Cadenas de Markov a tiempo continuo

Objetivo: generalizar la noción de cadenas de Markov discretas en espacio de estados discreto, y definidas sobre un parámetro continuo.

Es decir, lo mínimo que buscamos es estudiar procesos $X = \{X_t \,;\, t \geq 0\}$ con valores en un conjunto discreto E, que satisfagan la propiedad de Markov:

$\forall \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < s < t < \infty \quad$ y $\quad x_0, \dots, x_n, x, y \in E,$

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x]. \quad (*)$$

Ejemplo fundamental:

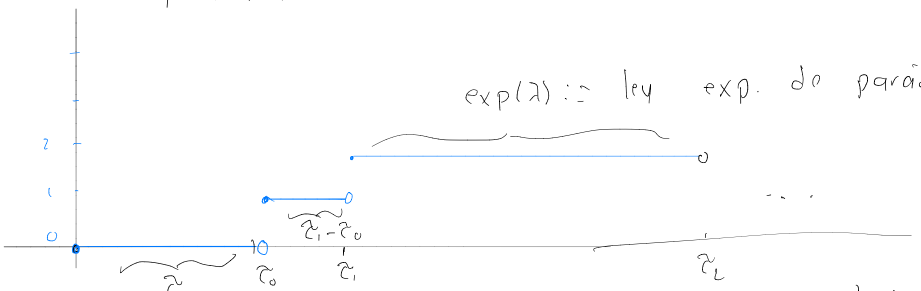
$X = N = \{N_t \,;\, t \geq 0\}$ es un proceso Poisson.

$E = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. La propiedad $(*)$ se satisface por su curso de semestres pasados.

Construcción de un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

trayectoria de N:

$\exp(\lambda) :=$ ley exp. de parámetro λ.



Construcción de un proceso de saltos $X = \{X_t \; ; t \geq 0\}$. con valores E:

Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots \in E$ $\quad \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \ldots \in \mathbb{R}_+$

i) Empieza en x_0 $\quad (X_0 = x_0)$

ii) Esperamos un tiempo τ_0, y luego X "salta" a otro estado.
(Voy a permitir que $\tau_0 = \infty$, en cuyo caso, X permanece en x_0 siempre.
Si $\tau_0 < \infty$, voy al paso iii)

iii) Salto al estado x_1 en el tiempo τ_0

iii) Esperamos un tiempo $\tau_1 - \tau_0$, y luego X "salta" a otro estado.
(Voy a permitir que $\tau_1 = \infty$, en cuyo caso, X permanece en x_1 siempre.
Si $\tau_1 < \infty$, voy al paso siguiente.

⋮

n) Procedemos inductivamente.

Formalmente, estamos definiendo:

$$X_t = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_0 \\ x_1 & \text{si } \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ x_2 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \end{cases}$$

Ejemplo: # de botes de una pelota:

Supongamos que el tiempo entre el bote n y $n+1$ de un balón es de 2^{-n}. Sea $X_t = \#$ botes al tiempo t. $E = \mathbb{N}_0$

(aquí $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2, \ldots,\ x_j = j$).

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2$$

X sólo está definido en $[0, 2]$; En este caso decimos que el modelo de saltos explota. Para ajustar la def. de X, consideramos el nuevo espacio de estados $E \cup \{\infty\}$, y definamos

$$X_t = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_0 \\ x_1 & \text{si } \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ x_2 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \\ \infty & \text{si } \lim_n \tau_n \leq t \end{cases}$$

Introduciendo estocasticidad.

Separamos E en estados que llamaremos "absorbentes" y "no absorbentes".

(Pensar en proceso Poisson como ejemplo).

a cada $x \in E$ le asocio una distribución $F_x(t)$, de una v.a. positiva. y consideramos "probabilidades de transición"

$\Pi_{x,y}$ $y \in E \setminus \{x\}$, $\left(\Pi_{x,y} > 0 \quad y \quad \sum_{y \in E \setminus \{x\}} \Pi_{x,y} = 1, \quad \Pi_{x,x} = 0. \right)$

La cadena salta a y con prob $\Pi_{x,y}$

(Pensar $\tau_0 \sim F_x$,) y que $\mathbb{P}[X_{\tau_0} = y] = \Pi_{x,y}$.

Supondremos que X_{τ_0} es independiente del tiempo τ_0. En particular,

$$\mathbb{P}[\tau_0 \leq t, X_{\tau_0} = y \mid X_0 = x] =: \mathbb{P}_x[\tau_0 \leq t, X_{\tau_0} = y] = F_{x_0}(t)\, \Pi_{x,y}.$$

Si x_0 es absorbente, haremos $X_t = x_0 \quad \forall \; t \geq \tau_0$.

Sólo si x_0 no es absorbente hacemos la transición en τ_0.

seguimos la construcción inductivamente.

Suposición: Con probabilidad 1, $\lim_{n \to \infty} \tau_n = \infty$ (caso no explosivos).

A un proceso con estas propiedades le llamaremos proceso de saltos puro.

Notación:

$$\mathbb{P}_{x,y}(t) := \mathbb{P}_x [X_t = y] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_0 = x], \quad t \geq 0, \qquad x, y \in E$$

$$\mathbb{P}_{x,y}(0) = \delta_{x,y} := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Vamos a poner una ley inicial $\nu_0(x)$, $x \in E$ al valor de X_0. independiente de $\tau_0, \tau_1 - \tau_0, \tau - \tau_1, \ldots,$ y de las transiciones.

Resumiendo:

- $X_0, \tau_0, \tau_1 - \tau_0, \tau - \tau_1, \ldots, X_{\tau_0}, X_{\tau_1}, \ldots$ son variabes independientes.

Estamos interesados en procesos que satisfacen

$\forall \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n < s < t < \infty$ y $x_0, \ldots, x_n, x, y \in E$,

$$\mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[X_t = y \mid X_s = x]. = \mathbb{P}_x [X_{t-s} = y] = \mathbb{P}_{x,y}(t-s)$$

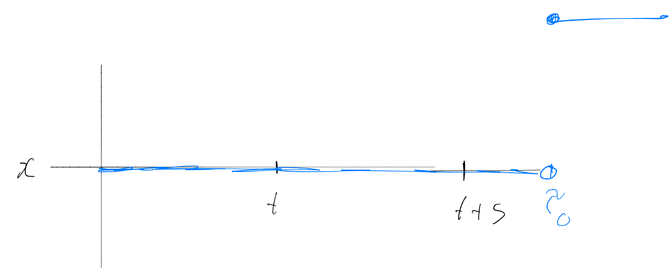
Lemma:

Si $\{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov de saltos puro (es decir, de saltos puros con propiedad de Markov,

y si $x \in E$ es no absorbente, entonces

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t] = \mathbb{P}[\tilde{\tau}_0 > s] \qquad \forall \quad s,t > 0.$$

$\Rightarrow$ τ_0 tiene distribución exponencial. (Ver prueba de esto en libro de Norris).



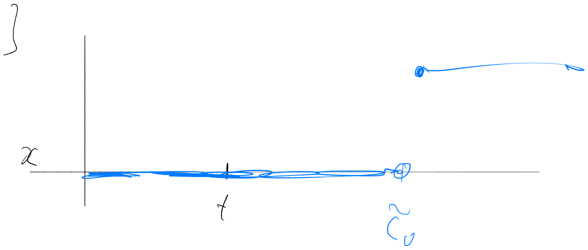
prueba: (idea)

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t)$$

$$= \mathbb{P}_x[X_u = x \quad \forall \quad u \in [t, t+s] \mid X_u = x \quad \forall \quad u \in [0,t]]$$

$$= \mathbb{P}_x[X_v = x \quad \forall \quad v \in [0,s]] = \mathbb{P}_x[\tau_0 > s] \quad \square$$

propiedad de Markov (Paso delicado)



Lemma:

Si $\{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov de saltos puro (es decir, de saltos puros con propiedad de Markov,

y si $x \in E$ es no absorbente, entonces

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t] = \mathbb{P}[\tau_0 > s] \quad \forall \quad s,t > 0.$$

$\Rightarrow$ τ_0 tiene distribución exponencial. (Ver prueba de ésto en libro de Norris).

↑
clase pasada. Nota: los tiempos entre saltos para X siempre son exponenciales si se tiene propiedad de Markov.

Nota:

Si $X_0 = x$, entonces $\tau_0 \sim$ exponencial. La intensidad depende de x, y se denotará por q_x.

i.e. $\tau_0 \sim exp(q_x)$ (iniciando la cadena en x).

convención: $q_x = \dfrac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_0]}$.

La propiedad de Markov nos permite escribir Chapman-Kolmogorov.

$$\mathbb{P}[X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1]$$

$$= \mathbb{P}[X_{t_1} = x_1]\, \mathbb{P}_{x_1, x_2}(t_2 - t_1) \cdots \mathbb{P}_{x_{n-1}, x_n}(t_n - t_{n-1}).$$

La familia de matrices $\{\mathbb{P}(t),\ t \geq 0\}$ satisface la prop. de semigrupo (pensar $\mathbb{P}(t) = [\mathbb{P}_{x,y}(t);\ x, y \in E]$

$$\mathbb{P}(t) \cdot \mathbb{P}(s) = \mathbb{P}(t+s)$$

justificación:

$$\mathbb{P}_{x,y}(t+s) = \mathbb{P}_x[X_{t+s} = y] = \sum_{z \in E} \mathbb{P}_x[X_t = z]\, \mathbb{P}_z[X_s = y] = (\mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t))_{x,y}$$

Lemma 2.2.

$$P_{x,y}(t) = \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \int_0^t q_x e^{-q_x s} \Big(\sum_{z \in E\setminus\{x\}} \Pi_{x,z}\, P_{z,y}(t-s)\Big)\, ds$$

prueba:

$$P_{x,y}(t) = \mathbb{P}.[X_t = y \mid X_0 = x] = \mathbb{P}_x[X_t = y,\ \tau_0 > t] + \mathbb{P}_x[X_t = y,\ \tau_0 \le t]$$

$$= \delta_{x,y}\, \mathbb{P}[\tau_0 > t] + \int_0^t \mathbb{P}_x[X_t = y \mid \tau_0 = s]\, q_x e^{-q_x s}\, ds$$

$$= \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \mathbb{P}_x[X_t = y,\ X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s]\, q_x e^{-q_x s}\, ds$$

$$= \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \underbrace{\mathbb{P}_x[X_{t-s+\tau_0} = y,\ X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s]}\, q_x e^{-q_x s}\, ds$$

$$\mathbb{P}_{z,y}(t-s) \leftarrow \mathbb{P}_x[X_{t-s+\tau_0} = y \mid X_{\tau_0+0} = z,\ \tau_0 = s]$$

$$\Pi_{x,z} \leftarrow \mathbb{P}_x[X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s]$$

Nota: $X_{u+\tau_0}$ por construcción, es un proceso de Marvov de saltos puro que empieza en $X_{\tau_0} = z$

$$= \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \sum_{z \in E\setminus\{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(t-s)\, q_x e^{-q_x s}\, ds \quad \blacksquare$$

Consecuencia:
haciendo un cambio de variable,

$u = t - s$
$s = t - u$

$$\mathbb{P}_{x,y}(t) = \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{-q_x (t-u)}\, du$$

$$= \delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + e^{-q_x t} \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{q_x u}\, du$$

Notar que

$$t \longmapsto \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{q_x u}\, du \text{ es continuo.}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}_{x,y}(t)$ continuo

$\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{q_x u}\, du$ es derivable en t.

$\Rightarrow$ $\displaystyle\delta_{x,y}\, e^{-q_x t} + e^{q_x t} \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z}\, \mathbb{P}_{z,y}(u)\, q_x\, e^{q_x u}\, du = \mathbb{P}_{x,y}(t)$

es derivable en t.

Cálculo de la derivada

$$\mathbb{P}'_{x,y}(t)$$

$$= \delta_{x,y}(-q_x)e^{-q_x t}$$

$$+ (-q_x)e^{-q_x t}\int_0^t \sum_{z\in E\setminus\{x\}} \Pi_{x,z}\,\mathbb{P}_{z,y}(u)\,q_x e^{q_x u}\,du \qquad (*)$$

$$+ e^{-q_x t}\sum_{z\in E\setminus\{x\}} \Pi_{x,z}\,\mathbb{P}_{z,y}(t)\,q_x e^{q_x t}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}'_{x,y}(0) = -\delta_{x,y}q_x + q_x\sum_{z\in E\setminus\{x\}}\Pi_{x,z}\underbrace{\mathbb{P}_{z,y}(0)}_{=\delta_{z,y}}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}'_{x,y}(0) = -\delta_{x,y}q_x + q_x\Pi_{x,y} \qquad \forall\ x,y\in E$$

Notación:

Definiremos:

$$Q_{x,y} := \mathbb{P}'_{x,y}(0) = \begin{cases} -q_x & \text{si } x=y \\ q_x\Pi_{x,y} & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

La familia $Q = [Q_{x,y}\ ;\ x,y\in E]$ se conoce como Q-matriz. La ecuación $(*)$ se escribe entonces como

$$\mathbb{P}'_{x,y}(t) = \sum_{z\in E} Q_{x,z}\,\mathbb{P}_{z,y}(t) = (Q\,\mathbb{P}(t))_{x,y}$$

Nota: Conocer Q, junto la ley inicial determina la ley de la matriz.

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}'(t) = Q\,\mathbb{P}(t)$$

Por otro lado, derivando la expresión, y luego evaluando en $s=0$, obtenemos

$$\mathbb{P}_{x,y}(t+s) = \sum_{z\in E} \mathbb{P}_{x,z}(t)\, \mathbb{P}_{z,y}(s),$$

$$\mathbb{P}_{x,y}'(t) = \sum_{z\in E} \mathbb{P}_{x,z}(t)\, Q_{z,y} = (\mathbb{P}G)_{z,y}$$

ecuación forward.

La ecuación backward la pueden obtener usando

$$\mathbb{P}_{x,y}(t+s) = \sum_{z\in E} \mathbb{P}_{x,z}(t)\, \mathbb{P}_{z,y}(s),$$

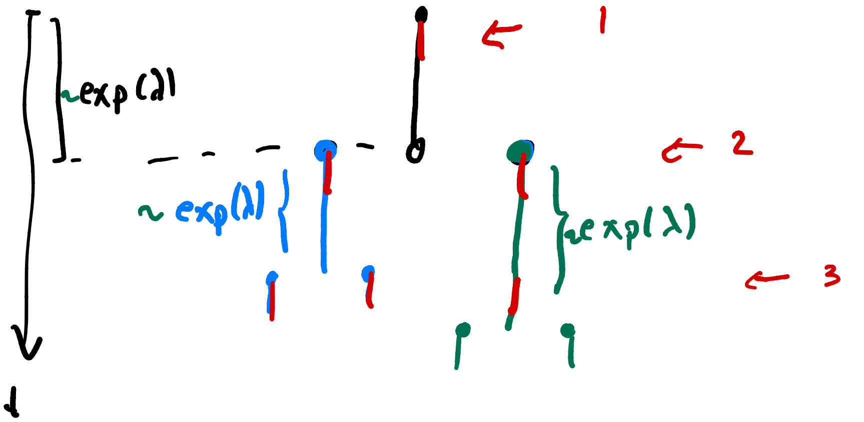
pero derivando con respecto a t.

Ejemplo:

Proceso de Yule:

i) Tenemos 1 partícula

ii) La partícula se biparte en un tiempo exponencial de parámetro $\lambda > 0$.



iii) Cada individuo nuevo se biparte con dist. exponencial(λ).

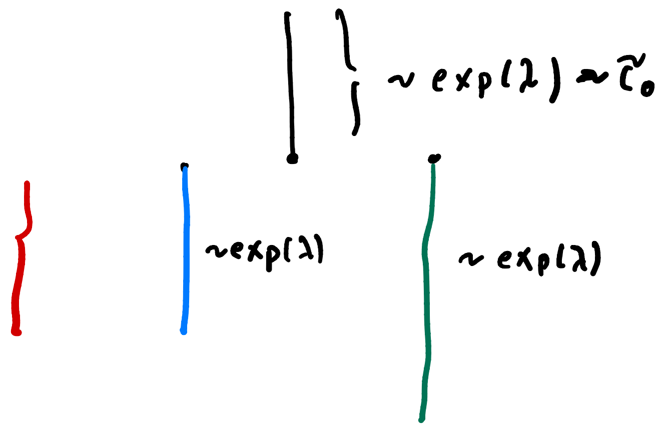
Los individuos actúan de manera independiente.

X_t = # de individuos al tiempo $t > 0$.

Nota: Se puede ver que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov de saltos puros.

Podemos calcular Q: (X_t siempre salta una unidad).

Sobre la pregunta en itempool.



$$Q_{2,3} = q_2 \Pi_{2,3} = q_2$$

$\Rightarrow$ $\tau_1 - \tau_0$ se distribuye como el mínimo de la expenencial de la particula azul y la verde.

$\therefore \tau_1 - \tau_0 \sim exp(\lambda + \lambda)$ -

Propiedades fundamentales:

Def:

$X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ cadena de Markov de saltos puros con valores E (numerable). Tomar $x, y \in E$.

Decimos que "$x \to y$" o que "x accede a y", si $\mathbb{P}_x[X_t = y$ para algún $t \geq 0] > 0$.

Def:

El proceso $Y = \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en E, definido como $Y_n := X_{\tau_n}$ se conoce como la cadena de saltos asociado X.

Teorema:

$\forall$ $x, y \in E$, con $x \neq y$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) x accede a y respecto a la cadena $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$

b) x accede a y respecto a la cadena $Y = \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

c) $Q_{x,x_1} Q_{x_1,x_2} \cdots Q_{x_{n-1},x_n} Q_{x_n,y} > 0$ para algunos $x_1, \ldots, x_n \in E$. para algunos estados $x_1, \ldots, x_n \in E$ no absorbentes

d) $\mathbb{P}_{x,y}(t) = \mathbb{P}_x[X_t = y] > 0$ $\forall$ $t > 0$

e) $\mathbb{P}_{x,y}(t) > 0$ para algún $t > 0$.

Dem:

Primero probumos $a \Rightarrow b$.

a) x accede a y respecto a la cadena $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$

b) x accede a y respecto a la cadena $Y = \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$x \to y \Rightarrow \exists\ t > 0$ t.q. $X_t = y$ (comenzando en x).

$\Rightarrow$ si $\tau_m < t \leq \tau_{m+1}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces

$Y_m = X_{\tau_m} = y \Rightarrow x \to y$ de acuerdo a Y.

ahora probemos b) $\Rightarrow$ c):

Si $x \to y$ de acuerdo a Y. $\Rightarrow \exists\ x_1, \dots, x_n \in E$ t.q.

$$\Pi_{x,x_1} \Pi_{x_1,x_2} \cdots \Pi_{x_{n-1},x_n} \Pi_{x_n,y} > 0$$

(Recordar que la matriz de transición de Y es $\Pi = \{\Pi_{x,y} ; x, y \in E\}$

Notar que para $x_1,\dots,x_n$ no absorbentes.

$$\Pi_{x,x_1}\Pi_{x_1,x_2}\cdots\Pi_{x_{n-1},x_n}\Pi_{x_n,y}>0$$

$$\Leftrightarrow\ (q_x\Pi_{x,x_1})(q_{x_1}\Pi_{x_1,x_2})\cdots(q_{x_n}\Pi_{x_n,y})>0. \quad (\circledast)$$

$$\Leftrightarrow\ Q_{x,x_1}\cdots Q_{x_n,y}>0.$$

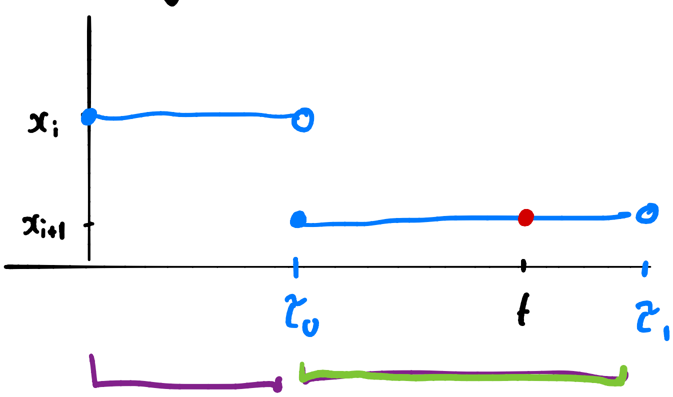
Probemos c) $\Rightarrow$ d):

Si c) se cumple, por $(\circledast)$, $\Pi_{x,x_1}\Pi_{x_1,x_2}\cdots\Pi_{x_{n-1},x_n}\Pi_{x_n,y}>0$

Ahora, notemos que $\forall\ t>0$

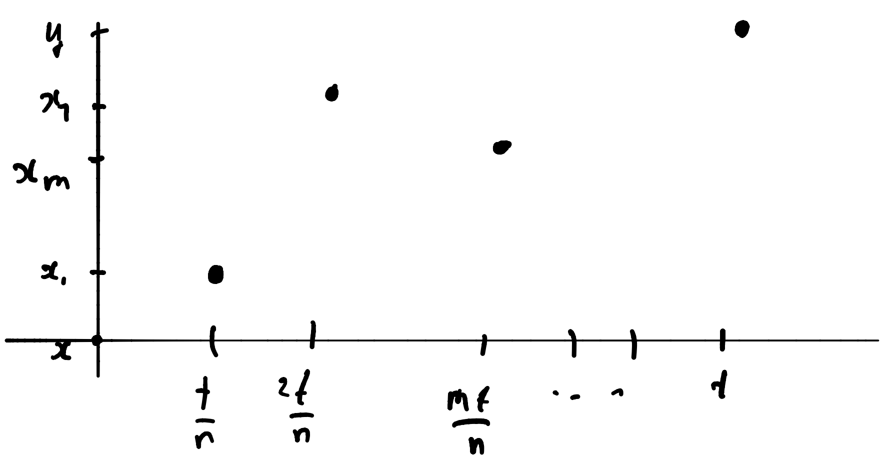
$$P_{x_i,x_{i+1}}(t)\ \underset{\downarrow\text{ver}}{\geq}\ \mathbb{P}_{x_i}[\tau_0<t,\ X_{\tau_0}=x_{i+1},\ \tau_1>t] = (1-e^{-q_{x_i}t})\,\Pi_{x_i,x_{i+1}}\,e^{-q_{x_{i+1}}t}$$

>0



Entonces, por Chapman-Kolmogorov,

$$P_{x,y}(t)\geq P_{x,x_1}\left(\tfrac{t}{n}\right)P_{x_1,x_2}\left(\tfrac{t}{n}\right)\cdots P_{x_n,y}\left(\tfrac{t}{n}\right)>0,$$ como requerido



Tarea para mí: cómo se ve Π en estados absorbentes.

Tiempos de entrada: (Notación: $\inf \emptyset = \infty$)

$A \subset E$. La v.a.

$$D^A = \inf\{t \geq 0;\ X_t \in A\}$$ se conoce como

tiempo de entrada a A. Adicionalmente, si

$Y = \{Y_n\}_{n \geq 0}$ es la cadena de saltos subyacente,

$$H^A = \inf\{n \geq 1;\ Y_n \in A\}.$$

Cuando A es cerrada, entonces,

$\mathbb{P}_i[D^A < \infty]$ se conoce como probabilidad de absorción.

Notar que $\mathbb{P}_i[D^A < \infty] = \mathbb{P}_i[H^A < \infty] =: h_i^A$

Teorema:
El vector de prob. de llegada $h_i^A = \{h_i^A;\ i \in E\}$ es la solución mínima del sistema

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{para } i \in A \\ \sum_{j \in E} Q_{i,j} h_j^A = 0 & \text{para } i \notin A. \end{cases}$$

$\Big\updownarrow$ prueba

$$\sum_{j \in E \setminus \{i\}} q_i \overbrace{\mathbb{P}_i[Y_1 = j]}^{\Pi_{i,j}} h_j^A = h_i \Leftrightarrow \sum_{j \in E \setminus \{i\}} Q_{i,j} h_j^A = -Q_{i,i} h_i$$

El tiempo promedio que le toma a X llegar a A, empezando en i, lo denotaremos por

$$K_i^A = \mathbb{E}_i[D^A].$$

¿Cómo calcular K_i^A?

¿Cómo calcular K_i^A?

Teorema:
Supongamos que $q_i > 0 \quad \forall \; i \in A$. Entonces el vector de tiempos esperados de llegada $K^A = \{K_i^A \; ; i \in E\}$ es la solución mínima no negativa al sistema:

$$\begin{cases} K_i^A = 0 & \forall \; i \in A \\ -\sum_{j \in E} Q_{i,j} K_j^A = 1 & \text{para } i \notin A. \end{cases} \quad \oplus$$

prueba:
primero mostramos que K^A satisface $\oplus$:
Si $X_0 = i \notin A$: Entonces $D_i^A > \tau_0$. Por la propiedad de Markov,

$$\mathbb{E}_i[D^A - \tau_0 \mid X_{\tau_0} = j] = \mathbb{E}_j[D^A].$$

Esto implica que

$$K_i^A = \mathbb{E}_i[D^A] = \mathbb{E}_i[\tau_0] + \sum_{j \neq i} \mathbb{P}_i[X_{\tau_0} = j]\, \mathbb{E}_i[D^A - \tau_0 \mid X_{\tau_0} = j]$$

$$= \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \Pi_{i,j} K_j^A.$$ Multiplicamos por q_i:

para obtener $\overbrace{q_i}^{-Q_{i,i}} K_i^A - \sum_{j \neq i} \overbrace{q_i \Pi_{i,j}}^{Q_{i,j}} K_j^A = 1$

Prueba de que es la solución mínima:

Suponer que $y = \{ y_i \,;\, i \in E \}$ satisface

$$\begin{cases} y_i = 0 & \forall \quad i \in A \\ -\sum_{j \in E} Q_{i,j}\, y_j = 1 & \text{para } i \notin A. \end{cases}$$

De aquí se sigue que: (como antes)

$$y_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \Pi_{i,j}\, y_j = \frac{1}{q_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \Pi_{i,j} \Big(\frac{1}{q_j} + \sum_{\substack{k \neq j \\ k \notin A}} \Pi_{j,k}\, y_k \Big)$$

$$\frac{1}{q_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \Pi_{i,j} \frac{1}{q_j} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \sum_{\substack{k \neq j \\ k \notin A}} \Pi_{j,k}\, y_k$$

$$= \mathbb{E}_i[\tau_0] + \mathbb{E}_i\big[(\tau_1 - \tau_0)\, \mathbb{1}_{\{H^A \geq 1\}} \big] + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \sum_{\substack{k \neq j \\ k \notin A}} \Pi_{j,k}\, y_k$$

$\vdots$

$n \geq 2$

$$= \mathbb{E}_i[\tau_0] + \mathbb{E}_i\big[(\tau_1 - \tau_0)\, \mathbb{1}_{\{H^A \geq 1\}} \big] + \cdots + \mathbb{E}_i\big[(\tau_n - \tau_{n-1})\, \mathbb{1}_{\{H^A \geq n\}} \big]$$

$$+ \sum_{j_1 \notin A, \ldots, j_n \notin A} \Pi_{i,j_1} \cdots \Pi_{j_{n-1}, j_n}\, y_{j_n}$$

$$\geq \mathbb{E}_i[\tau_0] + \mathbb{E}_i\big[(\tau_1 - \tau_0)\, \mathbb{1}_{\{H^A \geq 1\}} \big] + \cdots + \mathbb{E}_i\big[(\tau_n - \tau_{n-1})\, \mathbb{1}_{\{H^A \geq n\}} \big]$$

$\tau_{-1} = 0$

$$= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}_i\big[(\tau_m - \tau_{m-1})\, \mathbb{1}_{\{H^A \geq m\}} \big] = \mathbb{E}_i\Big[\sum_{m=0}^{n \wedge H^A} \tau_m - \tau_{m-1} \Big] \xrightarrow{n \to \infty} \#\#$$

donde

$$(\#\#) = \mathbb{E}_i\left[\underbrace{\sum_{m=0}^{H^A}(\tau_m-\tau_{m-1})}_{=D^A}\right] = \mathbb{E}_i[D^A] = K_i^A$$

Conclusión:

$y_i \geq K_i^A$, como se requería. ■

Aclaración de la clase pasada

Suponer $x,y\in E$, con x absorbente.

Por def, el tiempo de salto es infinito, una vez que lego a x. $(q_x=0)$.

$$\Pi_{x,y} := \delta_{x,y}$$

$$Q_{x,y} = \begin{cases} -q_x & \text{si } x=y \\ q_x\,\Pi_{x,y} & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

Recurrencia y transitoriedad:

Def:

$i\in E$ es recurrente si

$\mathbb{P}_i[\{t;\ X_t=i\}$ es no acotado$]=1$

i es transitorio si

$\mathbb{P}_i[\{t;\ X_t=i\}$ es acotado $]=1$

Teorema:

i) Si $i \in E$ es recurrente para la cadena de saltos $Y = \{Y_n\}_{n \geq 0}$ $(Y_n := X_{\tau_n})$, entonces i es recurrente para la cadena $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$.

ii) Si $i \in E$ es transitorio para Y, también lo es para X.

Dem:

i) Si $i \in E$ es recurrente para Y, veremos que X no explota. Por el curso de cadenas pasado, Y_m regresa a "i" en tiempos $\{N_m\}_{m \geq 1}$ (i.e. $Y_{N_m} = i$).

Recordar que $\tau = \lim_{n \to \infty} \tau_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\tau_m - \tau_{m-1})$, con $\tau_{-1} := 0$

Nuestra cadena X, comenzará en i.

Definamos $T_m = q_{Y_{m-1}} (\tau_m - \tau_{m-1})$. Notar que T_m's son exponenciales de parámetro 1.

Entonces,

$q_{Y_{N_m - 1}}$ cuando $Y_{N_m - 1} = i$

$$q_i \tau = q_i \sum_{m=0}^{\infty} (\tau_m - \tau_{m-1}) \geq \sum_{m=1}^{\infty} q_i (\tau_{N_m} - \tau_{N_m - 1})$$

ignorar los m's t.q. $Y_m \neq i$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} T_{N_m}$$

exponenciales indep. de parámetro 1

por ejercicio 1 de la tarea, la cadena es no-explosiva. (pues $\tau = \infty$)

(Nota adicional:
En la tarea prueban que si $\{S_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión de v.a. exponenciales,
$S_k \sim exp(\lambda_k)$. Entonces, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty, \quad \text{entonces} \quad \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \infty \quad \text{con probabilidad } 1)$$

En el caso en que $S_k = T_{N_k} \sim exp(1)$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{\lambda_k}_{=1}} = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} T_{N_k} = \infty$$

Sobre la recurrencia de X:

$X_{\tau_n} = Y_n = i$ para un número infinito de n's. Combinando esto con el hecho de que

$\tau_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$

$\Rightarrow$ recurencia para X.

Transitoriedad:

Si i es transitorio para Y, entonces

$\sup\{m ; Y_m = i\} \leq M \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow X_{\tau_{M+\ell}} \neq i \quad \forall \quad \ell \geq 1. \quad \Rightarrow \quad X_s \neq i \quad \forall \quad s > \tau_{M+\ell}$

$\Rightarrow \sup\{s ; X_s = i\} \leq \tau_{M+1} \quad \Rightarrow \quad$ transitoriedad para X.

Continuación del teorema previo:

iii) Cada estado $x \in E$ es recurrente o transitorio (para X).

iv) Recurrencia y transitoriedad son propiedades de clase.

Prueba:

iii) Suponer x es recurrente para X.

¿x es recurrente para Y? ¡sí!

Luego, por el curso del semestre pasado,

$x \in E$ es $\begin{cases} \text{recurrente para } Y \Rightarrow \text{recurrente para } X \\ \text{transitorio para } Y \Rightarrow \text{transitorio para } X. \end{cases}$

iv) $x \to y$ de acuerdo a X.

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $x \to y$ de acuerdo a Y (resultado de clases pasada)

Por otro lado,

$\begin{cases} \text{Si } x \text{ es recurrente respecto a } X \Rightarrow x \text{ es recurrente respecto a } Y \\ \text{Si } x \text{ es transitorio respecto a } X \Rightarrow x \text{ es transitorio respecto a } Y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } x \text{ es recurrente respecto a } X \overset{\text{por } (1)}{\Rightarrow} y \text{ es recurrente resp. a } X \\ \text{si } x \text{ es transitorio respecto a } X \overset{\text{por } (1)}{\Rightarrow} y \text{ es transitorio resp. a } Y. \end{cases}$

Teorema: La siguiente dicotomía se satisface:

Sea $i \in E$.

i) Si $q_i = 0$ o $\mathbb{P}_i[T_i < \infty] = 1$ entonces

i es recurrente y $\int_0^\infty \mathbb{P}_{i,i}(t)\,dt = \infty$

ii) Si $q_i > 0$ y $\mathbb{P}_i[T_i < \infty] < 1$, entonces i es transitorio

y $\int_0^\infty \mathbb{P}_{i,i}(t)\,dt < \infty$.

Donde $T_i = \inf\{t > \tau_0 ; X_t = i\}$.

Demostración:

Si $q_i = 0$, entoces i es absorbente. $\Rightarrow$ i es recurrente

y $\int_0^\infty \underbrace{\mathbb{P}_{i,i}(t)}_{=1}\,dt = \infty$.

Si $q_i > 0$ y $\mathbb{P}_i[T_i < \infty] = 1$.

Sea N_i = tiempo de regreso a i para la cadena de saltos. Observación:

$$\mathbb{P}_i[N_i < \infty] = \mathbb{P}_i[T_i < \infty].$$

$\Rightarrow \mathbb{P}_i[N_i < \infty] = 1 \Rightarrow$ i es recurrente respecto a Y.

$\Rightarrow$ i es recurrente respecto a X.

Para el cálculo de la integral; probaremos que

$$\int_0^\infty \mathbb{P}_{i,i}(t)\,dt = \frac{1}{q_i}\sum_{n=0}^\infty (\Pi^{(n)})_{i,i},$$

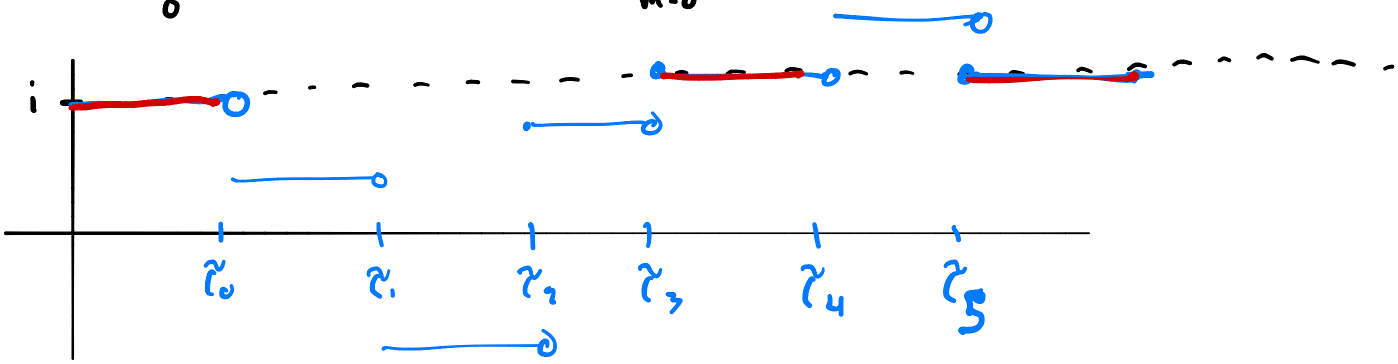
donde $\Pi^{(n)}$ denota la n-ésima potencia de Π.

Probar $\displaystyle\int_0^\infty \mathbb{P}_{i,i}(t)\,dt = \frac{1}{q_i}\sum_{n=0}^{\infty}(\Pi^{(n)})_{i,i}$:

$$\int_0^\infty \mathbb{P}_{i,i}(t)\,dt = \int_0^\infty \mathbb{P}_i[X_t = i]\,dt = \int_0^\infty \mathbb{E}_i[\mathbb{1}_{\{X_t = i\}}]\,dt$$

$\tau_{-1} := 0$

$$= \mathbb{E}_i\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_t=i\}}\,dt\right] \overset{\downarrow}{=} \mathbb{E}_i\left[\sum_{m=0}^{\infty}(\tau_m - \tau_{m-1})\,\mathbb{1}_{\{Y_m = i\}}\right] = \circledast$$



$$\Rightarrow \circledast = \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{E}_i[(\tau_m - \tau_{m-1})\,\mathbb{1}_{\{Y_m = i\}}] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{q_i}\mathbb{P}_i[Y_m = i]$$

$$= \frac{1}{q_i}\sum_{m=0}^{\infty}(\Pi^{(n)})_{i,i}$$ como se requería.

Problema de la purificadora.

- Reparaciones de 1 a 2 veces al meses
- 8 vehiculos
- Repa
- Tarda la reparación:
  - 3 días para la bomba
  - 1 o 2 días suspensión
  - 1 semana para reparaciones mayores

Resumen:

Ingredientes

* Hay n vehiculos
* los vehículos se descomponen
* los descompuestos se reparan.

¿Qué preguntas naturales hay?

- En 5 meses, en un dia normal, cuantos camiones repartidores voy a tener? (cual es la distribución)
- Cual es el promedio de tiempo en el que tengo 1 coche en "reparación"?

Posibles Soluciones:

- X_t = # autos disponibles al tiempo t.

$E = \{0, \dots, n\}$ ← posibles autos disponibles.

Supuestos:

- Tiempos de reparación exponenciales e independientes.

- Tiempos en que se descomponen los autos deben ser exponenciales.

2ª propuesta:

- Considerar una cadena de Markov para cada auto: $Y = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$.

Asumir $\{X^{(k)}\}_{k=1,\dots,n}$ indep. $X^{(k)}$ representa el estado del k-ésimo auto.

Info adicional:

- Info sobre las reparaciones.
- Info = los tiempos en que se descomponen.

Proyectos a futuro:

- Costos ⟶ Planeación.

Punch line:

- Cual es la distribución asintótica de el número de autos. ⟷ $\mathbb{P}(t)$ si $t \approx \infty$
- En promedio, ¿cuánto gasto? ⟷ $\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds$ si $t \approx \infty$

Distribuciones invariantes

Queremos saber $\mathbb{P}[X_t = i]$, cuando $t \to \infty$ y $i \in E$. $\longleftrightarrow$ Veremos que ello está relacionado con "distribuciones invariantes" o "vectores invariantes".

Def:

Decimos que λ es un "vector invariante" para X con Q-matriz Q si

$\lambda Q = 0.$

Teorema: ⊛

Supongamos que X tiene matriz de saltos Π.

Es equivalente

i) λ sea un vector invariante para X.

ii) λ sea un vector tal que $\mu_i = \lambda_i q_i$ satisface $\mu \Pi = \mu$

prueba:

$Q_{i,j} = q_i(\Pi_{i,j} - \delta_{i,j}) \quad \forall \; i,j \in E.$ Entonces

$$(\mu(\Pi - I))_j = \sum_{i \in I} \mu_i (\Pi_{i,j} - \delta_{i,j}) = \sum_{i \in I} \underbrace{\lambda_i}_{\frac{\mu_i}{q_i}} \underbrace{Q_{i,j}}_{q_i(\Pi_{i,j} - \delta_{i,j})} = 0$$

$\boxtimes$

Perspectiva:

Queremos hacer un "link" entre vectores invariantes y $\mathbb{P}_i[X_t = j]$, si $t \to \infty$

Teorema:

Suponer que X es irreducible y recurrente.

Entonces Q tiene un vector invariante que es único salvo multiplicación por escalar.

prueba:

estrategia: usar resultados de cadenas de Markov a tiempo discreto.

Como X es irreducible, X no puede tener estados absorbentes (salvo que solo tenga un estado $E = \{i\}$).

La cadena de saltos satisface:

i) Es irreducible

ii) Es recurrente.

$\Rightarrow$ existe un vector invariante μ para Π.

$\Rightarrow \mu \Pi = \mu$.

Ahora, construyo, $\lambda_i = \frac{\mu_i}{q_i}$, y por el resultado ⊛, $\lambda = (\lambda_i \; ; i \in E)$ es un vector invariante para X.

Objetivo de las siguientes clases:

Teorema

Sea Q una matriz "irreducible", no no explosivo tq. existe una distribución invariante λ (λ es un vector invariante, con entradas positivas que suman 1).

Entonces, $\forall\ i,j \in E$,

$$\mathbb{P}_{i,j}(t) \longrightarrow \lambda_j \quad \text{cuando } t \to \infty.$$

Nota: probaremos que si el espacio de estados es finito, la existencia de λ se puede garantizar.

Anuncio: (opcional).

- Jueves: sesiones de dudas 3:00 pm.
- Sábado: resolución de la tarea 11:00 am.

Continuación de distribuciones invariantes

λ es un vector invariante si

$\lambda Q = 0$ ⊛

Vimos que ⊛ pasa sii

$\mu \Pi = \mu$ donde $\mu_i = \lambda_i q_i$

En el caso en que λ tiene entradas no-negativas y $\sum \lambda_i = 1$, decimos que λ es una "distribución invariante".

Definición:

Recordar: i es recurrente si $q_i = 0$ o $\mathbb{P}_i[T_i < \infty] = 1$.

Diremos que i es recurrente positivo si $\mathbb{E}_i[T_i] < \infty$.

Si i es recurrente pero $\mathbb{E}_i[T_i] = \infty$, decimos que i es recurrente nulo.

Li a con existencia de distr. inv.

Teorema:
Sea Q una Q-matriz de una cadena irreducible.
es equivalente
i) cada estado es recurrente positivo
ii) algún estado es recurrente positivo
iii) Q es no explosivo y existe una distribución invariante λ

Además, $m_i := \mathbb{E}_i[T_i < \infty] = \frac{1}{\lambda_i q_i}$ $\forall$ $i \in E$.

prueba:

Estrategia: ligar los conceptos con la cadena de saltos.

Suponer que $\# E \geq 2$. $(\Rightarrow q_i > 0 \;\; \forall \; i \in E)$.

Paso 1:

Para $i \in E$, definir $\mu^i = \{\mu^i_j\}_{j \in E}$

$$\mu^i_j := \mathbb{E}_i\left[\int_0^{T_i \wedge \tau} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}} \, ds\right], \quad \text{donde}$$

T_i = tiempo de retorno a i

$\tau = \lim_{n \to \infty} \tau_n$.

Intercambiando la suma con la integral.

$$\sum_{j \in E} \mu^i_j = \sum_{j \in E} \mathbb{E}_i\left[\int_0^{T_i \wedge \tau} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}} \, ds\right],$$

$$\mathbb{E}_i\left[\int_0^{T_i \wedge \tau} \sum_{j \in E} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}} \, ds\right],$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j\in E} \mu_j^i = \mathbb{E}_i\left[\int_0^{T_i\wedge\tau} \sum_{j\in E} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}\, ds\right],$$

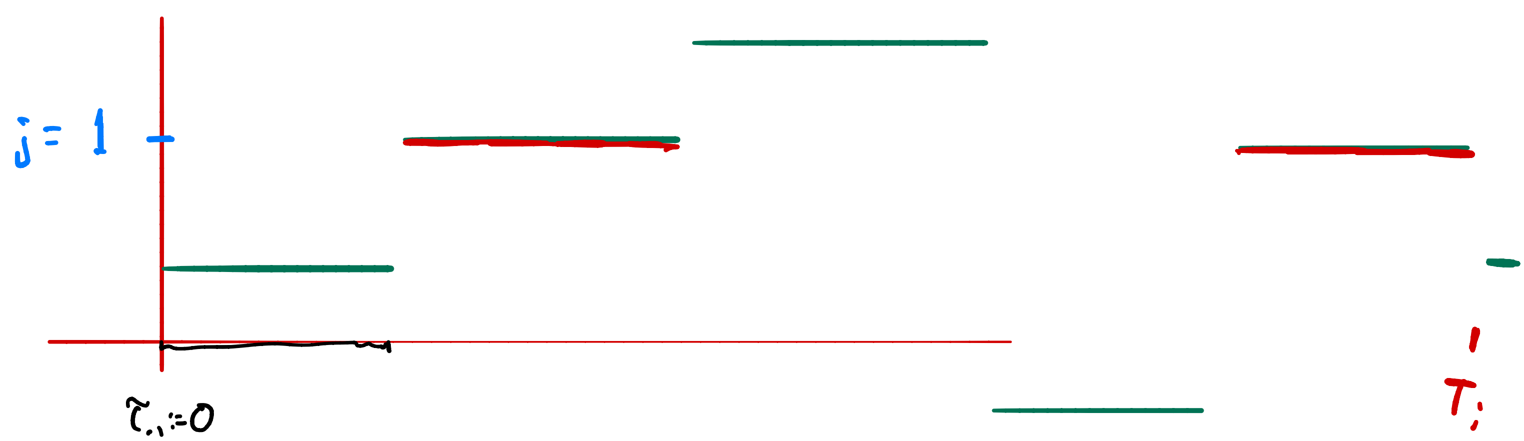
$$= \mathbb{E}_i\left[\int_0^{T_i\wedge\tau} 1\, ds\right] = \mathbb{E}_i\left[T_i\wedge\tau\right].$$

Paso II:

Sea N_i = primer tiempo de llegada de la cadena de saltos al estado i.

$$\mu_j^i = \mathbb{E}_i\left[\int_0^{T_i\wedge\tau} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}\, ds\right] = *$$

Ejemplo:



$$\mu_j^i = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n-\tau_{n-1})\,\mathbb{1}_{\{Y_n=j,\ N_i>n\}}\right],$$

donde N_i = tiempo de retorno a i (para Y).

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i\left[(\tau_n-\tau_{n-1})\,\mathbb{1}_{\{Y_n=j,\ N_i>n\}}\right],$$

$$\Rightarrow \mu_j^i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i\left[(\tau_n - \tau_{n-1}) \mid Y_n = j\right) \mathbb{E}_i\left[\mathbb{1}_{\{Y_n = j,\ N_i > n\}}\right],$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_j} \mathbb{E}_i\left(\mathbb{1}_{\{Y_n = j,\ N_i > n\}}\right) = \frac{1}{q_j} \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Y_n = j,\ N_i > n\}}\right)$$

$$\mu_j^i = \frac{1}{q_j} \underbrace{\mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{N_i - 1} \mathbb{1}_{\{Y_n = j\}}\right]}_{=: \gamma_j^i} = \frac{\gamma_j^i}{q_j}$$

De vuelta a la prueba:

Del curso de cadenas de Markov del semestre pasado (la conexión la precisaré más tarde),

γ era un vector invariante para Y.

Entonces $\mu_j^i = \dfrac{\gamma_j^i}{q_j}$ es un vector invariante para X $\Rightarrow$

$$\lambda_j := \frac{\mu_j^i}{\sum_{j \in E} \mu_j^i} = \frac{\mu_j^i}{\mathbb{E}_i[T_i]} = \frac{\mu_j^i}{m_i}$$

es una distribución invariante

Ahora supongamos que (iii) se satisface:

- No explosividad
- Existencia de distribución invariante λ.

Fijemos $i \in E$ y definamos

$$\nu_j = \frac{\lambda_j q_j}{\lambda_i q_i}.$$

Entonces, ν_j satisface:

$$\begin{cases} \bullet\ \nu_i = 1 & \forall\ i \in E \\ \bullet\ \nu \Pi = \nu & (\leftarrow \text{Recordar } \lambda Q = 0) \end{cases}$$

Por resultado del semestre pasado,

$$\nu_j \geq \gamma_j^i \quad (**)$$

(ver Norris ???).

De (**), se sigue que

$$m_i = \mathbb{E}_i[T_i] = \sum_{j \in E} \mu_j^i = \sum_{j \in I} \frac{\gamma_j^i}{q_j}$$

$$\leq \sum_{j \in I} \frac{\nu_j}{q_j} = \sum_{j \in I} \frac{\lambda_j}{\lambda_i q_i} = \frac{1}{\lambda_i q_i} \sum_{j \in I} \lambda_j$$

$$= \frac{1}{\lambda_i q_i} < \infty$$

$\Rightarrow$ recurrencia positiva $(\mathbb{E}_i[T_i] < \infty)$.

Teorema

Supongamos que Q es irreducible y recurrente. Entonces, para $s>0$, es equivalente

i) $\lambda Q = 0$

ii) $\lambda \mathbb{P}(s) = \lambda$.

Prueba:

1º caso $\# E < \infty$:

$$\frac{d}{ds} \lambda \mathbb{P}(s) = \lambda \frac{d}{ds} \mathbb{P}(s) = \lambda Q \mathbb{P}(s) \overset{\lambda Q = 0}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda \mathbb{P}(s)$ es constante

$\Rightarrow \lambda \mathbb{P}(s) = \lambda \mathbb{P}(0) = \lambda \qquad \forall \; s>0.$

Convergencia al equilibrio

La clase pasada:

- Condiciones para existencia de λ dist. invariante
- $\lambda Q = 0 \underset{\text{bajo ciertos supuestos}}{\Longrightarrow} \lambda P(s) = \lambda$, para $s > 0$.

#

Teorema:

Si Q es una Q matriz no explosiva e irreducible con dist. invariante λ, entonces si X es una cadena de Markov (λ, Q). Entonces $\{X_{s+t}\}_{t\geq 0}$ también lo es (para todo $s \geq 0$).

Dem:

Para $i \in E$.

$$\mathbb{P}[X_s = i] = (\lambda \mathbb{P}(s))_i = \lambda_i$$

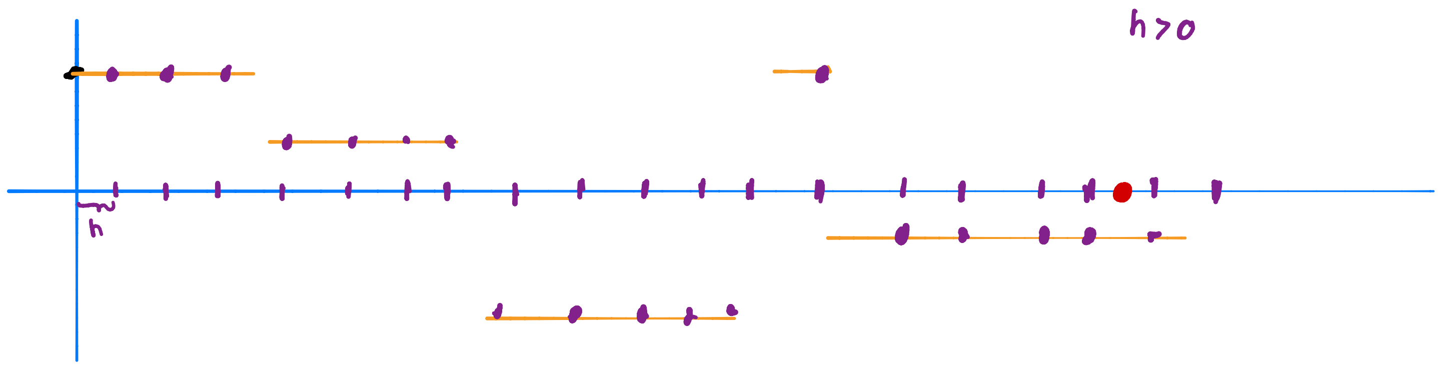
Por la propiedad de Markov, condicionado en $X_s = i$,

$\{X_{s+t}\}_{t\geq 0}$ es Markov (δ_i, Q).

Convergencia al equilibrio:

Objetivo:

Analizar $\mathbb{P}_{i,j}(t)$ con $t \approx \infty$:



Lema:

Sea Q una Q matriz que genera el semigrupo $\mathbb{P}(t)$.
Entonces $\forall\, t, h \geq 0$,

$$|\mathbb{P}_{i,j}(t) - \mathbb{P}_{i,j}(t+h)| \leq \left(1 - e^{-q_i h}\right)$$

Prueba:

$$|\mathbb{P}_{i,j}(t+h) - \mathbb{P}_{i,j}(t)| = \left| \sum_{k \in E} \mathbb{P}_{i,k}(h)\, \mathbb{P}_{k,j}(t) - \mathbb{P}_{i,j}(t) \right|$$

$$= \left| \sum_{k \in E \setminus \{i\}} \mathbb{P}_{i,k}(h) \underbrace{\mathbb{P}_{k,j}(t)}_{\leq 1} - \underbrace{\mathbb{P}_{i,j}(t)}_{\leq 1} \left(1 - \mathbb{P}_{i,i}(h)\right) \right|$$

$$\leq \max \left\{ \sum_{k \in E \setminus \{i\}} \mathbb{P}_{i,k}(h),\ \left(1 - \mathbb{P}_{i,i}(h)\right) \right\} \leq 1 - \mathbb{P}_{i,i}(h)$$

Teorema de conv. al equilibrio 1:

Sea Q una matriz irreducible no explosiva con semigrupo $\mathbb{P}(t)$. y con ley inicial δ_i, $i \in E$ y dist. invariante λ. Enlonces

$$\mathbb{P}_{i,j}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \lambda_j \qquad \forall \quad j \in E.$$

prueba

Sea $h>0$. y consideremos el proceso $Z_n = \{X_{nh}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Se vió con Jesús que Z_n es una cadena de Markov.

Notar que:

- Z_n es irreducible
- $\mathbb{P}_{i,j}(h) > 0 \quad \forall \quad i,j \in E.$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}_i[Z_1 = j] > 0$$

$\Rightarrow$ $\{Z_n\}_n$ es aperiodica e irreducible.

Por $\oplus$, Z_n tiene distribución invariante λ,

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{i,j}(nh) = \mathbb{P}_i[Z_n = j] \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_j.$$

Para finalizar,

Fijamos un estado i. Entonces,

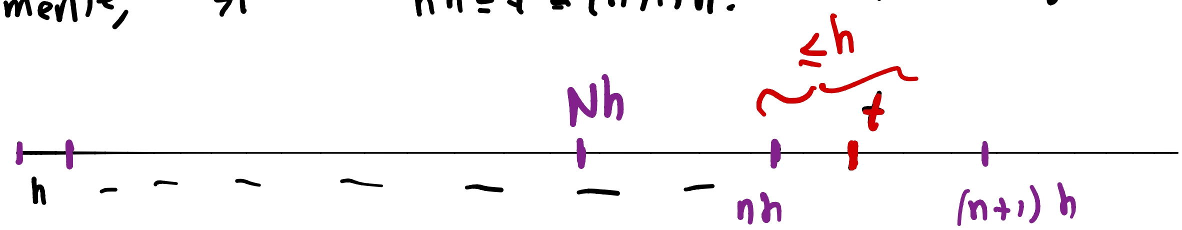
$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ h > 0$ t.q.

$2(1 - e^{-q_i s}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para $0 \leq s \leq h$

Además, por la conv. al equilibrio de Z, puedo tomar $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall \ n \geq N$,

$|\mathbb{P}_{i,j}(nh) - \lambda_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Finalmente, si $nh \leq t \leq (n+1)h$. (ver dibujo)



$|\mathbb{P}_{i,j}(t) - \lambda_j| \leq |\mathbb{P}_{i,j}(t) - \mathbb{P}_{i,j}(nh)| + |\mathbb{P}_{i,j}(nh) - \lambda_j|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\therefore \quad \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}_{i,j}(t) = \lambda_j$ ∎

Teorema: (convergencia al equilibrio general).

Sea Q irreducible y sea γ una distrib. inicial. Supongamos que X es Markov(γ, Q). Si X es no explosivo, entonces

$$\mathbb{P}[X_t = j] \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{q_j m_j} \qquad m_j = E_j[T_j]$$

Dem:

Se hará en otra ocasión.

Teorema ergódico:

Motivación:

$X_t = \#$ camiones repartidores funcionando. (ejemplo del miércoles)

Puedo considerar, por ejemplo una función de pasado costo $f: \underbrace{E}_{=\{1,\dots,8\}} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$\int_0^t f(X_s)\,ds \leftarrow \text{costo acumulado del proceso.}$$

Teorema:

Sea Q una Q-matriz irreducible, no explosiva y cualquier distribución inicial. Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es Markov (ν, Q).

Entonces

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{m_i q_i}\right] = 1$$

Además, en el caso recurrente positivo

Si $f: E \to \mathbb{R}$ t.q. $\sum_{i\in E} |f_i| \underbrace{\lambda_i}_{\text{dist. invariante}} < \infty$.

entonces

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds \xrightarrow{t\to\infty} \sum_{i\in E} f_i\lambda_i =: \bar{f}\right] = 1$$

prueba:

Si Q es transitorio, entonces el tiempo que pasa X en un estado $i\in E$ es finito.

$$\Rightarrow \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds \leq \frac{1}{t}\underbrace{\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds}_{<\infty} \xrightarrow{t\to\infty} 0 = \frac{1}{q_i m_i}$$

Supongamos que Q es recurrente y tomamos $i\in E$.

Entonces X va a llegar a i con probabilidad 1. y

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds = \int_{T_i}^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds. \qquad \text{en } \{T_i < t\}$$

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds = \int_{T_i}^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds. \qquad \text{en } \{T_i < t\}$$

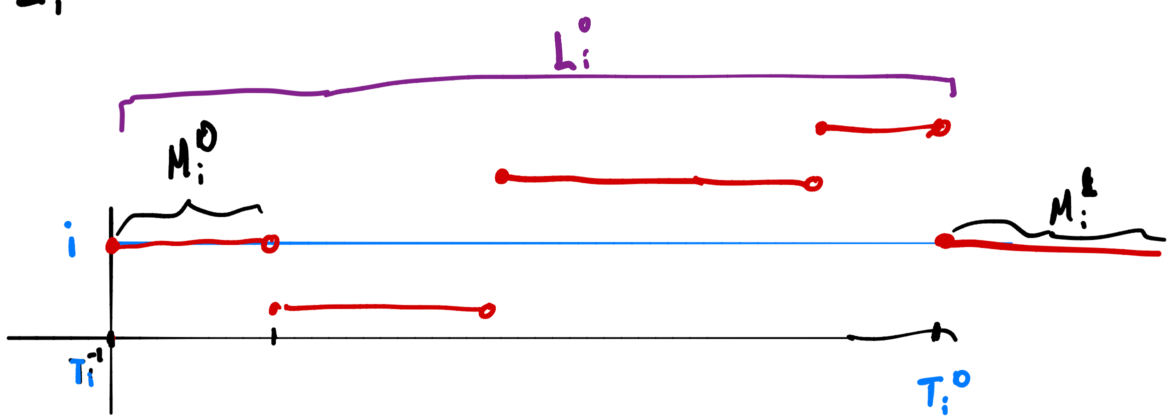
Por la propiedad de Markov fuerte,
basta considerar el caso $\nu = \delta_i$

Denotemos por

M_i^{n+1} = tamaño de la n-ésima visita a i.

T_i^{n+1} = tiempo del n-ésimo retorno a i

L_i^{n+1} = Tamaño de la n-ésima excursion a i



La idea de la prueba:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds \overset{t\approx\infty}{\approx} \frac{M_i^0+\cdots+M_i^{n+1}}{L_i^0+\cdots+L_i^{n+1}}$$

Formalización:

Notar que $\{L_i^k\}_{k\geq 0}$ y $\{M_i^k\}_{k\geq 0}$ son sucesiones de v.a.i.i.d. Por lo tanto

ley de los grandes números (ley fuerte)

$$\frac{L_i^1+\cdots+L_i^n}{n} \xrightarrow[c.s]{} \mathbb{E}[L_i^0] = m_i = \mathbb{E}_i[\text{tiempo de retorno a } i]. \quad (*)$$

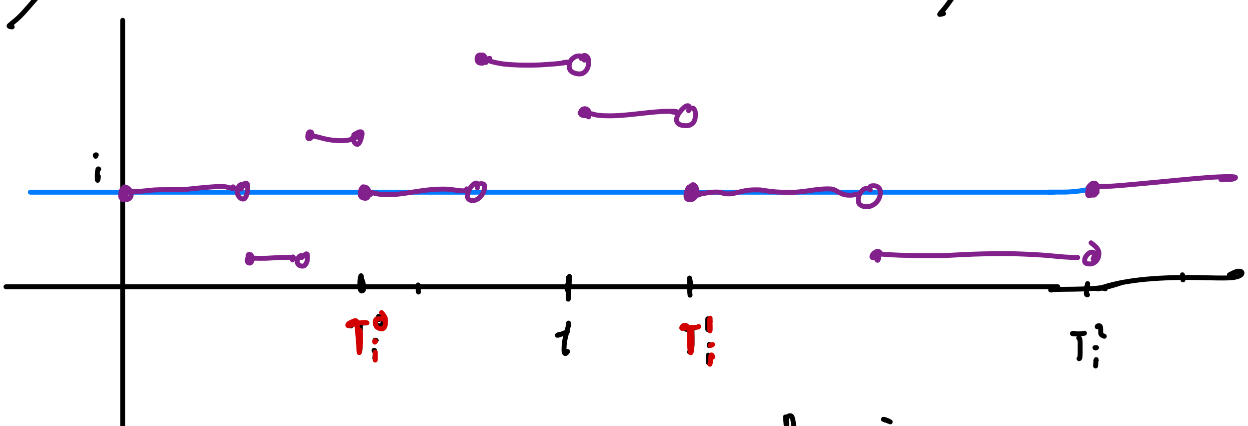
Adicionalmente,

$$\frac{M_i^1+\cdots+M_i^n}{n} \xrightarrow{c.s} \frac{1}{q_i} \quad (**)$$

es decir $(*)$ y $(**)$ se cumplen con probabilidad 1.

Ahora, notar que si $T_i^n \leq t < T_i^{n+1}$

$$\overset{\nearrow 1}{\frac{T_i^n}{T_i^{n+1}}}\;\overset{\nearrow \frac{1}{m_i q_i}}{\frac{M_i^1+\cdots+M_i^n}{L_i^1+\cdots+L_i^n}} \leq \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds \leq \overset{\nearrow 1}{\frac{T_i^{n+1}}{T_i^n}}\cdot\overset{\nearrow \frac{1}{m_i q_i}}{\frac{M_i^1+\cdots+M_i^{n+1}}{L_i^1+\cdots+L_i^n}}$$



Notar que

$$\frac{M_i^1+\cdots+M_i^n}{L_i^1+\cdots+L_i^n} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n M_i^j}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n L_i^j} \longrightarrow \frac{1}{m_i q_i}$$

Similarmente,

$$\frac{M_i^1+\cdots+M_i^{n+1}}{L_i^1+\cdots+L_i^n} \longrightarrow \frac{1}{m_i q_i}.$$

Adicionalmente,

$$\frac{T_i^n}{T_i^{n+1}} = \frac{\overbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} L_i^j}^{T_i^n} \to m_i}{\frac{n+1}{n}\to 1 \cdot \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} L_i^j \to m_i} = 1$$

caso recurrente positivo, esto se vale.

caso recurrente nulo:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds \le \frac{M_i^1+\dots+M_i^n}{t} \le \frac{\frac{M_i^1+\dots+M_i^n}{n}}{\left(\frac{T_i^n}{n}\right)} \to 0$$

Por comparación,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}}\,ds \to \frac{1}{q_i m_i} \checkmark$$

Justificación de la segunda parte:

Por convergencia al equilibrio: hay una distribución invariante dada por $\lambda_i = \frac{1}{q_i m_i}$.

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\,ds - \sum_{i\in E} f_i\lambda_i$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i\in E} f_i \left(\mathbb{1}_{\{X_s=i\}} - \lambda_i\right) ds$$

$$= \sum_{i\in E} \frac{1}{t} f_i \int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{X_s=i\}} - \lambda_i\right) ds$$

justificación con un arg. de teoría de la medida

$$\overset{t\to\infty}{=} \sum_{i\in E} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} f_i \int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{X_s=i\}} - \lambda_i\right) ds = 0$$

$\blacksquare$

Ejemplos:

Procesos de nacimiento y muerte

Un proceso de nacimiento es una cadena de Markov de saltos puros no decreciente t.

$\mathbb{P}) X_t = n+1 \mid X_0 = n) = \lambda_n h + o(h)$. También podemos incluir muertes en el modelo: Supongamos que X_t es el # de individuos "vivos" al tiempo t y que evoluciona de la siguiente manera:

(a) X_t es proceso de Markov de saltos puros con $E = \{0, 1, \dots\}$.

(b)
$$\mathbb{P}[X_{t+h} = n+m \mid X_t = n] = \begin{cases} \lambda_n h + o(h) & \text{si } m = 1 \\ \mu_n h + o(h) & \text{si } m = -1 \\ o(h) & \text{si } |m| \geq 2. \end{cases}$$

c) las tasas de nacimiento y muerte satisfacen

$\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$, y $\mu_0 = 0$

Dicho proceso se conoce como proceso de nacimiento y muerte.

La Q-matriz asociada es

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \vdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3+\lambda_3) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

Nota: en muchos casos (en modelación), $\lambda_0 = 0$ y ello corresponde a tener un estado absorbente y la cadena no es irreducible.

Consideraremos el caso no irreducible:

Obs 1:
En general calcular $P_{i,j}(t)$ explícitamente es muy difícil.

pero ver que pasa con $P_{i,j}(t)$ cuando $t \approx \infty$ es abordable: $\longleftrightarrow$ calcular vector invariante.

Cómo calcularlo:

$\pi Q = 0 \qquad \pi = (\pi_0, \pi_1, \dots).$

$-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 = 0$

$\lambda_{n-1} \pi_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \mu_{n+1} \pi_{n+1} = 0 \qquad \#$

Supongamos que π_0 está dado

$\pi_1 = \pi_0 \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}$

ahora, por $\#$,

$\lambda_0 \pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1) \underbrace{\pi_1}_{= \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1}} + \mu_2 \pi_2 = 0$

$\vdots$

$\pi_2 = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0$

Por inducción:

$\pi_n = \dfrac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \pi_0 \quad \leftarrow$ vector invariante $\forall\ \pi_0 > 0$

¿Qué necesitamos para obtener una dist. invariante?

Tomar

$$\tilde{\pi}_n = \frac{\pi_n}{\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k} = \frac{\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \cdot \cancel{\pi_0}}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} \right) \cdot \cancel{\pi_0}}$$

lo necesitamos finito

$\Updownarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} < \infty$$

Distribución invariante si y sólo si $\rightarrow$

Nota adicional:

¿Cómo construir una cadena de nacimiento y muerte? (pensar en simulación en comput.)

Recordar que

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3+\lambda_3) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

0:) Empezar en el estado $K \geq 1$

1:) Simular una exponencial $\tau_0 \sim \exp(\lambda_K + \mu_K)$.

2:) al terminar τ_0, saltamos a

$$\begin{cases} K+1 & \text{con probabilidad } \dfrac{\lambda_K}{\lambda_K+\mu_K} \\ K-1 & \text{con probabilidad } \dfrac{\mu_K}{\lambda_K+\mu_K} \end{cases}$$

3:) continuamos por inducción.

Ejemplo: Muerte simple con immigración

Vamos a empezar en $X_0 = k$, (i.e. tenemos una población inicial de k individuos).

Los individuos no se reproducen; pero

- Nuevos individuos pueden inmigrar a la población de acuerdo a un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

- Cada individuo muere en el intervalo $(t, t+h]$ con probabilidad $\mu h + o(h)$. Las probabilidades de transición de X satisfacen

Nota: todos los elementos (inmigración y muertes son independientes).

$\mathbb{P}_{i,j}(h) = \mathbb{P}[X_{t+h} = j \mid X_t = i]$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}[\,j-i \text{ llegadas, no muertes}] + o(h) & \text{si } j \geq i. \\ \mathbb{P}[\,i-j \text{ muertes, no llegadas}] + o(h) & \text{si } j < i. \end{cases}$$

Similar al proceso Poisson, las probabilidades de que dos o más cambios ocurran en $(t, t+h)$ es $o(h)$. Entonces

$\mathbb{P}_{i,i+1}(h) = \lambda h + o(h)$

$\mathbb{P}_{i,i-1}(h) = \mathbb{P}[\text{haya una muerte}]$

$= \mathbb{P}[\text{alguno de los } i \text{ individuos muera}] = i\mu h + o(h).$

$\mathbb{P}_{i,j}(h) = o(h)$. si $|j-i| > 1$.

X es entonces una cadena de nacimiento y muerte

con $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n\mu$.

Es una cadena irreducible. (Nota: se puede ver que es no explosiva).

Aseveración: X tiene una distribución límite, que es Poisson de parámetro $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Justificación:

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \pi_0 = \frac{\lambda^n}{(1\cdot\mu)(2\cdot\mu)\cdots(n\cdot\mu)} \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \pi_0 .$$

Normalizando π_n obtenemos el resultado.

Cadenas de nacimiento y muerte simples:

Supongamos que cada individuo que está vivo al tiempo t muere en $(t, t+h)$ con probabilidad $\mu h + o(h)$ o se biparte con probabilidad $\lambda h + o(h)$. Diferentes individuos se comportan de manera independiente.

Las probabilidades de transición son

$$\mathbb{P}_{i,i+1}(h) = \lambda i h + o(h)$$

$$\mathbb{P}_{i,i-1}(h) = \mu i h + o(h).$$

X = # de individuos es una cadena de nacimiento y muerte con $\lambda_n = n\lambda$ y $\mu_n = n\mu$.

Suponer que $X_0 = K > 0$. El estado 0 es absorbente.

¡¡¡ Se puede calcular la función generadora !!!

Fórmula:

$$G(s,t) = \mathbb{E}\left[s^{X_t} \right] = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda t(1-s) + s}{\lambda t(1-s)+1} \right)^{k} & \text{si } \mu = \lambda \quad \# \\[2ex] \left(\dfrac{\mu(1-s) - (\mu - \lambda s)\, e^{-t(\lambda-\mu)}}{\lambda(1-s) - (\mu - \lambda s)\, e^{-t(\lambda-\mu)}} \right)^{k} & \text{si } \mu \neq \lambda. \end{cases}$$

Justificación

Si $i,j \in E = \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, escribimos las ecuación forward

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\, Q$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}'_{i,j}(t) = \lambda(j-1)\, \mathbb{P}_{i,j-1}(t) - (\lambda+\mu) j\, \mathbb{P}_{i,j}(t) + \mu(j+1)\, \mathbb{P}_{i,j+1}(t) \quad \text{si } j \geq 1$$

$$\mathbb{P}'_0(t) = \mu\, \mathbb{P}_{i,1}(t)$$

Definiendo $\mathbb{P}_j(t) = \mathbb{P}[X_t = j]$, se tiene que

$$\begin{cases} \mathbb{P}_j'(t) = \lambda(j-1)\mathbb{P}_{j-1}(t) - (\lambda+\mu)j\,\mathbb{P}_j(t) + \mu(j+1)\mathbb{P}_{j+1}(t) \\ \mathbb{P}_0'(t) = \mu\,\mathbb{P}_1(t) \end{cases}$$

Multiplicando por s^j y sumando sobre j obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}_j'(t) = \lambda s^2 \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) s^{j-2}\mathbb{P}_{j-1}(t) - (\lambda+\mu) s \sum_{j=0}^{\infty} j s^{j-1}\mathbb{P}_j(t).$$

$$+ \mu \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) s^j \mathbb{P}_{j+1}(t)$$

Interpretando los términos de las sumas como derivadas...

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda s \frac{\partial G}{\partial s} - (\lambda+\mu) s \frac{\partial G}{\partial s} + \mu \frac{\partial G}{\partial s} = (\lambda s - \mu)(s-1)\frac{\partial G}{\partial s}$$

Tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (\lambda s - \mu)(s-1)\frac{\partial G}{\partial s}$$

y tenemos la condición de frontera

$G(s,0) = s^K$. Se puede ver que (#) es la única solución

Para encontrar media y varianza

media:

$$\frac{\partial G}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}[s^{X_t}] = \mathbb{E}[X_t s^{X_t - 1}]$$

Calculando $\frac{\partial G}{\partial s}(s,t)$ y evaluando en $s=1$ obtenemos

$$\mathbb{E}[X_t] = \begin{cases} K & \text{si} \quad \mu = \lambda \\ K e^{t(\lambda-\mu)} & \text{si} \quad \mu \neq \lambda \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}[X_t] = \begin{cases} 2K\lambda t & \text{si} \quad \lambda = \mu \\ K\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right] & \text{si} \quad \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

Notar que si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$,

$$\mathbb{E}[X_t] = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 1 \\ \infty & \text{si } \rho > 1. \end{cases}$$

La probabilidad de extinción $\eta(t) = \mathbb{P}[X_t = 0]$. Satisface

$$\eta(t) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + 1}\right)^K & \text{si } \lambda = \mu \\ \left(\frac{\mu - \mu e^{-t(\lambda - \mu)}}{\lambda - \mu e^{-t(\lambda - \mu)}}\right)^K & \text{si } \mu \neq \lambda \end{cases}$$

evaluar $\mathbb{E}[s^{X_t}]$ en $s = 0$

$$G(0,t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_t = 0\}}] = \mathbb{P}[X_t = 0].$$

Notar que

$$\eta(t) \xrightarrow{t \to \infty} \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq \mu \\ \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^K & \text{si } \lambda > \mu \end{cases}$$