

Problemas del Ross (p. 407)

4. Clientes potenciales llegan a una estación con un solo servidor de acuerdo a un PP(λ). Sin embargo, si a la llegada un cliente ve que ya hay n clientes en el servidor, entonces entra con probabilidad α_n . Si el tiempo de atención individual es $\text{Exp}(\mu)$.

- Modelar esto con una CMTC.

$X(t)$: número de clientes en el servidor al tiempo t

$$E = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Q-matriz:

$$Q_{n,n+1} = \alpha_n \lambda, \quad n \geq 0$$

$$Q_{n,n-1} = \mu, \quad n \geq 1$$

$$Q_{0,0} = -\alpha_0 \lambda$$

$$Q_{n,n} = -(\alpha_n \lambda + \mu), \quad n \geq 1$$

- Da un ejemplo de $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ tal que X tiene dist. estacionaria.

A) Ser X una cadena de nacimiento y muerte, sabemos que X tiene dist. estacionariassi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_{0,1} \cdots Q_{k,k}}{Q_{1,0} \cdots Q_{k,k-1}} < \infty$$

En este caso, los términos de la serie tienen la forma

$$\frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1} \lambda^k}{\mu^k}$$

• Opciones: $\alpha_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{k-1}$, $\frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1} \lambda^k}{\mu^k} = \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{k-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \leq \left(\frac{1}{2} \right)^k$

$$\alpha'_k = \frac{1}{k+1}, \quad \frac{\alpha_0 \cdots \alpha_{k-1} \lambda^k}{\mu^k} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}{k!} \xrightarrow{\text{asym}} e^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

11. Consideremos $X = (X(t), t \geq 0)$ un proceso de Yule con $X(0) = 1$ y de parámetro λ . Para $i \geq 1$, sea T_i el tiempo que le toma a X pasar de i a $i+1$.

- Argumenta que $T_i \sim \text{Exp}(\lambda i)$

Cuando hay i individuos el próximo evento de división ocurre en el mínimo de i tiempos exponenciales indep. de parámetro λ .

- Sean X_1, \dots, X_j v.a.i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$. Demuestra que

$$\max(X_1, \dots, X_j) \stackrel{(d)}{=} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j,$$

Donde $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j$ son v.a.i con $\varepsilon_k \sim \text{Exp}(\lambda k)$.

Basta ver que las transformadas de Laplace coinciden.

$$\textcircled{1} \quad P(\max(x_1, \dots, x_j) \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^j$$

$\Rightarrow \max(x_1, \dots, x_j)$ tiene densidad $f(t) = \lambda j e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1}$, $t \geq 0$.

\textcircled{2} La transformada de Laplace de $\max(x_1, \dots, x_j)$ es

$$E(e^{-s \max(x_1, \dots, x_j)}) = \int_0^\infty e^{-st} \lambda j e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} dt$$

$$= j \int_0^\infty \lambda e^{-(s+\lambda)t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} dt$$

$$\begin{cases} u = 1 - e^{-\lambda t} \\ du = \lambda e^{-\lambda t} dt \\ e^{-\lambda t} = 1 - u \\ e^{-st} = (1-u)^{s/\lambda} \end{cases}$$

$$= j \int_0^1 (1-u)^{s/\lambda} u^{j-1} du$$

$$= j B(j, \frac{s}{\lambda} + 1)$$

(B es la función beta)

$$= j \frac{\Gamma(j) \Gamma(\frac{s}{\lambda} + 1)}{\Gamma(j+1 + \frac{s}{\lambda})} \quad (\Gamma(z+1) = z \Gamma(z))$$

$$= j! \frac{\Gamma(\frac{s}{\lambda} + 1)}{(\frac{s}{\lambda} + j)(\frac{s}{\lambda} + j-1) \cdots (\frac{s}{\lambda} + 1) \Gamma(\frac{s}{\lambda} + 1)}$$

$$= \frac{j!}{(\frac{s+\lambda j}{\lambda}) \cdots (\frac{s+\lambda}{\lambda})}$$

$$= \frac{j! \lambda^j}{(\lambda+s)(2\lambda+s) \cdots (j\lambda+s)}$$

\textcircled{3} La transformada de Laplace de $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j$ es:

$$E(e^{-s(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j)}) = \prod_{k=1}^j E(e^{-s\varepsilon_k}) = \prod_{k=1}^j \left(\frac{\lambda k}{\lambda k + s} \right) = \frac{\lambda^j j!}{(\lambda+s)(2\lambda+s) \cdots (j\lambda+s)}$$

indep.

$$\therefore \max(x_1, \dots, x_j) \stackrel{d}{=} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j.$$

- Demuestra que $P(T_1 + \dots + T_j \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^j$.

$$P(T_1 + \dots + T_j \leq t) = P(\max(X_1, \dots, X_j) \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^j$$

□

- Concluye que $P_{1,j}(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1}$

$$\begin{aligned} P_{1,j}(t) &= P(T_1 + \dots + T_j \leq t, T_1 + \dots + T_j > t) = P(T_1 + \dots + T_j \leq t) - P(T_1 + \dots + T_j \leq t) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} - (1 - e^{-\lambda t})^j \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} (1 - (1 - e^{-\lambda t})) \\ &= e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1}. \end{aligned}$$

Obs: Con $X(0)=1$, $X(t) \sim \text{Geo}(e^{-\lambda t})$ y entonces si $X(0)=i$, $X(t) \sim \text{BN}(i, e^{-\lambda t})$

17. Cada vez que una máquina es reparada funciona durante un tiempo exponencial de parámetro λ . Luego falla y puede tener una falla de tipo 1 o tipo 2 con probabilidades p y $1-p$ respectivamente. Los tiempos de reparación tienen tasa μ_1 y μ_2 , respectivamente.

- ¿Qué proporción del tiempo funciona la máquina?

$X(t)$: estado de la máquina al tiempo t .

$$E = \{0, 1, 2\}, \quad 0 = \text{funciona}, \quad 1, 2 = \text{falla tipo 1 ó 2, resp.}$$

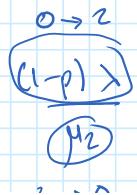
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & p\lambda & (1-p)\lambda \\ 2 & \mu_1 & -\mu_1 & 0 \\ & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

Recordemos que una dist. estacionaria no dice la proporción de tiempo que X pasa en cada estado.

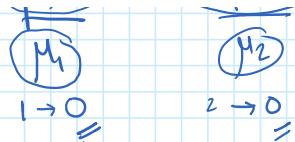
$$\pi Q = 0 \iff \begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu_1 \pi_1 + \mu_2 \pi_2 = 0 \\ p\lambda \pi_0 - \mu_1 \pi_1 = 0 \rightarrow \pi_1 = \frac{p\lambda}{\mu_1} \pi_0 \\ (1-p)\lambda \pi_0 - \mu_2 \pi_2 = 0 \rightarrow \pi_2 = \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2} \pi_0 \end{cases}$$

De la condición $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_0 \left(1 + \frac{p\lambda}{\mu_1} + \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2} \right) &= 1 \\ \therefore \pi_0 &= \frac{1}{1 + \frac{p\lambda}{\mu_1} + \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}} \end{aligned}$$



$$\therefore \Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{p\lambda}{\mu_1} + \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}}$$



- Haga el cálculo con $\lambda = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 8$.

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}} = \frac{48}{48+2+1} = \frac{48}{51} = \frac{16}{17}$$

- Comentario: Al tiempo t , X está en funcionamiento:

La proporción de tiempo en $[0, t]$ que X funciona:

$$\int_0^t 1_{\{X_s > 0\}} ds$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s > 0\}} ds$$

$$P\left(\frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s > 0\}} ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Pi_0\right) = 1$$

24. Considera una estación de taxis donde llegan taxis y clientes de acuerdo a procesos de Poisson de parámetros 1 y 2 por minuto. Un taxi se queda en la estación sin importar que haya más pero un cliente que llega y no ve taxis se va y no regresa.

¿Cuál es la proporción de clientes que sí abordan un taxi?

$X(t)$: número de taxis en la estación al tiempo t

$$E = \{0, 1, 2, \dots\}$$

X es cadena de nacimiento y muerte con $Q_{n,n+1} = 1$, $Q_{n,n-1} = 2$, $n \geq 1$.

Dado que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_{01} \cdots Q_{k-1,k}}{Q_{10} \cdots Q_{k-1,k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k < \infty$$

entonces X tiene una única dist. estacionaria Π , de hecho

$$\Pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{y } \Pi_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, k \geq 0.$$

Notemos que un cliente no aborda taxi si X está en el estado 0 y como la proporción de tiempo que no hay taxis es $\Pi_0 = \frac{1}{2}$, la proporción de clientes que sí abordan un taxi es $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.