Hecho: X es una cadena de Markov de saltos pura.

Calculando la Q matriz:

$E = \mathbb{N}$

$$Q_{x,y} = \begin{cases} -q_x = -\begin{pmatrix} \text{intensidad del} \\ \text{tiempo } \tau_0 \\ \text{empezando en } x \end{pmatrix} = \lambda x & \text{si } y = x \\ \\ q_x \Pi_{x,y} = \lambda x \, \delta_{y,x+1} & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

Propiedad de Markov:

Suponer que $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s \leq t$. Queremos:

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x] =$$

Asumir que $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x \leq y$.

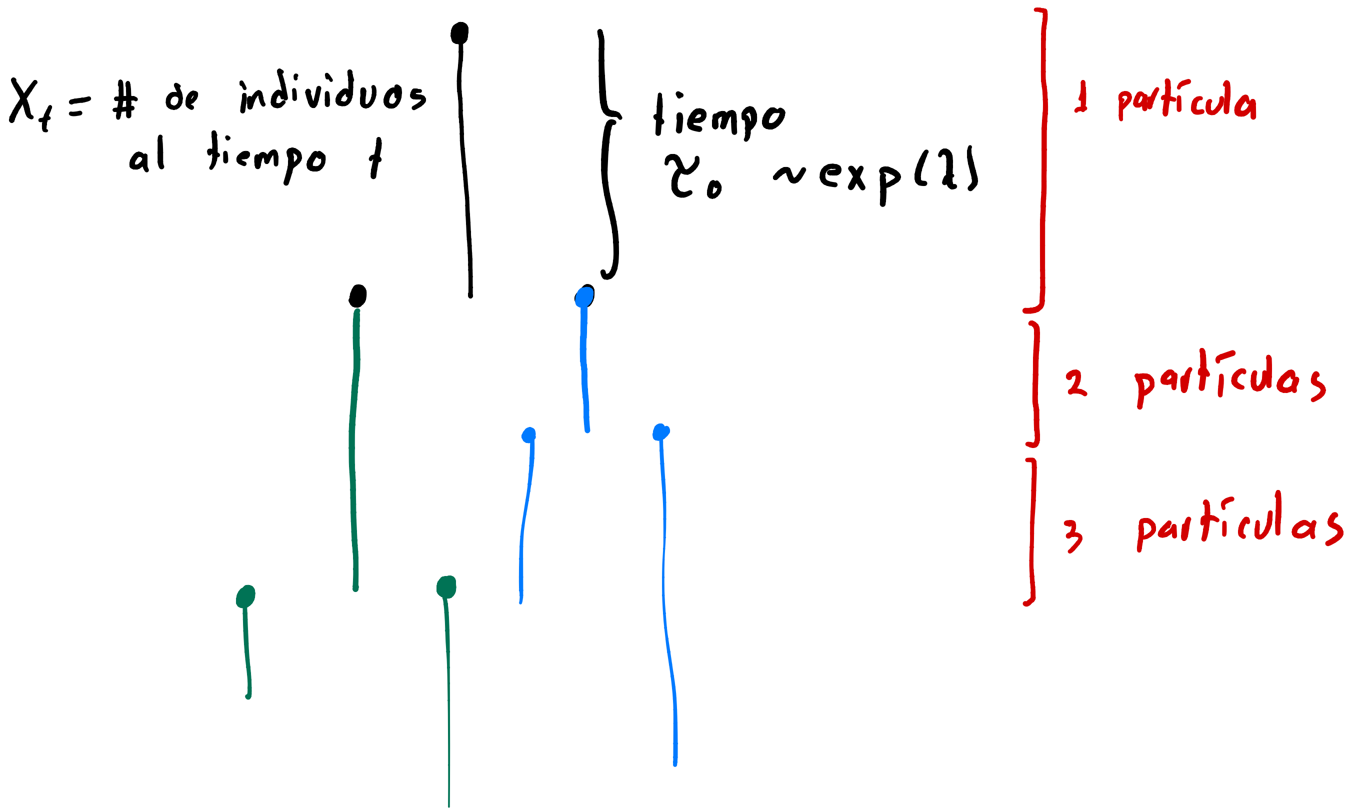
Notar que

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0]$$

$$= \mathbb{P}[X_{(t-s)+s} - X_s + X_s = y \mid X_s = x, X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0]$$

$$= \mathbb{P}[X_{(t-s)+s} - X_s + x = y \mid X_s = x, X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0]$$

Proceso de Yule $\quad \lambda > 0.$



Más aún, de manera general, si $\{X_t ; t \geq 0\} = X$, X_t = # partículas al tiempo t, con una población inicial $X_0 = x \in \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, X_t es un proceso de saltos puro, y $\tau_0 \sim \exp(\lambda x)$

Hecho:

Suponer (por el momento), que X es una cadena de Markov de saltos puros.

Calculando la Q-matriz asociada:

$E = \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $x, y \in E$, entonces

$$Q_{x,y} = \begin{cases} -q_x = -\left(\begin{array}{l}\text{intensidad de} \\ \tau_0 \text{ empezando} \\ \text{en } x\end{array}\right) = -\lambda x & \text{si } y = x \\ q_x \Pi_{x,y} = \lambda x \, \delta_{x+1,y} & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

Propiedad de Markov para X:

Suponer que $t_0 \le t_1 \le t_2, \dots, t_n \le s \le t$.

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0]$$

Queremos probar $\overset{?}{=}$ $\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x]$

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0]$$

$$= \mathbb{P}[X_{(t-s)+s} - X_s + x = y \mid X_s = x, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0] = (*)$$

Observación: basta probar que $\{\hat{X}_u := X_{s+u} - X_s\}_{u>0}$ es independiente de $\{X_r ; r \le s\}$ condicional a $X_s = x$

Probando la independencia:

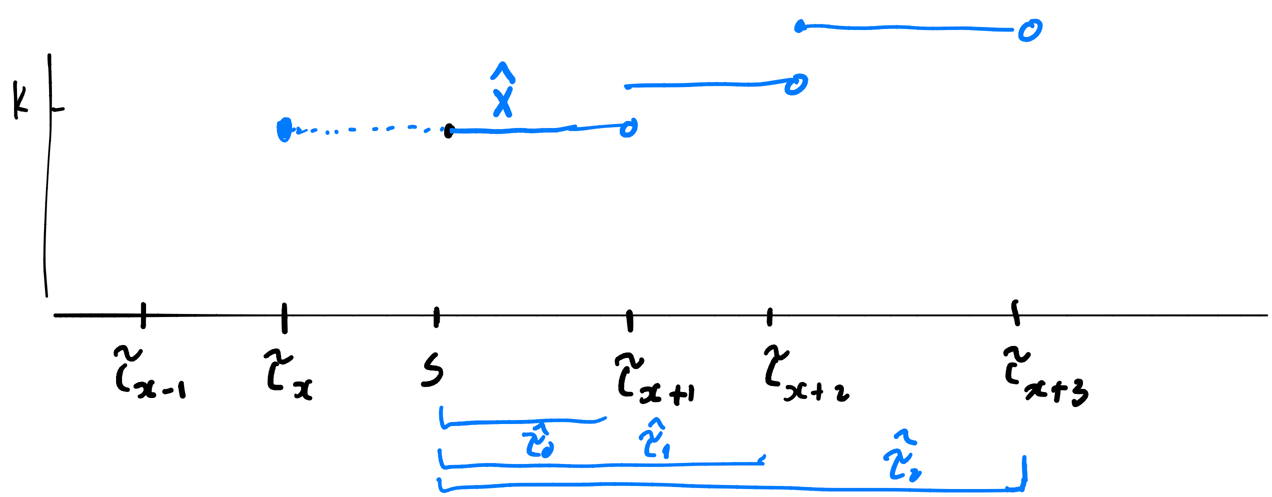
Obs 1:

i) $\{\hat{X}_u\}_{u>0}$ depende únicamente de sus tiempos de saltos $\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots$

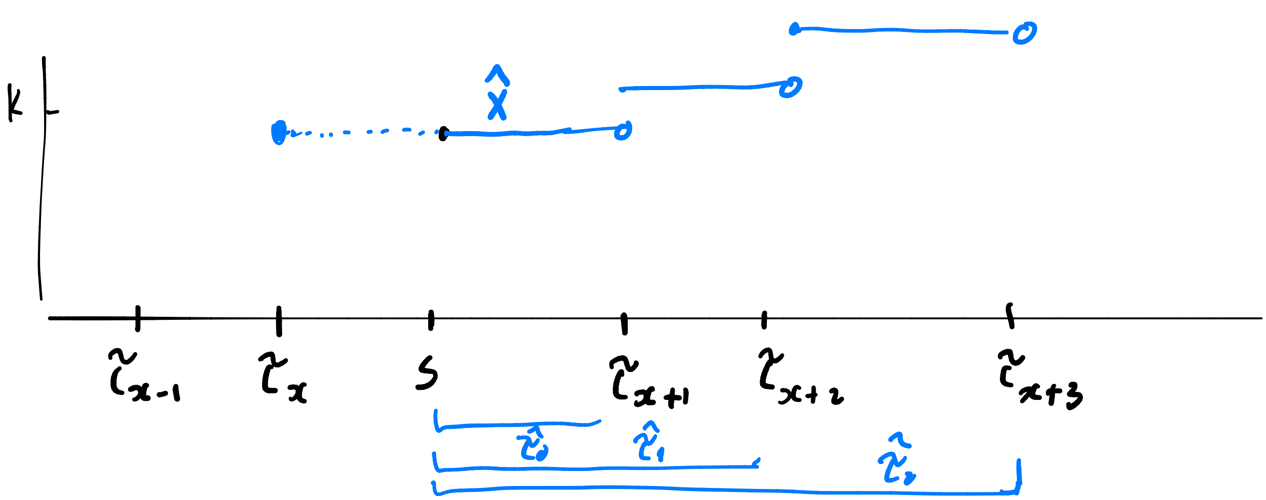
ii) $\{X_r\}_{r\le s}$ depende únicamente de $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{x+1}$, (condicionado a $X_s = x$)

Justificación:

$$\{X_s = x\} = \{\tau_x \le s < \tau_{x+1}\}$$



$$\{X_s = x\} = \{\tau_x \le s < \tau_{x+1}\}$$



Nota:

$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_0,\ \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1,\ \hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_2, \dots$ son indep de

$\tau_0,\ \tau_1 - \tau_0, \dots, \tau_x - \tau_{x-1},\ \tau_{x+1} - \tau_x$ ✓

Además, $\hat{\tau}_0$ es indep de $\tau_0, \tau_1 - \tau_0, \dots, \tau_x - \tau_{x-1}$ y

para probar que $\hat{\tau}_0 \perp \tau_{x+1} - \tau_x$ condicional a $\{X_s = x\}$.

prueba de éste hecho:

$$\mathbb{P}[\hat{\tau}_0 > w \mid X_s = x] = \mathbb{P}[\tau_{x+1} - s > w \mid \tau_x < s < \tau_{x+1}]$$

$$= \mathbb{P}[(\tau_{x+1} - \tau_x) > w + s - \tau_x \mid \tau_{x+1} - \tau_x > s - \tau_x > 0]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pérdida de memoria}}}{=} \mathbb{P}[\tau_{x+1} - \tau_x > w] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{procediendo de manera análoga}}}{=} \mathbb{P}[X_{(t-s)+s} - X_s + x = y \mid X_s = x]$$

∎