12 de marzo

$N(t)$ - proc. de renovación
$U(t)$ - función de renovación
F - función de dist. de los tiempos entre renovaciones
$F_k = F^{*k}$

$$\mu(t) = H(t) + \int_0^t \mu(t-s)\,dF(s)$$

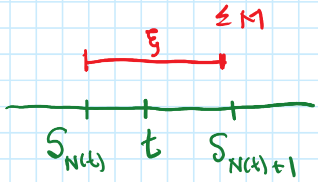
Problema 1. (Cotas para la función de renovación) Supongamos que N es un proceso de renovación con tiempos entre renovaciones $(\xi_i)_{i\geq 1}$. Supongamos que $\mu = \mathbb{E}(\xi_1) < \infty$.

a) Demostrar que
$$U(t) \geq \frac{t}{\mu}, \quad \forall t \geq 0.$$

b) Si existe una constante $M>0$ tal que $\xi_1 \leq M$, entonces
$$U(t) \leq \frac{t+M}{\mu}, \quad t \geq 0.$$

Demostración de a). Del Lema de Wald sabemos que si $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$, entonces

$$\mathbb{E}(S_{N(t)+1}) = \mathbb{E}(\xi_1)\,\mathbb{E}(N(t)+1) = \mu\, U(t)$$



Dado que $S_{N(t)+1} \geq t$, concluimos que
$$U(t) \geq \frac{t}{\mu}.$$

b) Dado que $S_{N(t)+1} - S_{N(t)} \leq M$ y $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$, se sigue que $S_{N(t)+1} \leq t + M$ y nuevamente del lema de Wald,
$$t + M \geq \mathbb{E}(S_{N(t)+1}) = \mu\, U(t)$$
$$\therefore\ U(t) \leq \frac{t+M}{\mu}. \qquad \square$$

Problema 2. Calcula $U(t)$ para $\xi_1 \sim \Gamma(2,\lambda)$, $\lambda > 0$. Verificar el Teorema de Blackwell.

Solución: $U(t) = 1 + \mathbb{E}(N(t))$

Notemos que

$$\mathbb{E}(N(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) > n) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$$

$S_{n+1} \sim \Gamma(2(n+1), \lambda)$

$$= \sum^{\infty} \int^{t} \lambda^{2(n+1)}\, x^{2n+1} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda^{2(n+1)}}{\Gamma(2(n+1))} x^{2n+1} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{(2n+1)!} (\lambda x)^{2n+1}\, dx$$

T. C. Monótona

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) dx$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{senh}(\lambda x)\, dx$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \left(\frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} \right) dx$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_0^t \left(1 - e^{-2\lambda x} \right) dx$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left(t - \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\lambda t}.$$

Por lo tanto, $U(t) = 1 + \mathbb{E}(N(t)) = \frac{3}{4} + \frac{\lambda}{2} t + \frac{1}{4} e^{-2\lambda t}$, $t \geq 0$.

Note que para $h > 0$,

$$U(t+h) - U(t) = \frac{3}{4} + \frac{\lambda}{2}(t+h) + \frac{1}{4} e^{-2\lambda(t+h)} - \left(\frac{3}{4} + \frac{\lambda}{2} t + \frac{1}{4} e^{-2\lambda t} \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} h + \frac{1}{4} e^{-2\lambda t} \left(e^{-2\lambda h} - 1 \right)$$

y haciendo $t \to \infty$,

$$\lim_{t \to \infty} U(t+h) - U(t) = \frac{\lambda}{2} h = \frac{h}{\frac{2}{\lambda}} = \frac{h}{\mathbb{E}(\xi_1)}. \quad \checkmark$$

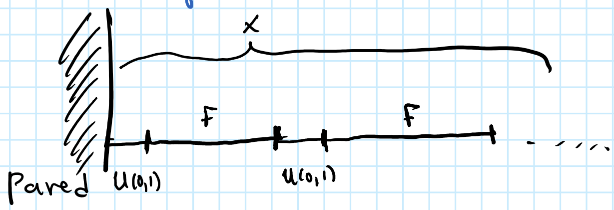
Alternativa:

$$\hat{U}(s) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2} = \frac{(\lambda+s)^2}{(2\lambda+s)s} = 1 + \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2\lambda} \right]$$ e invertimos.

Problema 3. Automóviles se estacionan en fila dejando un espacio $U(0,1)$ entre ellos y el primero deja también un espacio $U(0,1)$ entre su frente y la pared. La longitud de los carros tiene distribución F de media $\mu \in (0,\infty)$. Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N_x}{x} \quad y \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N_x)}{x},$$

donde N_x = # autos estacionados (completamente) a una distancia a lo más x de la pared. Haga los cálculos si F es degenerada en $c>0$ y si $F \sim Exp(1)$.



Solución: Sean $(U_i)_{i\geq 1}$ y $(A_i)_{i\geq 1}$ v.a.i.i.d tales que $U_1 \sim U(0,1)$ y $A_1 \sim F$ (las Us y las As son indep. entre ellas). Sean $L_i = U_i + A_i$, $i \geq 1$ y sea N el proceso de renovación asociado a las $(L_i)_{i\geq 1}$.

Notemos que $\mathbb{E}(L_1) = \mathbb{E}(U_1) + \mathbb{E}(A_1) = \frac{1}{2} + \mu < \infty$. Luego, del Teorema Elemental de renovación,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N_x}{x} \overset{c.s.}{=} \frac{1}{\mathbb{E}(L_1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\mu} = \frac{2}{1+2\mu}$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N_x)}{x} = \frac{1}{\mathbb{E}(L_1)} = \frac{2}{1+2\mu}.$$

- En el caso en que F es degenerada en $c>0$, se tiene $\mu = c$ y los límites son $\frac{2}{1+2c}$.
- En el caso en que $F \sim Exp(1)$, entonces $\mu = 1$ y los límites son $\frac{2}{3}$.

Problema 4. Sea N un proceso de renovación con tiempos entre ocurrencias $X_1, X_2, \ldots \sim F$ y sean $S_0 := 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$. Para cada $t \geq 0$, se define el tiempo de vida remanente como

$$R(t) = S_{N(t)+1} - t$$

i.e., es el tiempo que falta para que llegue la siguiente renovación.

Sea $x>0$ fijo. Muestre que si $A(t) := \mathbb{P}(R(t) > x)$ entonces

$$A(t) = \int_0^t (1 - F(t+x-s))\, dU(s).$$

Prueba:

$$A(t) = \mathbb{P}(R(t) > x) = \mathbb{P}(S_{N(t)+1} - t > x) = \mathbb{P}(S_{N(t)+1} > t + x)$$

Prob. Total

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{N(t)+1} > t+x \, , \, N(t) = n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{n+1} > t+x \, , \, S_n \leq t \, , \, S_{n+1} > t \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{n+1} > t+x \, , \, S_n \leq t \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n + X_{n+1} > t+x \, , \, S_n \leq t \right)$$

S_n y X_{n+1} son indep.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{(s,v) \in [0,\infty)^2 : \, s+v > t+x \, , \, s \leq t\}} F_n(ds) \, F(dv)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \left(\int_{t+x-s}^{\infty} F(dv) \right) F_n(ds)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \left(1 - F(t+x-s)\right) F_n(ds)$$

$$= \int_0^t \left(1 - F(t+x-s)\right) \underbrace{\left(\sum_{n \geq 0} F_n \right)}_{U} (ds)$$

$$= \int_0^t \left(1 - F(t+x-s)\right) dU(s)$$