0 = x_0, Y_{r_1} = x_1, \ldots, Y_{r_1 + \cdots + r_n} = x_n, N(t_1) = r_1, \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = r_n)$$

$$= \sum \mathbb{P}(Y_0 = x_0, Y_{r_1} = x_1, \dots, Y_{r_1+\dots+r_n} = x_n, N(t_1) = r_1, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = r_n)$$

$$\overset{\text{indep.}}{=} \sum \mathbb{P}(Y_1 = x_0, \dots, Y_{r_1+\dots+r_n} = x_n)\, \mathbb{P}(N(t_1) = r_1, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = r_n)$$

$$= \sum \mu(x_0)\, \Pi^{(r_1)}_{x_0,x_1} \Pi^{(r_2)}_{x_1,x_2} \cdots \Pi^{(r_n)}_{x_{n-1},x_n}\, e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{r_1}}{r_1!} \cdots e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \frac{[\lambda(t_n - t_{n-1})]^{r_n}}{r_n!}$$

$$= \mu(x_0) \left(\sum_{r_1 \geq 0} \Pi^{(r_1)}_{x_0,x_1} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{r_1}}{r_1!} \right) \cdots \left(\sum_{r_n \geq 0} \Pi^{(r_n)}_{x_{n-1},x_n} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \frac{[\lambda(t_n - t_{n-1})]^{r_n}}{r_n!} \right)$$

$$\overset{(\bigstar)}{=} \mu(x_0)\, \mathbb{P}_{x_0}(X_{t_1} = x_1) \cdots \mathbb{P}_{x_{n-1}}(X_{t_n - t_{n-1}} = x_n)$$

$\therefore$ X satisface la prop. de Markov. //

b) Prueba que la Q-matriz de X se puede escribir como $Q = \lambda(\Pi - I)$, con I la matriz identidad en E.

Dem: Sabemos de a) que $Q_{x,x} = -q_x = -\lambda(1 - \pi_{x,x}) = \lambda(\pi_{x,x} - 1)$. Si $y \neq x$,

$$Q_{x,y} = q_x \tilde{\pi}_{x,y} = \lambda(1 - \pi_{x,x}) \frac{\pi_{x,y}}{1 - \pi_{x,x}} = \lambda \pi_{x,y}. \quad \therefore\ Q = \lambda(\Pi - I).$$

c) Probar directamente que

$$P_{x,y}(t) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \pi^{(n)}_{x,y} = \mathbb{E}\left[\Pi^{(N(t))}_{x,y} \right]$$

Dem: La primera igualdad es $(\bigstar)$. La segunda es consecuencia de que $N(t) \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$. $\square$

d) Sea $\gamma = (\gamma_x, x \in E)$ un vector de probabilidad. Mostrar que γ es invariante para Q ssi lo es para Π.

Dem: Notemos que $\gamma Q = 0$ ssi $\gamma(\lambda(\Pi - I)) = 0 \overset{\lambda > 0}{\text{ssi}} \gamma(\Pi - I) = 0$ ssi $\gamma \Pi = \gamma$ $\square$

e) Si γ es vector de probabilidad invariante para Q, entonces $\gamma P(t) = \gamma$, $\forall t \geq 0$.

Dem: Consideremos la entrada y de $\gamma P(t)$. Ésta es

$$\sum_{z \in E} \gamma_z P_{z,y}(t) \underset{c)}{=} \sum_{z \in E} \sum_{n \geq 0}^{\infty} \gamma_z e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \Pi^{(n)}_{z,y} \underset{\text{Tonelli}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \underbrace{\sum_{z \in E} \gamma_z \Pi^{(n)}_{z,y}}_{\substack{\text{La entrada } y \text{ del} \\ \text{producto } \gamma \Pi^n}}$$

, sabemos γ inv. para $Q \Rightarrow \gamma$ inv. para Π

$$\sum^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n \quad \sum^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n$$

producto $\gamma \Pi$, sabemos γ inv. para $Q \Rightarrow \gamma$ inv. para Π

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \gamma_y = \gamma_y \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \gamma_y$$

$$\Rightarrow \gamma P(t) = \gamma, \ \forall t \geq 0.$$

$\square$

f) Suponga que Y es irreducible, aperiódica y positivo recurrente. Demostrar que Q tiene una única dist. de probabilidad invariante $\tilde{\gamma}$ y que

$$\lim_{t\to\infty} P_{x,y}(t) = \tilde{\gamma}_y.$$

Dem: Del curso anterior, Y irreducible y positivo recurrente $\Rightarrow \exists !$ dist. invariante $\tilde{\gamma}$ para Π. Del inciso (d), $\tilde{\gamma}$ es la única dist. invariante para Q.

Sean $x, y \in E$. Notemos que la función $g_{x,y} : \mathbb{Z}_+ \to [0,1]$ dada por

$$g_{x,y}(n) = \Pi_{x,y}^{(n)}$$

es acotada y del caso discreto (por aperiodicidad),

$$\lim_{n\to\infty} g_{x,y}(n) = \lim_{n\to\infty} \Pi_{x,y}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(Y_n = y) = \tilde{\gamma}_y$$

De c),

$$P_{x,y}(t) = \mathbb{E}\left[\Pi_{x,y}^{(N(t))} \right] = \mathbb{E}\left(g_{x,y}(\underset{\sim}{N(t)}) \right)$$

Como $g_{x,y}$ es acotada, $N(t) \in \mathbb{Z}_+$ $\forall t \geq 0$ y $N(t) \to \infty$, $t \to \infty$ c.s., del Teorema de Convergencia Dominada tenemos

$$\lim_{t\to\infty} P_{x,y}(t) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[g_{x,y}(N(t)) \right] = \mathbb{E}\left[\lim_{t\to\infty} g_{x,y}(N(t)) \right] = \mathbb{E}\left(\tilde{\gamma}_y \right)$$

$$= \tilde{\gamma}_y.$$

$\square$