Ayudantía 5 de febrero

Vectores invariantes

Recordemos que un vector $\lambda = (\lambda_x)_{x\in E}$ se dice vector invariante para la cadena X (o para la Q-matriz asociada) si

$$\lambda Q = 0.$$

Obs: λ no necesariamente es de probabilidad. Necesitaríamos que $\lambda_x \geq 0$ y $\sum_{x\in E} \lambda_x = 1$, en cuyo caso la llamamos distribución invariante.

Se mencionó:

- λ vector invariante para X ssi μ vector invariante para Π, con $\mu_i = \lambda_i q_i$.
- Si hay irreducibilidad, no explosividad y hay una dist. invariante λ, entonces
$$P_{ij}(t) \to \lambda_j.$$

$\ast$ Si E es finito, se puede garantizar la existencia de λ.

Ejemplo Consideremos una CMTC con $E=\{1,2,3\}$ y Q-matriz

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene Q una distribución invariante?

Notemos que

$$\lambda Q = 0 \iff (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (3) tenemos $\lambda_1 = 3\lambda_3$ (4)

De (2) y (4) tenemos

$$3\lambda_3 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\Rightarrow 4\lambda_3 - 4\lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_3 \qquad (5)$$

↳ Observe que (1) no da más información.

De la condición $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, concluimos $5\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{5}$

$\therefore$ La distribución invariante es $\lambda = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

b) Calcula la matriz de saltos Π y encuentra su distribución invariante.

<u>Sol:</u> Sabemos que $\Pi_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$, $i \neq j$ y $\pi_{ii} = 0$. Luego,

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

De la ecuación $\mu\Pi = \mu$ obtenemos

$$\begin{cases} \mu_2 + \frac{2}{3}\mu_3 = \mu_1 \\ \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_3 = \mu_2 \\ \frac{1}{2}\mu_1 = \mu_3 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{aligned} \mu_2 &= \tfrac{4}{3}\mu_3 \\ &\uparrow \\ \mu_1 &= 2\mu_3 \end{aligned}}$$

De la condición $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ concluimos $\frac{13}{3}\mu_3 = 1$ y por lo tanto

$$\mu = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right).$$

c) ¿Qué ocurre con $\tilde{\mu}$ dada por $\tilde{\mu}_i = \lambda_i q_i$?

De a) tenemos que

$$\tilde{\mu}_1 = 2\lambda_1 = 2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

$$\tilde{\mu}_2 = 4\lambda_2 = 4\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\tilde{\mu}_3 = 3\lambda_3 = 3\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

de modo que

$$\tilde{\mu} = \frac{13}{5}\mu$$

i.e. $\tilde{\mu}$ es múltiplo escalar de la distribución invariante y por lo tanto es un vector invariante. En efecto, vector invariante. En efecto,

$$\tilde{\mu}\Pi = \frac{13}{5}\underbrace{\mu\Pi} = \frac{13}{5}\mu = \tilde{\mu}$$

Obs: Las ecuaciones $\lambda Q = 0$ y $\mu\Pi = \mu$ dan vectores invariantes, al igual que la relación $\mu_i = \lambda_i q_i$ y quizá necesiten una renormalización para obtener una distribución invariante.

d) Comparar λ_j con $P_{ij}(t)$ para t grande.

Opción 1. (A mano) Diagonalizar $Q = PDP^{-1}$ y usar que

$$P(t) = e^{tQ} = Pe^{tD}P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{td_{11}} & & \\ & e^{td_{22}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}P^{-1}$$

Opción 2. ($\pm$ mano)

- Las entradas de la matriz D son los eigenvalores de Q
- Una vez encontrados, independientemente de quiénes sean P y P^{-1} cada $P_{ij}(t)$ se va a ver de la forma:

$$P_{ij}(t) = a_{ij}^{(1)}e^{td_{11}} + a_{ij}^{(2)}e^{td_{22}} + \dots + a_{ij}^{(n)}e^{td_{nn}}$$

y podemos determinar los $a_{ij}^{(k)}$ mediante $\begin{cases} P_{ij}(0) = \delta_{ij} \\ P_{ij}^{(k)}(0) = (Q^k)_{ij}, & k \geq 1 \end{cases}$

- Por ejemplo, supongamos que queremos calcular $P_{12}(t)$.

Eigenvalores:

$\det(Q - xI) = 0$ ssi $\begin{vmatrix} -2-x & 1 & 1 \\ 4 & -4-x & 0 \\ 2 & 1 & -3-x \end{vmatrix} = 0$

ssi $x(x+4)(x+5) = 0$

$\therefore$ Los eigenvalores son $0, -4$ y -5

Sabemos que

$$P_{12}(t) = ae^{t\cdot 0} + be^{t(-4)} + ce^{t(-5)}, \quad t \geq 0$$
$$= a + be^{-4t} + ce^{-5t}.$$

Ahora usamos $P_{12}(0) = 0$, $Q_{12} = 1$ y $(Q^2)_{12} = -5$

$Q^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -24 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Ahora usamos $P_{12}(0)=0$, $Q_{12}=1$ y $(Q^2)_{12}=-5$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -24 & 20 & 4 \\ -6 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_{12}(0)=0 &\Rightarrow \\ Q_{12}=1 &\Rightarrow \\ (Q^2)_{12}=-5 &\Rightarrow \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ -4b-5c &= 1 \\ 16b+25c &= -5 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -16b-20c &= 4 \\ 16b+25c &= -5 \end{aligned} \right.$$

$$5c = -1$$

$$\boxed{c = -\tfrac{1}{5}}$$

$$b = \frac{-1-5c}{4} = \frac{-1-(-1)}{4} = 0$$

$$\boxed{b=0}$$

$$\boxed{a = \tfrac{1}{5}}$$

$$\therefore\ P_{12}(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-5t}, \quad t \geq 0.$$

Observemos que

$$\lim_{t\to\infty} P_{12}(t) = \frac{1}{5} = \lambda_2$$

Opción 3. Usar software.

Observaciones:

- Sabemos que recurrencia/transitoriedad se mantienen entre la cadena a tiempo continuo y la discreta (cadena de saltos, subyacente, etc.)
- Irreducibilidad también
- Aperiodicidad ya no juega un papel en la cadena a tiempo continuo
- Ahora será más importante la no-explosividad de la cadena.

Recordatorio del caso discreto:

→ Si la cadena es irreducible entonces estados rec. positivos $\Leftrightarrow \exists$ dist. estacionaria

→ Si la cadena es irreducible y aperiódica y tiene dist. estacionaria π entonces

$$\mathbb{P}_\mu(X_n=j) \longrightarrow \pi_j, \quad \forall \text{ distribución inicial } \mu$$

$$P^{(n)} \longrightarrow \pi$$

$\mathbb{P}_\mu(X_n = j) \longrightarrow \pi_j$, $\forall$ distribución inicial μ

y $\quad p_{ij}^{(n)} \longrightarrow \pi_j$, $\forall i, j \in E$.