Problemas del Ross (p. 407)

4. Clientes potenciales llegan a una estación con un solo servidor de acuerdo a un $PP(\lambda)$. Sin embargo, si a la llegada un cliente ve que ya hay n clientes en el servidor, entonces entra con probabilidad α_n. Si el tiempo de atención individual es $\text{Exp}(\mu)$.

- Modelar esto con una CMTC.

$X(t)$: número de clientes en el servidor al tiempo t

$E = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Q-matriz:
$$Q_{n,n+1} = \alpha_n \lambda \quad , \quad n \geq 0$$
$$Q_{n,n-1} = \mu \quad , \quad n \geq 1$$
$$Q_{0,0} = -\alpha_0 \lambda$$
$$Q_{n,n} = -(\alpha_n \lambda + \mu) \ , \quad n \geq 1$$

- Da un ejemplo de $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ tal que X tiene dist. estacionaria.

Al ser X una cadena de nacimiento y muerte, sabemos que X tiene dist. estacionaria ssi
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_{0,1} \cdots Q_{k-1,k}}{Q_{1,0} \cdots Q_{k,k-1}} < \infty$$

En este caso, los términos de la serie tienen la forma
$$\frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1} \lambda^k}{\mu^k}$$

- Opciones: $\alpha_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda} \wedge 1\right)$, $\quad \frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1} \lambda^k}{\mu^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda} \wedge 1\right)^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\alpha_k = \frac{1}{k+1}$, $\quad \frac{\alpha_0 \cdots \alpha_{k-1} \lambda^k}{\mu^k} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \xrightarrow[\text{serie}]{} e^{\frac{\lambda}{\mu}}$

11. Consideremos $X = (X(t), t \geq 0)$ un proceso de Yule con $X(0) = 1$ y de parámetro λ. Para $i \geq 1$, sea T_i el tiempo que le toma a X pasar de i a $i+1$.

- Argumenta que $T_i \sim \text{Exp}(\lambda i)$

Cuando hay i individuos el próximo evento de división ocurre en el mínimo de i tiempos exponenciales indep. de parámetro λ.

- Sean $X_1, \ldots, X_j$ v.a.i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$. Demuestra que
$$\max(X_1, \ldots, X_j) \overset{(d)}{=} \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_j,$$

donde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j$ son v.a.i con $\varepsilon_k \sim Exp(\lambda k)$.

Basta ver que las transformadas de Laplace coinciden.

① $\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_j) \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^j$

$\Rightarrow \max(X_1, \ldots, X_j)$ tiene densidad $f(t) = \lambda j \, e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1}$, $t \geq 0$.

② La transformada de Laplace de $\max(X_1, \ldots, X_j)$ es

$$\mathbb{E}\left(e^{-s \max(X_1, \ldots, X_j)}\right) = \int_0^\infty e^{-st} \lambda j \, e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} \, dt$$

$$= j \int_0^\infty \lambda \, e^{-(s+\lambda)t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} \, dt$$

$u = 1 - e^{-\lambda t}$

$du = \lambda e^{-\lambda t} dt$

$e^{-\lambda t} = 1 - u$

$e^{-st} = (1-u)^{s/\lambda}$

$$= j \int_0^1 (1-u)^{s/\lambda} u^{j-1} \, du$$

$$= j \, B\left(j, \frac{s}{\lambda} + 1\right)$$

(B es la función beta)

$$= j \, \frac{\Gamma(j) \Gamma\left(\frac{s}{\lambda} + 1\right)}{\Gamma\left(j + 1 + \frac{s}{\lambda}\right)}$$

$(\Gamma(z+1) = z\Gamma(z))$

$$= j! \, \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{s}{\lambda} + 1\right)}}{\left(\frac{s}{\lambda} + j\right)\left(\frac{s}{\lambda} + j - 1\right) \cdots \left(\frac{s}{\lambda} + 1\right) \cancel{\Gamma\left(\frac{s}{\lambda} + 1\right)}}$$

$$= \frac{j!}{\left(\frac{s + \lambda j}{\lambda}\right) \cdots \left(\frac{s + \lambda}{\lambda}\right)}$$

$$= \frac{j! \, \lambda^j}{(\lambda + s)(2\lambda + s) \cdots (j\lambda + s)}$$

③ La transformada de Laplace de $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j$ es:

$$\mathbb{E}\left(e^{-s(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j)}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep.}}}{=} \prod_{k=1}^{j} \mathbb{E}\left(e^{-s\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{j} \left(\frac{\lambda k}{\lambda k + s}\right) = \frac{\lambda^j \, j!}{(\lambda + s)(2\lambda + s) \cdots (j\lambda + s)}$$

$\therefore \max(X_1, \ldots, X_j) \overset{(d)}{=} \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_j$.

- Demuestra que $\mathbb{P}(T_1 + \dots + T_j \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^j$.

$$\mathbb{P}(T_1 + \dots + T_j \leq t) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_j) \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^j \qquad \square$$

- Concluye que $P_{1j}(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{j-1}$

$$\begin{aligned} P_{1j}(t) &= \mathbb{P}(T_1 + \dots + T_{j-1} \leq t,\ T_1 + \dots + T_j > t) = \mathbb{P}(T_1 + \dots + T_{j-1} \leq t) - \mathbb{P}(T_1 + \dots + T_j \leq t) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} - (1 - e^{-\lambda t})^j \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^{j-1}(1 - (1 - e^{-\lambda t})) \\ &= e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{j-1}. \end{aligned}$$

Obs: Con $X(0) = 1$, $X(t) \sim Geo(e^{-\lambda t})$ y entonces si $X(0) = i$, $X(t) \sim BN(i, e^{-\lambda t})$

17. Cada vez que una máquina es reparada funciona durante un tiempo exponencial de parámetro λ. Luego falla y puede tener una falla de tipo 1 o tipo 2 con probabilidades p y $1-p$ respectivamente. Los tiempos de reparación tienen tasa μ_1 y μ_2, respectivamente.

- ¿Qué proporción del tiempo funciona la máquina?

$X(t)$: estado de la máquina al tiempo t.

$E = \{0, 1, 2\}$, 0 = funciona, $1, 2$ = falla tipo 1 ó 2, resp.

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -\lambda & p\lambda & (1-p)\lambda \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Recordemos que una dist. estacionaria nos dice la proporción de tiempo que X pasa en cada estado.

$$\pi Q = 0 \iff \begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu_1 \pi_1 + \mu_2 \pi_2 = 0 \\ p\lambda \pi_0 - \mu_1 \pi_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \pi_1 = \dfrac{p\lambda}{\mu_1}\pi_0 \\ (1-p)\lambda \pi_0 - \mu_2 \pi_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \pi_2 = \dfrac{(1-p)\lambda}{\mu_2}\pi_0 \end{cases}$$

De la condición $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ obtenemos

$$\pi_0\left(1 + \frac{p\lambda}{\mu_1} + \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}\right) = 1$$

$0 \to 1$: $\dfrac{p\lambda}{\mu_1}$ $\qquad$ $0 \to 2$: $\dfrac{(1-p)\lambda}{\mu_2}$

$$\therefore \pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{p\lambda}{\mu_1} + \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}}$$

$$\therefore\ \pi_0 = \frac{1}{1+\frac{p\lambda}{\mu_1}+\frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}}$$

μ_1 $1\to 0$ μ_2 $2\to 0$

- Haga el cálculo con $\lambda=\frac{1}{3}$, $p=\frac{1}{2}$, $\mu_1=4$, $\mu_2=8$.

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}} = \frac{48}{48+2+1} = \frac{48}{51} = \frac{16}{17}$$

- Comentario: Al tiempo t, X está en funcionamiento: $\int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\,ds$

La proporción de tiempo en $[0,t]$ que X funciona: $\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\,ds$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\,ds \xrightarrow{t\to\infty} \pi_0\right)=1$$

24. Considera una estación de taxis donde llegan taxis y clientes de acuerdo a procesos de Poisson de parámetros 1 y 2 por minuto. Un taxi se queda en la estación sin importar que haya más pero un cliente que llega y no ve taxis se va y no regresa.

¿Cuál es la proporción de clientes que sí abordan un taxi?

$X(t)$: número de taxis en la estación al tiempo t

$E=\{0,1,2,\dots\}$

X es cadena de nacimiento y muerte con $Q_{n,n+1}=1$, $n\geq 0$, $Q_{n,n-1}=2$, $n\geq 1$.

Dado que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q_{01}\cdots Q_{k-1,k}}{Q_{10}\cdots Q_{k,k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k < \infty$$

entonces X tiene una única dist. estacionaria π, de hecho

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

y $\pi_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, $k\geq 0$.

Notemos que un cliente no aborda taxi ssi X está en el estado 0 y como la proporción de tiempo que no hay taxis es $\pi_0=\frac{1}{2}$, la proporción de clientes que sí abordan un taxi es $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.