


Cadenas de Markov a tiempo continuo

Objetivo: generalizar la noción de cadenas de Markov discretas en espacio de estados discreto, y definidas sobre un parámetro continuo.

Es decir, lo mínimo que buscamos es estudiar procesos

$X = \{X_t; t \geq 0\}$ con valores en un conjunto discreto E , que satisfagan

la propiedad de Markov:

$$\forall \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s < \infty \quad \forall \quad x_0, \dots, x_n, x, y \in E,$$

$$P[X_t = y \mid X_s = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n] = P[X_t = y \mid X_s = x]. \quad \oplus$$

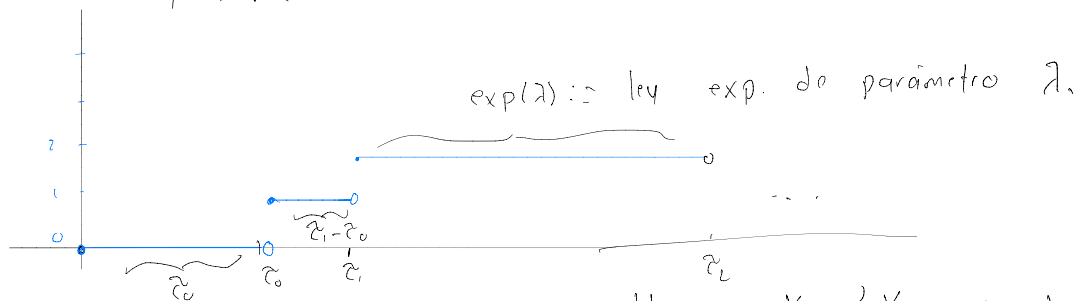
Ejemplo fundamental:

$X = N = \{N_t; t \geq 0\}$ es un proceso Poisson.

$E = N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. La propiedad \oplus se satisface por su curso de estados pasados.

Construcción de un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

trayectoria de N :



Construcción de un proceso de saltos $X = \{X_t, t \geq 0\}$. con valores E :

Sea $x_0, x_1, x_2, \dots \in E$ $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2, \dots \in \mathbb{R}_+$

i) Empieza en x_0 ($X_0 = x_0$)

ii) Esperamos un tiempo τ_0 , y luego X "salta" a otro estado.

(Voy a permitir que $\tau_0 = \infty$, en cuyo caso, X permanece en x_0 siempre.

Si $\tau_0 < \infty$, voy al paso iii)

iii) Salto al estado x_1 en el tiempo τ_0

iii) Esperamos un tiempo $\tau_1 - \tau_0$, y luego X "salta" a otro estado.

(Voy a permitir que $\tau_1 = \infty$, en cuyo caso, X permanece en x_1 siempre.

Si $\tau_1 < \infty$, voy al paso siguiente.

⋮

n) Procedemos inductivamente.

Formalmente, estamos definiendo:

$$X_t := \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_0 \\ x_1 & \text{si } \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ x_2 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Ejemplo: # de botes de una pelota:

Supongamos que el tiempo entre el bote n y $n+1$ de un balón es de 2^{-n} . Sea $X_t = \#$ botes al tiempo t . $E = \mathbb{N}_0$

(aquí $x_0=0, x_1=1, x_2=2, \dots, x_j=j$).

$$\tau_n = \sum_{k=0}^n 2^{-k} = 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2$$

X solo está definido en $[0, 2]$; En este caso decimos que el modelo de saltos explota. Para ajustar la def. de X , consideramos el nuevo espacio de estados $E \cup \{\infty\}$, y definamos

$$X_t := \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_0 \\ x_1 & \text{si } \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ x_2 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \infty & \text{si } \lim_n \tau_n \leq t \end{cases}$$

Introduciendo estocasticidad.

Separamos E en estados que llamaremos "absorbentes" y

"no absorbentes".

(Pensar en proceso Poisson como ejemplo).

a cada $x \in E$ le asocio una distribución $F_x(t)$, de una v.a. positiva, y consideramos "probabilidades de transición"

$$\pi_{x,y} \quad y \in E \setminus \{x\}, \quad (\pi_{x,y} > 0 \quad y \quad \sum_{y \in E \setminus \{x\}} \pi_{x,y} = 1, \quad \pi_{x,x} = 0.)$$

La cadena salta a y con prob $\pi_{x,y}$

(Pensar $\tau_0 \sim F_x$.) y que $\mathbb{P}[X_{\tau_0} = y] = \pi_{x,y}$.

Supondremos que X_{τ_0} es independiente del tiempo τ_0 . En particular,

$$\mathbb{P}[\tau_0 \leq t, X_{\tau_0} = y \mid X_0 = x] =: \mathbb{P}_x[\tau_0 \leq t, X_{\tau_0} = y] = F_x(t) \pi_{x,y}.$$

Si x_0 es absorbente, haremos $X_t = x_0 \quad \forall \quad t \geq \tau_0$.

Sólo si x_0 no es absorbente hacemos la transición en τ_0 .

seguimos la construcción inductivamente.

Suposición: con probabilidad 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ (caso no explosivos).

A un proceso con estas propiedades le llamaremos proceso de saltos puro.

Notación:

$$P_{x,y}(t) := P_x [X_t = y] = P [X_t = y \mid X_0 = x], \quad t > 0, \quad x, y \in E$$

$$P_{x,y}(0) = \delta_{x,y} := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Vamos a poner una ley inicial $\nu_0(x)$, $x \in E$ al valor de X_0 . independiente de $\tau_0, \tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_1, \dots$, y de las transiciones.

Resumiendo:

• $X_0, \tau_0, \tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_1, \dots, X_{\tau_0}, X_{\tau_1}, \dots$ son variables independientes.

Estamos interesados en procesos que satisfacen

$$\forall \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < s < t < \infty \quad \forall \quad x_0, \dots, x_n, x, y \in E,$$

$$P [X_t = y \mid X_s = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = x_n] = P [X_t = y \mid X_s = x] = P_x [X_{t-s} = y] = P_{x,y}(t-s)$$

Lemma:

Si $\{X_t; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov de saltos puro
(es decir, de saltos puros con propiedad de Markov,

y si $x \in E$ es no absorbente, entonces

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t] = \mathbb{P}_x[\tau_0 > s] \quad \forall s, t > 0.$$

$\Rightarrow \tau_0$ tiene distribución exponencial. (Ver prueba de esto en libro de Norris).

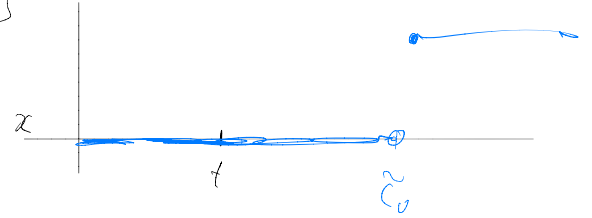
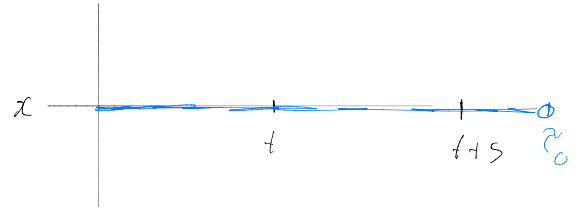
prueba: (idea)

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t]$$

$$= \mathbb{P}_x[X_u = x \quad \forall u \in (t, t+s) \mid X_u = x \quad \forall u \in [0, t]]$$

$$\stackrel{\text{propiedad de Markov}}{=} \mathbb{P}_x[X_u = x \quad \forall u \in [0, s]] = \mathbb{P}_x[\tau_0 > s] \quad \square$$

propiedad de Markov (Paso delicado)



Lemma:

Si $\{X_t; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov de saltos puro
(es decir, de saltos puros con propiedad de Markov,

y si $x \in E$ es no absorbente, entonces

$$\mathbb{P}_x[\tau_0 > t+s \mid \tau_0 > t] = \mathbb{P}_x[\tau_0 > s] \quad \forall s, t > 0.$$

$\Rightarrow \tau_0$ tiene distribución exponencial. (Ver prueba de esto en libro de Norris).

\uparrow
clase pasada. Nota: los tiempos entre saltos para x
siempre son exponenciales si se tiene propiedad de Markov.

Nota:

Si $X_0 = x$, entonces $\tau_0 \sim \text{exponencial}$. La intensidad depende de x , y se denotará por q_x .

i.e. $\tau_0 \sim \exp(q_x)$ (iniciando la cadena en x).

convención: $q_x = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_0]}$.

La propiedad de Markov nos permite escribir

Chapman-Kolmogorov.

$$P[X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1]$$

$$= P[X_{t_1} = x_1] P_{x_1, x_2}(t_2 - t_1) \dots P_{x_{n-1}, x_n}(t_n - t_{n-1}).$$

La familia de matrices $\{P(t), t \geq 0\}$ satisface la prop. de semigrupo (pensar $P(t) = [P_{x,y}(t); x, y \in E]$)

$$P(t) \cdot P(s) = P(t+s)$$

justificación:

$$P_{x,y}(t+s) = P_x[X_{t+s} = y] = \sum_{z \in E} P_x[X_t = z] P_z[X_s = y] = (P(s)P(t))_{x,y}$$

Lemma 2.2.

$$P_{x,y}(t) = \delta_{x,y} e^{-q_x t} + \int_0^t q_x e^{-q_x s} \left(\sum_{z \in E \setminus \{x\}} \Pi_{x,z} P_{z,y}(t-s) \right) ds$$

prueba:

$$P_{x,y}(t) = P_x \{X_t = y \mid X_0 = x\} = P_x \{X_t = y, \tau_0 > t\} + P_x \{X_t = y, \tau_0 \leq t\}$$

$$= \delta_{x,y} P_x \{\tau_0 > t\} + \int_0^t P_x \{X_t = y \mid \tau_0 = s\} q_x e^{-q_x s} ds$$

$$= \delta_{x,y} e^{-q_x t} + \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t P_x \{X_t = y, X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s\} q_x e^{-q_x s} ds$$

$$= \delta_{x,y} e^{-q_x t} + \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \underbrace{P_x \{X_{t-s+\tau_0} = y, X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s\}}_{\substack{P_{z,y}(t-s) \\ \leftarrow P_x \{X_{t-s+\tau_0} = y \mid X_{\tau_0+0} = z, \tau_0 = s\}}}} q_x e^{-q_x s} ds$$

$$P_{z,y}(t-s) \leftarrow P_x \{X_{t-s+\tau_0} = y \mid X_{\tau_0+0} = z, \tau_0 = s\}$$

$$\Pi_{x,z} \leftarrow P_x \{X_{\tau_0} = z \mid \tau_0 = s\}$$

Nota: $X_{\nu+\tau_0}$ por construcción, es un proceso de Markov de saltos puro que empieza en $X_{\tau_0} = z$

$$= \delta_{x,y} e^{-q_x t} + \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \Pi_{x,z} P_{z,y}(t-s) q_x e^{-q_x s} ds \quad \square$$

Consecuencia:

haciendo un cambio de variable,

$$u = t - s$$

$$s = t - u$$

$$P_{x,y}(t) = \delta_{x,y} e^{-q_x t} + \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \pi_{x,z} P_{z,y}(u) q_z e^{-q_x(t-u)} du$$

$$= \delta_{x,y} e^{-q_x t} + e^{-q_x t} \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \pi_{x,z} P_{z,y}(u) q_z e^{q_x u} du$$

Notar que

$$t \mapsto \int_0^t \pi_{x,z} P_{z,y}(u) q_z e^{q_x u} du \text{ es continuo.}$$

$\Rightarrow P_{x,y}(t)$ continuo

$\Rightarrow \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \pi_{x,z} P_{z,y}(u) q_z e^{q_x u} du$ es derivable en t .

$$\Rightarrow \delta_{x,y} e^{-q_x t} + e^{-q_x t} \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \int_0^t \pi_{x,z} P_{z,y}(u) q_z e^{q_x u} du = P_{x,y}(t)$$

es derivable en t .

Cálculo de la derivada

$$P_{x,y}'(t)$$

$$= \delta_{x,y} (-q_x) e^{-q_x t}$$

$$+ (-q_x) e^{-q_x t} \int_0^t \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \pi_{x,z} P_{z,y}(u) q_z e^{q_z u} du \quad \textcircled{*}$$

$$+ e^{-q_x t} \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \pi_{x,z} P_{z,y}(t) q_z e^{q_z t}$$

$$\Rightarrow P_{x,y}'(0) = -\delta_{x,y} q_x + q_x \sum_{z \in E \setminus \{x\}} \pi_{x,z} \underbrace{P_{z,y}(0)}_{= \delta_{z,y}}$$

$$\Rightarrow P_{x,y}'(0) = -\delta_{x,y} q_x + q_x \pi_{x,y} \quad \forall x, y \in E$$

Notación:

Definiremos:

$$Q_{x,y} := P_{x,y}'(0) = \begin{cases} -q_x & \text{si } x=y \\ q_x \pi_{x,y} & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

La familia $Q = \{Q_{x,y} ; x, y \in E\}$ se conoce como Q -matriz. La ecuación $\textcircled{*}$ se escribe entonces como

$$P_{x,y}'(t) = \sum_{z \in E} Q_{x,z} P_{z,y}(t) = (Q P(t))_{x,y}$$

Nota: Conocer Q , junto a la ley inicial determina la ley de la matriz.

$$\Leftrightarrow P'(t) = Q P(t)$$

Por otro lado, derivando la expresión, y luego evaluando en $s=0$, obtenemos

$$P_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in E} P_{x,z}(t) P_{z,y}(s),$$

evaluando en $s=0$, obtenemos

$$P_{x,y}'(t) = \sum_{z \in E} P_{x,z}(t) Q_{z,y} = (PG)_{x,y}$$

ecuación forward.

La ecuación backward la pueden obtener usando

$$P_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in E} P_{x,z}(t) P_{z,y}(s),$$

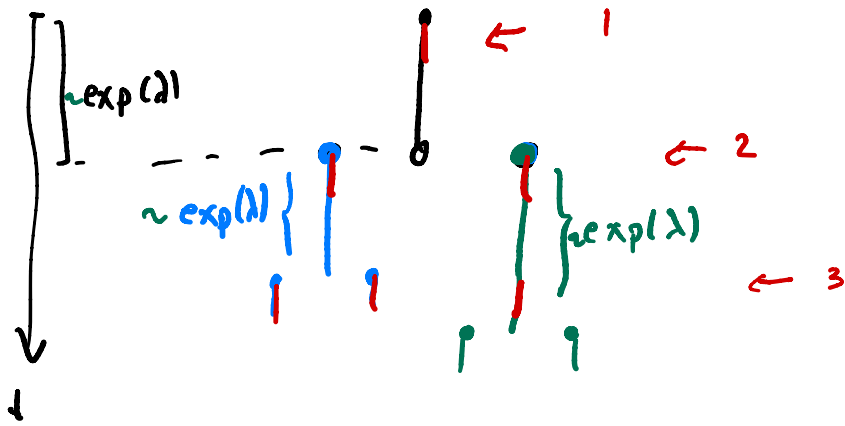
pero derivando con respecto a t .

Ejemplo:

Proceso de Yule:

i) Tenemos 1 partícula

ii) La partícula se biparte en un tiempo exponencial de parámetro $\lambda > 0$.



iii) Cada individuo nuevo se biparte con dist. exponencial (λ).

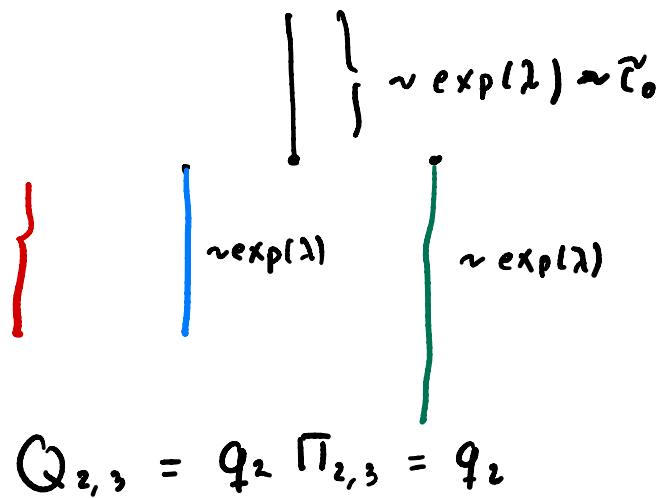
Los individuos actúan de manera independiente.

$X_t = \#$ de individuos al tiempo $t > 0$.

Nota: Se puede ver que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov de saltos puros.

Podemos calcular Q : (X_t siempre salta una unidad).

Sobre la pregunta en itempool.



$\Rightarrow z_1 - z_0$ se distribuye como el mínimo de la exponencial de la partícula azul y la verde.

$$\therefore z_1 - z_0 \sim \exp(\lambda + \lambda) -$$

Propiedades Fundamentales:

Def:

$X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ cadena de Markov de saltos puros
con valores en E (numerable). Tomar $x, y \in E$.

Decimos que " $x \rightarrow y$ " o que " x accede a y ", si

$$\mathbb{P}_x[X_t = y \text{ para algún } t \geq 0] > 0.$$

Def:

El proceso $Y = \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con valores en E , definido como

$Y_n := X_{\tau_n}$ se conoce como la cadena de saltos asociada a X .

Teorema:

$\forall x, y \in E$, con $x \neq y$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) x accede a y respecto a la cadena $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$

b) x accede a y respecto a la cadena $Y = \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

c) $Q_{x,x_1} Q_{x_1,x_2} \cdots Q_{x_{n-1},x_n} Q_{x_n,y} > 0$ para algunos $x_1, \dots, x_n \in E$.
para algunos estados $x_1, \dots, x_n \in E$ no absorbentes

d) $\mathbb{P}_{x,y}(t) = \mathbb{P}_x[X_t = y] > 0 \quad \forall t > 0$

e) $\mathbb{P}_{x,y}(t) > 0$ para algún $t > 0$.

Dem:

Primero probemos $a \Rightarrow b$.

a) x accede a y respecto a la cadena $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$

b) x accede a y respecto a la cadena $Y = \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$x \rightarrow y \Rightarrow \exists t > 0$ t.q. $X_t = y$ (comenzando en x).

\Rightarrow si $\tau_m < t \leq \tau_{m+1}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces

$Y_m = X_{\tau_m} = y \Rightarrow x \rightarrow y$ de acuerdo a Y .

ahora probemos $b) \Rightarrow c)$:

Si $x \rightarrow y$ de acuerdo a Y . $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in E$ t.q.

$$\prod_{x, x_1} \prod_{x_1, x_2} \dots \prod_{x_{n-1}, x_n} \prod_{x_n, y} > 0$$

(Recordar que la matriz de transición de Y es $\Pi = \{\pi_{x,y} \mid x, y \in E\}$)

Notar que para x_1, \dots, x_n no absorbentes.

$$\prod_{x,x} \prod_{x_1,x_2} \dots \prod_{x_{n-1},x_n} \prod_{x_n,y} > 0$$

$$\Leftrightarrow (q_x \prod_{x,x}) (q_{x_1} \prod_{x_1,x_2}) \dots (q_{x_n} \prod_{x_n,y}) > 0. \quad (*)$$

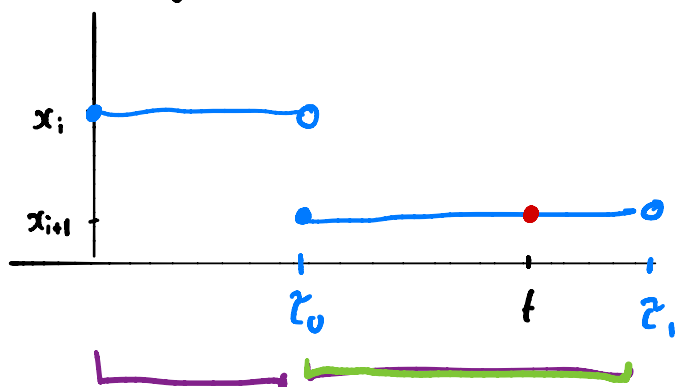
$$\Leftrightarrow Q_{x,x} \dots Q_{x_n,y} > 0.$$

Probamos c) \Rightarrow d):

Si c) se cumple, por (*), $\prod_{x,x} \prod_{x_1,x_2} \dots \prod_{x_{n-1},x_n} \prod_{x_n,y} > 0$

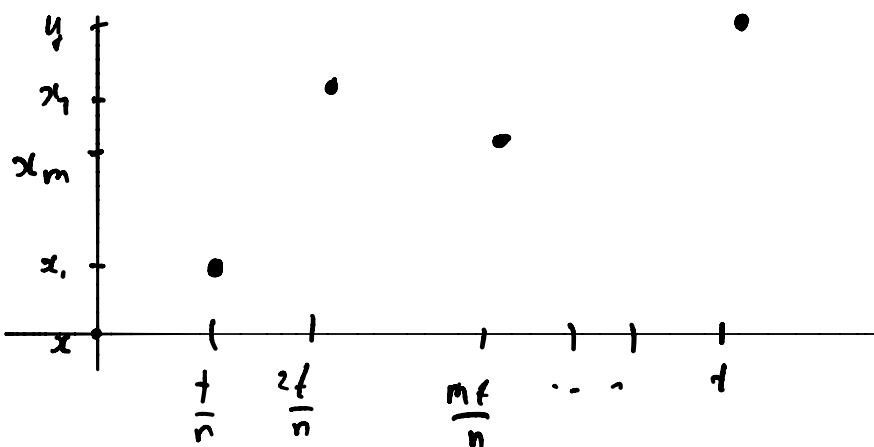
Ahora, notemos que $\forall t > 0$

$$P_{x_i, x_{i+1}}(t) \geq P_{x_i} \{ \tau_0 < t, X_{\tau_0} = x_{i+1}, \tau_1 > t \} = (1 - e^{-q_{x_i} t}) \prod_{x_i, x_{i+1}} e^{-q_{x_{i+1}} t} > 0$$



Entonces, por Chapman-Kolmogorov,

$$P_{x,y}(t) \geq P_{x,x}(\frac{t}{n}) P_{x_1,x_2}(\frac{t}{n}) \dots P_{x_n,y}(\frac{t}{n}) > 0, \quad \text{como requerido}$$



Tarea para mi: cómo se ve Π en estados absorbentes.

Tiempos de entrada: (Notación: $\inf \emptyset = \infty$)

$A \subseteq E$. La v.a.

$D^A = \inf \{t \geq 0; X_t \in A\}$ se conoce como tiempo de entrada a A . Adicionalmente, si $Y = \{Y_n\}_{n \geq 0}$ es la cadena de saltos subyacente,

$$H^A = \inf \{n \geq 1; Y_n \in A\}.$$

Cuando A es cerrada, entonces,

$P_i \{D^A < \infty\}$ se conoce como probabilidad de absorción.

Notar que $P_i \{D^A < \infty\} = P_i \{H^A < \infty\} =: h_i^A$

Teorema:

El vector de prob. de llegada $h_i^A = \{h_i^A; i \in E\}$ es la solución mínima del sistema

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{para } i \in A \\ \sum_{j \in E} Q_{i,j} h_j^A = 0 & \text{para } i \notin A. \end{cases}$$

↓ prueba

$$\sum_{j \in E \setminus \{i\}} q_i \overbrace{P_i \{Y_1 = j\}}^{\pi_{i,j}} h_j^A = h_i^A \Leftrightarrow \sum_{j \in E \setminus \{i\}} Q_{i,j} h_j^A = -Q_{i,i} h_i^A$$

El tiempo promedio que le toma a X llegar a A , empezando en i , lo denotaremos por

$$K_i^A = \mathbb{E}_i \{D^A\}.$$

¿Cómo calcular K_i^A ?

¿Cómo calcular K_i^A ?

Teorema:

Supongamos que $q_i > 0 \forall i \in A$. Entonces el vector de tiempos esperados de llegada

$K^A = \{K_i^A; i \in E\}$ es la solución mínima **no negativa** al sistema:

$$\begin{cases} K_i^A = 0 & \forall i \in A \\ - \sum_{j \in E} Q_{i,j} K_j^A = 1 & \text{para } i \notin A. \end{cases} \quad \textcircled{\oplus}$$

prueba:

primero mostramos que K^A satisface $\textcircled{\oplus}$:

Si $X_0 = i \notin A$: Entonces $D_i^A > \tau_0$. Por la propiedad de Markov,

$$E_i[D^A - \tau_0 | X_{\tau_0} = j] = E_i[D^A].$$

Esto implica que

$$K_i^A = E_i[D^A] = E_i[\tau_0] + \sum_{j \neq i} P_i[X_{\tau_0} = j] E_i[D^A - \tau_0 | X_{\tau_0} = j]$$

$$= \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \pi_{i,j} K_j^A. \quad \text{Multiplicamos por } q_i:$$

$$\text{para obtener } \underbrace{\frac{1}{q_i}}_{\widetilde{Q}_{i,i}} K_i^A - \sum_{j \neq i} \underbrace{q_i \pi_{i,j}}_{\widetilde{Q}_{i,j}} K_j^A = 1$$

Prueba de que es la solución mínima:

Suponer que $v = \{v_i; i \in E\}$ satisface

$$\begin{cases} v_i = 0 & \forall i \in A \\ - \sum_{j \in E} Q_{i,j} v_j = 1 & \text{para } i \notin A. \end{cases}$$

De aquí se sigue que: (como antes)

$$v_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in A}} \pi_{i,j} v_j = \frac{1}{q_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \pi_{i,j} \left(\frac{1}{q_j} + \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in A}} \pi_{j,k} v_k \right)$$

$$\frac{1}{q_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \pi_{i,j} \frac{1}{q_j} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in A}} \pi_{j,k} v_k$$

$$= E_i \left[\tau_0 \right] + E_i \left[(\tau_1 - \tau_0) \mathbb{1}_{\{H^A \geq 1\}} \right] + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \notin A}} \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in A}} \pi_{j,k} v_k$$

⋮

$n \geq 2$

$$= E_i \left[\tau_0 \right] + E_i \left[(\tau_1 - \tau_0) \mathbb{1}_{\{H^A \geq 1\}} \right] + \dots + E_i \left[(\tau_n - \tau_{n-1}) \mathbb{1}_{\{H^A \geq n\}} \right]$$

$$+ \sum_{j_1 \in A, \dots, j_n \in A} \pi_{i,j_1} \dots \pi_{j_{n-1},j_n} v_{j_n}$$

$$\geq E_i \left[\tau_0 \right] + E_i \left[(\tau_1 - \tau_0) \mathbb{1}_{\{H^A \geq 1\}} \right] + \dots + E_i \left[(\tau_n - \tau_{n-1}) \mathbb{1}_{\{H^A \geq n\}} \right]$$

$$\stackrel{\tau_i=0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E_i \left[(\tau_n - \tau_{n-1}) \mathbb{1}_{\{H^A \geq n\}} \right] = E_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n - \tau_{n-1} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{##} ,$$

donde

$$\textcircled{\#} = E_i \left[\underbrace{\sum_{m=0}^{N^A} (\tau_m - \tau_{m-1})}_{= D^A} \right] = E_i [D^A] = K_i^A$$

Conclusión:

$\gamma_i \geq K_i^A$, como se requería. \square

Aclaración de la clase pasada

Suponer $x, y \in E$, con x absorbente.

Por def, el tiempo de salto es infinito, una vez que llego a x . ($q_x = 0$).

$$\Pi_{x,y} := S_{x,y}$$

$$Q_{x,y} = \begin{cases} -q_x & \text{si } x=y \\ q_x \Pi_{x,y} & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Recurrencia y transitoriedad:

Def:

$i \in E$ es recurrente si

$$P_i \left[\{t; X_t = i\} \text{ es no acotado} \right] = 1$$

i es transitorio si

$$P_i \left[\{t; X_t = i\} \text{ es acotado} \right] = 1$$

Teorema:

i) Si $i \in E$ es recurrente para la cadena de saltos $Y = \{Y_n\}_{n \geq 0}$ ($Y_n := X_{\tau_n}$), entonces i es recurrente para la cadena $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$.

ii) Si $i \in E$ es transitorio para Y , también lo es para X .

Dem:

i) Si $i \in E$ es recurrente para Y , veremos que X no explota. Por el curso de cadenas pasado, Y_m regresa a "i" en tiempos $\{N_m\}_{m \geq 1}$ (i.e. $Y_{N_m} = i$).

Recordar que $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n - \tau_{n-1})$, con $\tau_{-1} := 0$

Nuestra cadena X , comenzará en i .

Definamos $T_m = q_{Y_{N_{m-1}}}(\tau_m - \tau_{m-1})$. Notar que T_m 's son exponenciales de parámetro λ .

Entonces,

$$q_i \tau = q_i \sum_{m=0}^{\infty} (\tau_m - \tau_{m-1}) \geq \sum_{m=1}^{\infty} q_i (\tau_{N_m} - \tau_{N_{m-1}})$$

↑
ignorar los
m's t.q. $Y_m \neq i$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} T_{N_m}$$

↑
exponenciales
indep. de parámetro λ

por ejercicio 1 de la tarea,
la cadena es
no-explósiva.
(pues $\tau = \infty$)

(Nota adicional):

En la tarea prueban que si $\{S_k\}_{k \geq 1}$ es una sucesión de v.a. exponenciales,

$S_k \sim \exp(\lambda_k)$. Entonces, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty, \text{ entonces } \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \infty \text{ con probabilidad } 1)$$

En el caso en que $S_k = T_{N_k} \sim \exp(1)$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} T_{N_k} = \infty$$

Sobre la recurrencia de X :

$X_{Z_n} = Y_n = i$ para un número infinito de n 's. Combinando esto con el hecho de que

$$Z_n \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

\Rightarrow recurrencia para X .

Transitoriedad:

Si i es transitorio para Y ; entonces

$$\sup \{m; Y_m = i\} \leq M \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow X_{Z_{M+l}} \neq i \quad \forall l \geq 1. \Rightarrow X_s \neq i \quad \forall s > Z_{M+l}$$

$$\Rightarrow \sup \{s; X_s = i\} \leq Z_{M+l} \Rightarrow \text{transitoriedad para } X.$$

Continuación del teorema previo:

- iii) Cada estado $x \in E$ es recurrente o transitorio (para X).
- iv) Recurrencia y transitoriedad son propiedades de clase.

Prueba:

iii) Suponer x es recurrente para X .

¿ x es recurrente para Y ? ¡si!

Luego, por el curso del semestre pasado,

$x \in E$ es $\left\{ \begin{array}{l} \text{recurrente para } Y \Rightarrow \text{recurrente para } X \\ \text{transitorio para } Y \Rightarrow \text{transitorio para } X. \end{array} \right.$

iv) $x \rightarrow y$ de acuerdo a X .

$\Leftrightarrow \textcircled{1} x \rightarrow y$ de acuerdo a Y (resultado de clases pasadas)

Por otro lado,

$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x \text{ es recurrente respecto a } X \Rightarrow \\ \text{Si } x \text{ es transitorio respecto a } X \Rightarrow \end{array} \right\} x \text{ es recurrente respecto a } Y$

$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x \text{ es recurrente respecto a } X \Rightarrow \\ \text{Si } x \text{ es transitorio respecto a } X \Rightarrow \end{array} \right\} x \text{ es transitorio respecto a } Y$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Si } x \text{ es recurrente respecto a } X \Rightarrow y \text{ es recurrente resp. a } X \\ \text{Si } x \text{ es transitorio respecto a } X \Rightarrow y \text{ es transitorio resp. a } Y. \end{array} \right\}$

Teorema: La siguiente dicotomía se satisface:

Sea $i \in E$.

i) Si $q_i = 0$ o $P_i[T_i < \infty] = 1$ entonces

i es recurrente y $\int_0^{\infty} P_{i,i}(t) dt = \infty$

ii) Si $q_i > 0$ y $P_i[T_i < \infty] < 1$, entonces i es transitorio

y $\int_0^{\infty} P_{i,i}(t) dt < \infty$.

Donde $T_i = \inf\{t > \tau_0; X_t = i\}$.

Demostración:

Si $q_i = 0$, entonces i es absorbente. $\Rightarrow i$ es recurrente

y $\int_0^{\infty} \underbrace{P_{i,i}(t)}_{=1} dt = \infty$.

Si $q_i > 0$ y $P_i[T_i < \infty] = 1$.

Sea $N_i =$ tiempo de regreso a i para la cadena de saltos. Observación:

$$P_i[N_i < \infty] = P_i[T_i < \infty].$$

$\Rightarrow P_i[N_i < \infty] = 1 \Rightarrow i$ es recurrente respecto a Y .

$\Rightarrow i$ es recurrente respecto a X .

Para el cálculo de la integral; probaremos que

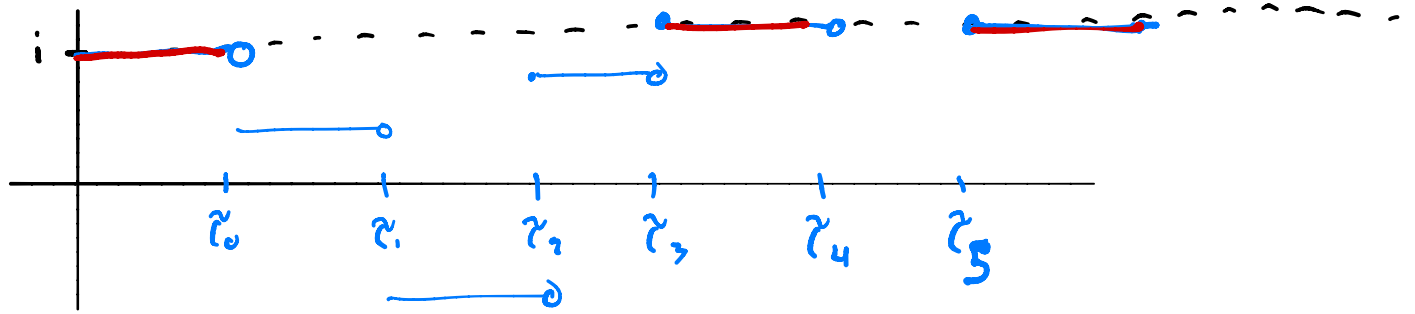
$$\int_0^{\infty} P_{i,i}(t) dt = \frac{1}{q_i} \sum_{n=0}^{\infty} (\Pi^{(n)})_{i,i},$$

donde $\Pi^{(n)}$ denota la n -ésima potencia de Π .

Probar $\int_0^{\infty} P_{i,i}(t) dt = \frac{1}{q_i} \sum_{n=0}^{\infty} (\Pi^{(n)})_{i,i} :$

$$\int_0^{\infty} P_{i,i}(t) dt = \int_0^{\infty} P_i | X_t = i | dt = \int_0^{\infty} \mathbb{E}_i | \mathbb{1}_{\{X_t = i\}} | dt$$

$$= \mathbb{E}_i | \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_t = i\}} dt | \stackrel{\downarrow}{=} \mathbb{E}_i | \sum_{m=0}^{\infty} (\tau_m - \tau_{m-1}) \mathbb{1}_{\{Y_m = i\}} | = \textcircled{\#}$$



$$\Rightarrow \textcircled{\#} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}_i | (\tau_m - \tau_{m-1}) \mathbb{1}_{\{Y_m = i\}} | = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{q_i} P_i | Y_m = i |$$

$$= \frac{1}{q_i} \sum_{m=0}^{\infty} (\Pi^{(m)})_{i,i} \quad \text{como se requería.}$$

Problema de la purificadora.

- Reparaciones de 1 a 2 veces al mes
- 8 vehículos
- Repa
- Tarda la reparación:
 - 3 días para la bomba
 - 1 o 2 días suspensión
 - 1 semana para reparaciones mayores

Resumen:

Ingredientes

- * Hay n vehículos
- * los vehículos se descomponen
- * los descompuestos se reparan.

¿Qué preguntas naturales hay?

- En 5 meses, en un día normal, cuántos camiones repartidores voy a tener?
(cual es la distribución)
- Cual es el promedio de tiempo en el que tengo el coche en "reparación"?

Posibles Soluciones:

$X_t = \#$ autos disponibles al tiempo t .

$E = \{0, \dots, n\} \leftarrow$ posibles autos disponibles.

Supuestos:

• Tiempos de reparación exponenciales e independientes.

• Tiempos en que se descomponen los autos deben ser exponenciales.

2^o propuesta:

• Considerar una cadena de Markov para

cada auto: $Y = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$.

Asumir $\{X^{(k)}\}_{k=1, \dots, n}$ indep. $X^{(k)}$ representa

el estado del k -ésimo auto.

Info adicional:

• Info sobre las reparaciones.

• Info \approx los tiempos en que se descomponen.

Proyectos a futuro:

• Costos \longleftrightarrow Planificación.

Punchline:

• Cual es la distribución asintótica de $\longleftrightarrow P(t)$ si $t \approx \infty$ el número de autos.

• En promedio, ¿cuánto gasto? $\longleftrightarrow \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds$ si $t \approx \infty$

Distribuciones invariantes

Queremos saber $P[X_t = i]$, cuando $t \rightarrow \infty$
y $i \in E$. \leftrightarrow Veremos que esto está
relacionado con "distribuciones invariantes"
o "vectores invariantes".

Def:

Decimos que λ es un "vector invariante"
para X con Q -matriz Q si
 $\lambda Q = 0$.

Teorema: (*)

Supongamos que X tiene matriz de saltos Π .

Es equivalente

i) λ sea un vector invariante para X .

ii) λ sea un vector tal que $\mu_i = \lambda_i q_i$

satisface $\mu \Pi = \mu$

prueba:

$Q_{i,j} = q_i (\Pi_{i,j} - \delta_{i,j}) \quad \forall i, j \in E$. Entonces

$$(\mu(\Pi - I))_j = \sum_{i \in E} \mu_i (\Pi_{i,j} - \delta_{i,j}) = \sum_{i \in E} \underbrace{\lambda_i}_{\frac{\mu_i}{q_i}} \underbrace{Q_{i,j}}_{q_i (\Pi_{i,j} - \delta_{i,j})} = 0$$

□

Perspectiva:

Queremos hacer un "link" entre
vectores invariantes y $\mathbb{P}_i\{X_t = j\}$, si $t \rightarrow \infty$

Teorema:

Suponer que X es irreducible y recurrente.

Entonces Q tiene un vector invariante
que es único salvo multiplicación por escalar.

Prueba:

estrategias: usar resultados de cadenas
de Markov a tiempo discreto.

Como X es irreducible, X no puede
tener estados absorbentes (salvo que solo
tenga un estado $E = \{i\}$).

La cadena de saltos satisface:

i) Es irreducible

ii) Es recurrente.

\Rightarrow existe un vector invariante μ para Π .

$$\Rightarrow \mu \Pi = \mu.$$

Ahora, construyo, $\lambda_i = \frac{\mu_i}{q_i}$, y por el

resultado $\textcircled{*}$, $\lambda = (\lambda_i; i \in E)$ es un

vector invariante para X .

Objetivo de las siguientes clases:

Teorema

Sea Q una matriz "irreducible", no explosiva t.q. existe una **distribución** invariante λ (λ es un vector invariante, con entradas positivas que suman 1).

Entonces, $\forall i, j \in E$,

$$P_{i,j}(t) \longrightarrow \lambda_j \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota: probaremos que si el espacio de estados es finito, la existencia de λ se puede garantizar.

Anuncio: (opcional).

- Jueves: sesiones de dudas 3:00 pm.
- Sábado: resolución de la tarea 11:00 am.

Continuación de distribuciones invariantes

λ es un vector invariante si

$$\lambda Q = 0 \quad (*)$$

Vimos que $(*)$ pasa sii

$$\mu \pi = \mu \quad \text{donde} \quad \mu_i = \lambda_i q_i$$

En el caso en que λ tiene entradas no-negativas y $\sum \lambda_i = 1$, decimos que λ es una "distribución invariante".

Definición:

Recordar: i es recurrente si $q_i = 0$ o $P_i\{T_i < \infty\} = 1$.

Diremos que i es recurrente positivo

si $E_i\{T_i\} < \infty$.

Si i es recurrente pero $E_i\{T_i\} = \infty$, decimos

que i es recurrente nulo.

Li a con existencia de distr. inv.

Teorema:

Sea Q una Q -matriz de una cadena irreducible.
es equivalente

- i) cada estado es recurrente positivo
- ii) algún estado es recurrente positivo
- iii) Q es no explosivo y existe una distribución invariante λ

Además, $m_i = \mathbb{E}_i[\bar{T}_i < \infty] = \frac{1}{\lambda_i q_i} \quad \forall i \in E.$

prueba:

Estrategia: ligar los conceptos con la cadena de saltos.

Suponer que $\#E \geq 2$. ($\Rightarrow q_i > 0 \quad \forall i \in E$).

Paso 1:

Para $i \in E$, definir $M^i = \{M_j^i\}_{j \in E}$

$$M_j^i := \mathbb{E}_i \left[\int_0^{T_i \wedge \tau} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}} ds \right], \quad \text{donde}$$

T_i = tiempo de retorno a i

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n.$$

Intercambiando la suma con la integral.

$$\sum_{j \in E} M_j^i = \sum_{j \in E} \mathbb{E}_i \left[\int_0^{T_i \wedge \tau} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}} ds \right],$$
$$\mathbb{E}_i \left[\int_0^{T_i \wedge \tau} \sum_{j \in E} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}} ds \right],$$

⇒

$$\sum_{j \in E} M_j^i = \mathbb{E}_i \left[\int_0^{T_i \wedge \tau} \sum_{j \in E} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}} ds \right],$$

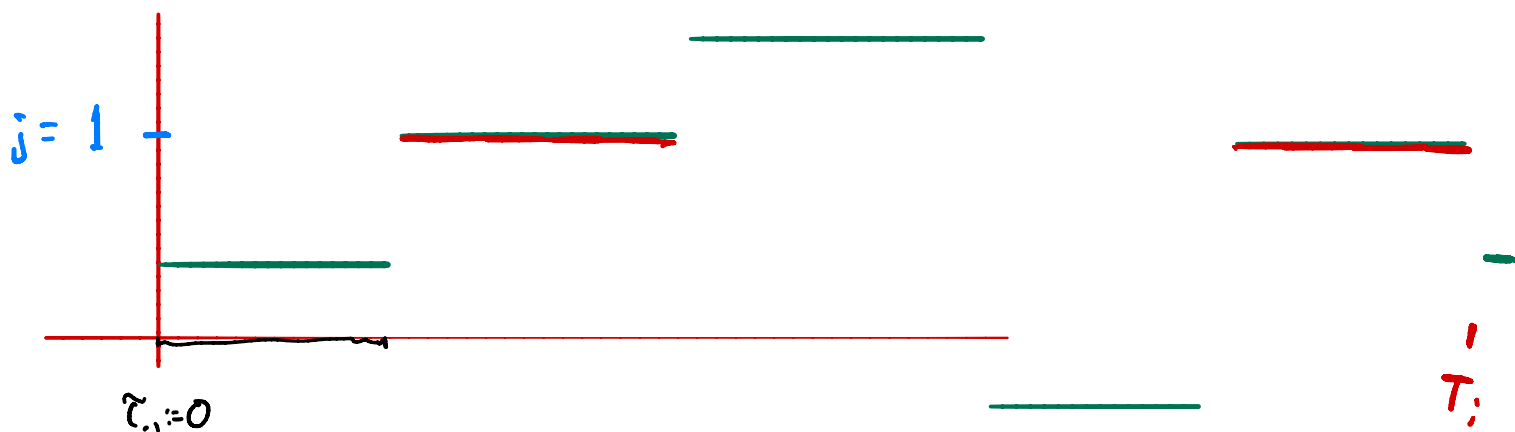
$$= \mathbb{E}_i \left[\int_0^{T_i \wedge \tau} 1 ds \right] = \mathbb{E}_i [T_i \wedge \tau].$$

Paso II:

Sea N_i = primer tiempo de llegada de la cadena de saltos al estado i .

$$M_j^i = \mathbb{E}_i \left[\int_0^{T_i \wedge \tau} \mathbb{1}_{\{X_s = j\}} ds \right] = *$$

Ejemplo:



$$M_j^i = \mathbb{E}_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n - \tau_{n+1}) \mathbb{1}_{\{Y_n = j, N_i > n\}} \right],$$

donde N_i = tiempo de retorno a i (para \forall).

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i \left[(\tau_n - \tau_{n+1}) \mathbb{1}_{\{Y_n = j, N_i > n\}} \right],$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu_j^i &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i \left[(z_n - z_{n+1}) \mid Y_n = i \right] \mathbb{E}_i \left[\mathbb{1}_{\{Y_n = i, N_i > n\}} \right], \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_j} \mathbb{E}_i \left[\mathbb{1}_{\{Y_n = i, N_i > n\}} \right] = \frac{1}{q_j} \mathbb{E}_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Y_n = i, N_i > n\}} \right] \end{aligned}$$

$$\mu_j^i = \frac{1}{q_j} \underbrace{\mathbb{E}_i \left[\sum_{n=0}^{N_i-1} \mathbb{1}_{\{Y_n = i\}} \right]}_{=: \gamma_j^i} = \frac{\gamma_j^i}{q_j}$$

De vuelta a la prueba:

Del curso de cadenas de Markov del semestre pasado (la conexión la precisaré más tarde),

γ era un vector invariante para Y .

Entonces $\mu_j^i = \frac{\gamma_j^i}{q_j}$ es un vector

invariante para $X \Rightarrow$

$$\lambda_j := \frac{\mu_j^i}{\sum_{i \in E} \mu_j^i} = \frac{\mu_j^i}{\mathbb{E}_i[T_j]} = \frac{\mu_j^i}{m_j}$$

es una distribución invariante

Ahora supongamos μ (iii) se satisfice:

- No explosividad
- Existencia de distribución invariante λ .

Fijemos $i \in E$ y definamos

$$v_i = \frac{\lambda_i q_i}{\lambda_i q_i}. \quad \text{Entonces, } v_i \text{ satisfice:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet v_i = 1 \quad \forall i \in E \\ \bullet v \Pi = v \quad (\leftarrow \text{Recordar } \lambda Q = 0) \end{array} \right.$$

Por resultado del semestre pasado,

$$v_i \geq \gamma_i^i \quad (**)$$

(ver Norris ???).

De (**), se sigue que

$$m_i = \mathbb{E}_i [T_i] = \sum_{j \in E} \mu_j^i = \sum_{j \in E} \frac{\gamma_j^i}{q_i}$$

$$\leq \sum_{j \in E} \frac{v_j}{q_i} = \sum_{j \in E} \frac{\lambda_j}{\lambda_i q_i} = \frac{1}{\lambda_i q_i} \sum_{j \in E} \lambda_j$$

$$= \frac{1}{\lambda_i q_i} < \infty$$

\Rightarrow recurrencia positiva ($\mathbb{E}_i [T_i] < \infty$).

Teorema

Supongamos que Q es irreducible
y recurrente. Entonces, para $s > 0$, es equivalente

$$i) \lambda Q = 0$$

$$ii) \lambda P(s) = \lambda.$$

Prueba:

1° caso $\# E < \infty$: $\lambda Q = 0$

$$\frac{d}{ds} \lambda P(s) = \lambda \frac{d}{ds} P(s) = \lambda (Q P(s)) \stackrel{\downarrow}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda P(s)$ es constante

$$\Rightarrow \lambda P(s) = \lambda P(0) = \lambda \quad \forall s > 0.$$

