

---

---

---

---

---



## Procesos de renovación:

El objetivo de la teoría de renovación es estudiar ciertos fenómenos aleatorios que se "repiten" en tiempos grandes.

Sea  $\{\zeta_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión de v.a.i.i.d, no negativos.

Vamos a definir al  $n$ -ésimo tiempo de renovación como

$$T_n := \sum_{k=1}^n \zeta_k, \quad T(0) = 0.$$

**Ejemplo fundamental:** Sea  $X$  una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados  $E$ .

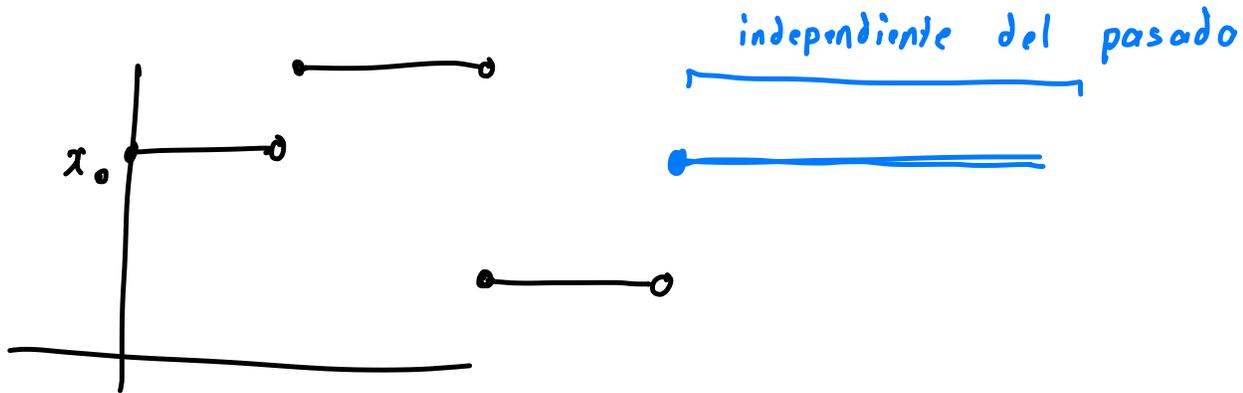
Vamos a suponer  $X_0 = x_0 \in E$ , y consideremos

$T(n) = n$ -ésimo tiempo de regreso a  $x_0$ :

De manera formal:

$$M_{x_0}^{n+1} = \inf \{ t > T(n); X_t \neq x_0 \} - T(n). \quad T(0) = 0$$

$$T(n+1) = \inf \{ t > T(n) + M_{x_0}^{n+1}; X_t = x_0 \}.$$



De la propiedad de Markov, se tiene que  $T(n)$  es un tiempo de renovación.

**Definición:**

Un proceso de renovación  $\{N(t); t \geq 0\} =: N$  es un proceso tal que

$$N(t) = \max \{ n \in \mathbb{N}, T(n) \leq t \}.$$

¿Qué nos va a interesar?

**Definición:**

Definimos la función de renovación como:

$$U(t) = 1 + E[N(t)].$$

**Notación:** Denotaremos por  $F$  a la función de distribución de  $\xi_1$ , i.e.  $F(t) = P\{\xi_1 \leq t\}$ .

Definimos  $F_k(t)$  = convolución  $k$ -veces de la distribución  $F \approx (dF)^{*k}$ .

Lema:

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = F_k(t) - F_{k+1}(t).$$

$$\bullet U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \Leftrightarrow 1 + \mathbb{E}[N(t)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

donde  $F_0 \equiv 1$ .

Prueba:

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \mathbb{P}[T(k) \leq t < T(k+1)]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{P}[N(t) = k] &= \mathbb{P}[T(k) \leq t] - \mathbb{P}[T(k+1) \leq t] \\ &= F_k(t) - F_{k+1}(t) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}[N(t) = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k (F_k(t) - F_{k+1}(t))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k F_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} k F_{k+1}(t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k F_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k+1)}_l \underbrace{F_{k+1}}_d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{F_{k+1}}_l(t)$$

$$= 1 F_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} k F_k(t) - \sum_{l=2}^{\infty} l F_l(t) + \sum_{l=2}^{\infty} F_l(t) = \sum_{l=1}^{\infty} F_l(t)$$

## Ejemplo:

Suponer que  $F$  tiene distribución exponencial de parámetro  $q > 0$ . i.e.

$$f(x) = q e^{-qx} dx.$$

Se puede ver que  $F_n \sim \Gamma(n, q)$ . i.e.

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{q^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-qx} dx$$

Justificación:

$$E\left[\exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^n z_i\right\}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[e^{-\lambda z_i}\right] = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^n$$

Por otro lado, la transf. de Laplace de la  $\Gamma(n, q)$  es

$$\int_0^{\infty} \frac{q^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qx} e^{-\lambda x} dx = \frac{q^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\overbrace{(q+\lambda)x}^u} dx$$
$$\stackrel{v = (q+\lambda)x}{=} \frac{q^n}{(n-1)!} (q+\lambda)^{-n} \int_0^{\infty} \underbrace{v^{n-1}}_{\Gamma(n) = (n-1)!} e^{-v} dv = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^n.$$

Cálculo de  $P\{N(t) = k\}$ :

$$P\{N(t) = k\} = P\{T(k) \leq t < T(k) + Z_{k+1}\}$$

$$= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < T(k) + Z_{k+1}\}} \right] \quad Z_{k+1} \sim \exp(q)$$

$$= \int_0^{\infty} q e^{-qx} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < T(k) + x\}} dx \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[ \int_0^{\infty} q e^{-qx} \mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < T(k) + x\}} dx \right]$$

$\uparrow$   
 $t - T(k) < x$

$$= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} \int_{t-T(k)}^{\infty} q e^{-qx} dx \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} e^{-q(t-T(k))} dx \right]$$

$$= e^{-qt} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} e^{qT(k)} \right]$$

$$= e^{-qt} \int_0^t e^{qx} e^{-qx} \frac{q^k}{(k-1)!} x^{k-1} dx$$

$$= e^{-qt} \cdot \frac{1}{k!} (tq)^k \quad \leftarrow \text{distribución Poisson } (tq).$$

$$\Rightarrow U(t) = 1 + E[N(t)] = 1 + qt.$$

En este caso, el modelo está completamente determinado

Vamos ahora a hacer lo mismo, pero con transformadas de Laplace:

Recordar que  $\leftarrow$  convoluciones

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)$$

Notar que, si " $\wedge$ " denota transformado de Laplace, es decir, para  $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\hat{\psi}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \psi(x) dx \quad \leftarrow \text{siempre cuando converge}$$

Hecho: resultado de análisis:

La transformada de Laplace caracteriza a  $\psi$ .

$$\widehat{\sum_{k=1}^{\infty} F_k(\cdot)(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{F_k(\cdot)(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{F}(\lambda))^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{q}{\lambda + q} \right)^k$$

La transformada de Laplace de una convolución es el producto de las transformadas

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\cdot)(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^k = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^k \\ &= \left(\frac{q}{\lambda+q}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{q}{\lambda+q}} = \frac{1}{\frac{\lambda+q}{q} - 1} = \frac{q}{\lambda} \end{aligned}$$

Recordar que

$$U(t) = 1 + qt \Leftrightarrow \lambda + \overbrace{E[N(\cdot)](t)} = 1 + \overbrace{(q \cdot (\cdot))'(t)}$$

$t \mapsto G(t) := qt$

$$\overbrace{(q \cdot (\cdot))'(\lambda)} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dG(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} q dx = \frac{q}{\lambda}$$

Por lo tanto

$$\overbrace{E[N(\cdot)](\lambda)} = \overbrace{(q \cdot (\cdot))'(\lambda)} \Leftrightarrow E[N(t)] = qt \quad \blacksquare$$

## Motivación para lo que sigue:

En el problema 3 de la tarea 4,

teníamos una expresión del tipo

$$E[Y_t] = \int_0^t \delta e^{-\delta x} * (\text{Algo}(x)) dx + \text{Término adicional}(t)$$

↑  
tamaño de  
la población

Esto motiva lo siguiente:

## Ecuación de renovación:

La función de renovación  $U$  satisfacer la ec. de renovación

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s) dF(s)$$

← recordatorio  
 $F(x) = P\{Z_1 \leq x\}$ .

prueba:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$

Notar que  $F_k(t) = F * F_{k-1}(t)$

$$\begin{aligned} U(t) &= F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F * F_{k-1}(t) \\ &= F_0(t) + F * \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)}_{U(t)} = 1 + \int_0^t U(t-s) dF(s) \end{aligned}$$

Proposición:  $\&$  continua por derecha  
 Sea  $H$  una función positiva y acotada  $\swarrow$ . Consideremos

la ecuación:

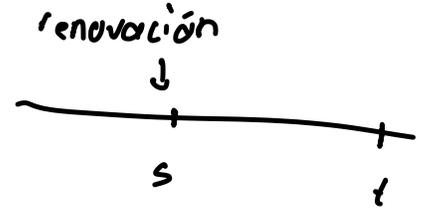
$$(1) \quad M(t) = H(t) + \int_0^t M(t-s) dF(s)$$

Usualmente, lo que queremos calcular en las aplicaciones

algo que sale en las "cuentas" de nuestro modelo.

Usualmente sale al "renovar" el proceso

fiere que ver, usualmente con "condicionar con respecto a  $\xi$ ,



Entonces, existe una única solución a (1) dada por

$$M(t) = \int_0^t H(t-s) dU(s)$$

↑ conocida

↑ "más o menos" conocida

## Demostración:

Usaremos transformada de Laplace

$$\mathcal{L}M(q) = \int_0^{\infty} e^{-qx} dM(x)$$

Entonces, la ecuación:  $M(t) = N(t) + \int_0^t M(t-s) dF(s)$   
se reduce a

$$\mathcal{L}M(q) = \mathcal{L}N(q) + (\mathcal{L}M(q))(\mathcal{L}F(q)).$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}M(q) = \frac{\mathcal{L}N(q)}{1 - \mathcal{L}F(q)} = \mathcal{L}N(q) \left( 1 + \mathcal{L}F(q) + (\mathcal{L}F(q))^2 + (\mathcal{L}F(q))^3 + \dots \right)$$

$$= \mathcal{L}N(q) (1 + \mathcal{L}F(q) + \mathcal{L}F_2(q) + \mathcal{L}F_3(q) + \dots)$$

$$\mathcal{L}M(q) = \mathcal{L}N(q) \mathcal{L}U(q) = \mathcal{L}(N * U)(q)$$

$$\Leftrightarrow M(t) = N * U(t) = \int_0^t N(t-s) dU(s) \quad \blacksquare$$

## Objetivo:

estudiar dichas expresiones cuando  $t \approx \infty$ :

Observación: en el teorema anterior, teníamos

$$M(t) = \int_0^t \underbrace{N(t-s)}_x dU(s) = \int_0^t N(x) d \underbrace{U(t) - U(t-x)}_{\text{¿cómo estimar}}$$

teorema  
de cambio de  
variable.

$U(t) - U(t-x)$  cuando  
 $x$  es grande?

## Teorema de Blackwell:

Def: Decimos que el proceso de renovación (o la distribución  $F$ ) es aritmética si

$$P\{Z_i \in r\mathbb{N}\} = 1 \quad \text{para algún } r \in \mathbb{N}.$$

Al máximo  $r$  que cumple esta propiedad se le conoce como el "paso de  $Z$ ".

Un ejemplo de proceso aritmético surge de una caminata aleatoria simétrica,

Aquí,  $T(1), T(2), \dots$  los tiempos de retorno a 0 dan una estructura de proceso de renovación aritmético con paso  $r=2$ .

## Teorema de Blackwell:

Supongamos que  $E\{Z_i\} = m < \infty$ .

i) Si  $F$  es no-aritmética, entonces  $\forall h > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (U(x+h) - U(x)) = \frac{h}{m}$$

ii) Si  $F$  es aritmética con paso  $r > 0$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U((n+1)r) - U(nr)) = \frac{r}{m}$$

## Corolario (Teorema de renovación clave)

Supongamos que  $F$  no es aritmética, y

$m = \mathbb{E}[Z_1] < \infty$ . Sea  $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una función continua con soporte compacto.

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x g(x-s) dU(s) = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} g(x) dx$$

prueba (bosquejo)

Notemos que

$$\int_0^x g(x-s) dU(s) = \int_0^x g(y) d(U(x) - U(x-y))$$

$\swarrow \quad \nearrow$   
 $y = x-s$

Del teorema de Blackwell,

$$U(x) - U(x-s) \rightarrow \frac{s}{m} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty$$

de manera que, cuando  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\int_0^x g(x-s) dU(s) \approx \int_0^x g(y) \frac{dy}{m} = \frac{1}{m} \int_0^x g(y) dy \approx \frac{1}{m} \int_0^{\infty} g(y) dy.$$

La siguiente clase:

Teorema de renovación elemental: Si  $\mathbb{E}[Z_1] = m < \infty$

i)  $\frac{1}{t} U(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m}$  ← (pensar en el proceso Poisson)

ii)  $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m}$  ← con probabilidad 1.

## Lemma (Wald).

Supongamos que  $m = E[\zeta_i] < \infty$ . Entonces,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N(t)+1} \zeta_i \right] = E[\zeta_i] E[N(t)+1].$$

Pensar que esta suma "localiza" el valor de  $t$



prueba:

Definir

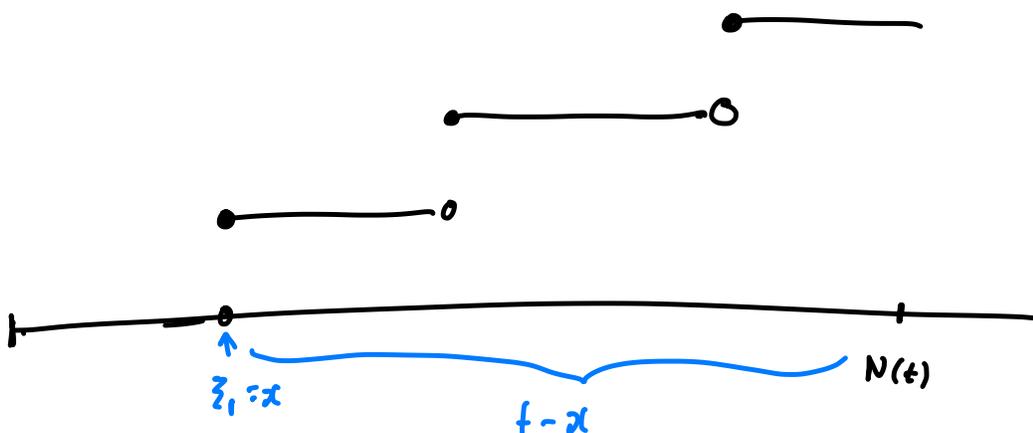
$$A(t) = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N(t)+1} \zeta_i \right]$$

Condicionando sobre  $\zeta_1$ , obtenemos

$$A(t) = \mathbb{E} \left[ (\zeta_1 + \dots + \zeta_{N(t)+1}) (\mathbb{1}_{\{\zeta_1 \leq t\}} + \mathbb{1}_{\{\zeta_1 > t\}}) \right].$$

$$= \mathbb{E} \left[ (\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{N(t)+1}) \mathbb{1}_{\{\zeta_1 \leq t\}} \right] + \mathbb{E} \left[ \zeta_1 \mathbb{1}_{\{\zeta_1 > t\}} \right]$$

Imaginar que  $\zeta_1 = x \leq t$ .



$$\Rightarrow A(t) = \int_0^t \left( x + \mathbb{E} \left[ \zeta_1 + \dots + \zeta_{N(t-x)+1} \right] F(dx) + \mathbb{E} \left[ \zeta_1 \mathbb{1}_{\{\zeta_1 > t\}} \right] \right)$$

$$A(t) = \int_0^t \left( x + \underbrace{E\{Z_1 + \dots + Z_{N(t-x)+1}\}}_{A(t-x)} \right) F(dx) + \underbrace{E\{Z_1 \mathbb{1}_{\{Z_1 > t\}}\}}_{\int_t^\infty x F(dx)}$$

→

$$A(t) = E\{Z_1\} + \int_0^t A(t-x) F(dx) \quad \leftarrow \text{ecuación como}$$

$$M(t) = N(t) + \int_0^t M(t-s) dF(s) \quad \leftarrow \begin{cases} M(1) = E\{Z_1\} \\ M(t) = A(t) \end{cases}$$

⇒ Por resultados anteriores,

$$\underbrace{M(t)}_{M(t)} = \int_{[0,t]} \underbrace{E\{Z_1\}}_{N(t-x)} U(dx) = E\{Z_1\} (U(t) - \underbrace{U(0)}_{=0}) = E\{Z_1\} (1 + E\{N(t)\}).$$

$$U(0) := 0. \quad \leftarrow \quad U(t) = \underbrace{F_0(t)}_{\text{función}} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

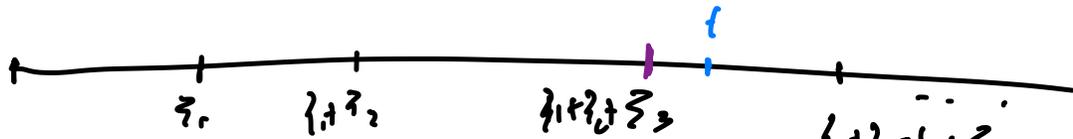
de distribución degenerada en cero. □

Continuación de la prueba del teorema elemental de renovación:

Primero estudiaremos

$$\text{¿ } \frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{m} ?$$

idea:  $\uparrow$  asintóticamente, estudiaremos  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$



Intuitivamente,  $S_{N(t)}$  "está cerca" de  $t$ .

Hace sentido entonces considerar la aproximación

$$\frac{t}{N(t)} \approx \frac{S_{N(t)}}{N(t)}$$

$$\mathbb{P} \{ N(t) \geq c \} = \mathbb{P} \{ T(c) < t \}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 1 \\ & \Rightarrow N(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty \\ & \Rightarrow N(t) \xrightarrow{\text{c.s.}} \infty \end{aligned}$$

Para formalizar esto notemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot \frac{N(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot \mathbb{E}[\xi_i] = \infty$$

ley fuerte de grandes números

Recordar que  $N(t) = \max \{ n \in \mathbb{N}; T(n) \leq t \}$ .

$T(n)$  = n-ésimo tiempo de renovación

Definimos:

$$A_1 = \{ \omega \in \Omega; N(t) | \omega \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \}$$

$$A_2 = \{ \omega; \frac{S_n}{n}(\omega) \rightarrow \mathbb{E}[\xi_i] = m \text{ cuando } t \rightarrow \infty \}$$

$$\text{Notar que } \mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_2] = 1$$

$\forall n \quad w \in A, DA_2,$

$$\frac{S_{N(t)}(w)}{N(t)(w)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = m \quad \textcircled{4}$$

Finalmente, ya que  $N(t) \rightarrow \infty$ ,  
entonces, para  $t \approx \infty$ ,

$$\left| \frac{S_{N(t)}}{N(t)} - \frac{t}{N(t)} \right| \leq \frac{\sum_{N(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0}{N(t)}$$

$$\therefore \frac{t}{N(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \stackrel{\text{por } \textcircled{4}}{=} m.$$

Ahora probamos la parte i):

$$i) \quad \frac{1}{t} U(t) \rightarrow \frac{1}{m} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Observemos lo siguiente:

$$T(N(t)) \leq t < T(N(t)+1). \quad \textcircled{4}$$

Por lo tanto,

$$\frac{T(N(t))}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T(N(t)+1)}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

lo que obtengo de aquí es que con proba 1,

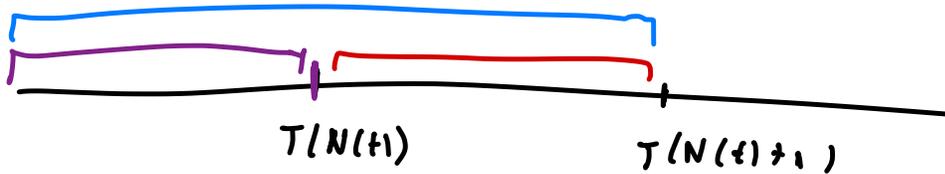
$$\frac{T(N(t))}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T(N(t)+1)}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = m$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$   
 $m \qquad \qquad \qquad m \qquad \qquad 1$

Por (1),

$$T(N(t)) \leq t$$

$$t \geq \mathbb{E}[T(N(t))] = \mathbb{E}[T(N(t+1)) - Z_{N(t+1)}] = mU(t) - \mathbb{E}[Z_{N(t+1)}]$$



$$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{mU(t)}{t} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{mU(t) - \mathbb{E}[Z_{N(t)}]}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \leq m.$$

Para la desigualdad inversa, definimos

$$Z_j^c = \begin{cases} Z_j & \text{si } Z_j < c \\ c & \text{si } Z_j \geq c \end{cases}$$

Para  $c > 0$ . Ahora, consideremos al proceso  $N^c$  asociado a los tiempos  $\{Z_j^c\}$ . Notemos que si

$m^c = \mathbb{E}[Z_j^c]$ , razonando como antes, tenemos

$$t \geq m^c \mathbb{E}[N^c(t) + 1] - \mathbb{E}[Z_{N^c(t)+1}^c] \geq m^c \mathbb{E}[N^c(t) + 1] - c. \quad (1)$$

$$\text{Como } Z_j^c \leq Z_j \quad \forall j \geq 1 \Rightarrow N^c(t) \geq N(t) \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N^c(t) + 1] \geq \mathbb{E}[N(t) + 1] = U(t) \quad (2)$$

Por (1) y (2),  $t \geq m^c U(t) - c$ .

$$t \geq m^c U(t) - C.$$

De aquí se sigue que

$$\frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m^c} + \frac{C}{m^c t}$$

Sacando  $\limsup$ , obtengo

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m^c} \quad \leftarrow \forall c > 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m}$$

(\*)

Para hacer el límite inferior:

$$t < \mathbb{E}[T(N(t)+1)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \tau_i\right] = \underbrace{\mathbb{E}[\tau_i]}_m \underbrace{\mathbb{E}[N(t)+1]}_{U(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{U(t)}{t} \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \geq \frac{1}{m}$$

(\*\*)

Por (\*) y (\*\*),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{m}.$$

□

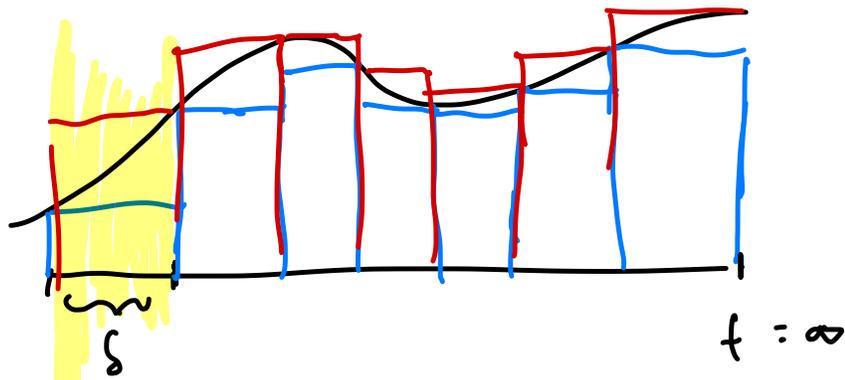
## Definición:

Sea  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una función arbitraria.

Definimos

$$I_\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf \{ f(x); x \in [\delta k, \delta(k+1)] \}$$

$$I^\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup \{ f(x); x \in [\delta k, \delta(k+1)] \}.$$



Decimos que  $f$  es directamente Riemann integrable si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I_\delta = \lim_{\delta \rightarrow \infty} I^\delta$$

# Reforzamiento del teorema de

renovación clave:

Supongamos que  $F$  es una **Función de distribución!**

de una v.a. positivo con media  $\mu$ . Suponer que

$a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es directamente Riemann integrable.

Sea  $A$  la solución a la ecuación de renovación

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) F(dx). \quad \text{función de renovación.}$$

(recordar que la sol. es  $A(t) = \int_0^t a(t-x) U(dx)$ )

i) Si  $F$  es no aritmética, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(x) dx & \text{si } \mu < \infty \\ 0 & \text{si } \mu = \infty. \end{cases}$$

ii) Si  $F$  es aritmética, con tamaño de paso  $\lambda$ ,

entonces  $\forall c > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(c + n\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a(c + n\lambda) & \text{si } \mu < \infty \\ 0 & \text{si } \mu = \infty. \end{cases}$$

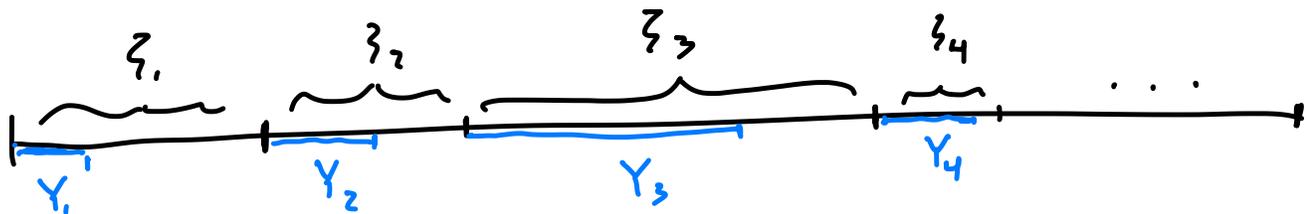
# Aplicaciones de la teoría de renovación:

## Ejemplo 1.1)

Procesos de renovación con dos componentes en cada intervalo de renovación. real. (no infinito).

$(\xi_i, \gamma_i) \leftarrow \begin{cases} \xi_i \leftarrow \text{tiempo aleatorio} \\ \gamma_i \leftarrow \text{una porción de } \xi_i \end{cases}$  (por ejemplo, un tiempo de servicio)

$\gamma_i \leftarrow \text{una porción de } \xi_i$ .



Suponer que los vectores  $(\xi_i, \gamma_i)$  son indep. entre sí

Sea  $p(t)$  la prob. de que  $t$  caiga en una "porción"  $\gamma$  de algún intervalo de renovación.

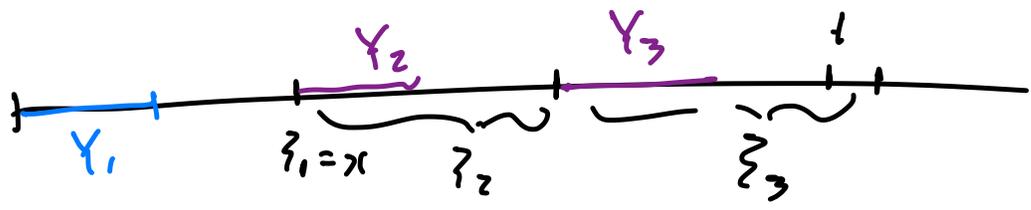
Condicionamos sobre  $\{\xi_i = x\}$  y distinguimos entre las dos posibilidades  $x < t$  y  $x \geq t$ .

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^{\infty} P\{t \text{ esté cubierto} \mid \xi_i = x\} F(dx) \\ &= \int_0^t P\{t \text{ esté cubierto} \mid \xi_i = x\} F(dx) \\ &\quad + \int_t^{\infty} P\{t \text{ esté cubierto} \mid \xi_i = x\} F(dx) \end{aligned}$$

$$e(t) = \int_0^t P|t \text{ est\u00e9 cubierto } \{ \tau_0 = x \} F(dx)$$

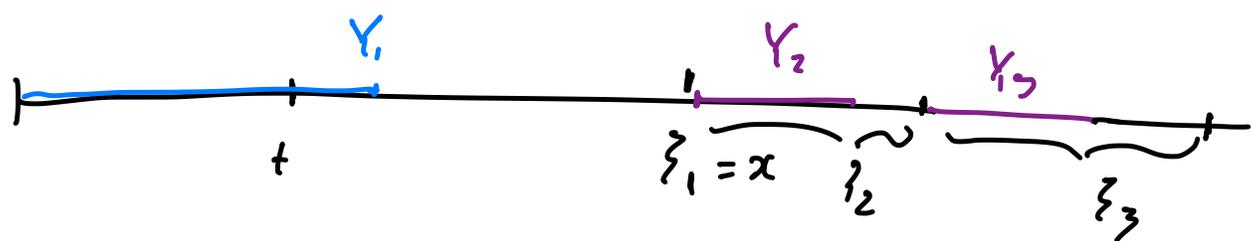
$$+ \int_t^\infty P|t \text{ est\u00e9 cubierto } \{ \tau_0 = x \} F(dx)$$

t est\u00e9 cubierto por  $Y_1$ .



← caso  $x \leq t$

$$\Rightarrow e(t) = \int_0^t e(t-x) F(dx) + P|t \text{ est\u00e9 cubierto por } Y_0$$



← caso  $x > t$

La soluci\u00f3n a la ecuaci\u00f3n de renovaci\u00f3n

$$M(t) = \int_{(0,t]} M(t-s) F(ds) \quad \text{es}$$

$$M(t) = \int_{(0,t]} H(t-s) U(ds), \quad \text{donde } M(t) = e'(t)$$

$$\rightarrow H(t) = P|t \text{ est\u00e9 cubierto por } Y_1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{1}{E[\tau_1]} \int_0^\infty H(x) dx$$

Ahora,

$\mathbb{P}\{t \text{ está cubierto por } Y_i\}$

$$= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{[0, Y_i]}(t) \right]$$

Obs:  $t \mapsto \mathbb{P}\{t \text{ está cubierto por } Y_i\}$  es

decreciente, y

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{t \text{ está cubierto por } Y_i\} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{[0, Y_i]}(t) \right] dt = \mathbb{E} \left[ \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{[0, Y_i]}(t) dt \right]$$

$$= \mathbb{E}[Y_i] =: \gamma. \leftarrow \text{definamos } \gamma \text{ así.}$$

Se puede ver fácil de aquí que  $t \mapsto \mathbb{P}\{t \text{ está cubierto por } Y_i\}$  es directamente Riemann integrable, y por el teorema de renovación clave (parte 2),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[Z_i]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{t \text{ está cubierta por } Y_i\} dt = \frac{\mathbb{E}[Y_i]}{\mathbb{E}[Z_i]}$$

Para la siguiente clase:

$$X_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{capital} \\ \text{inicial}}}{z} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prima}}}{ct} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

•  $N(t) \leftarrow$  proceso Poisson

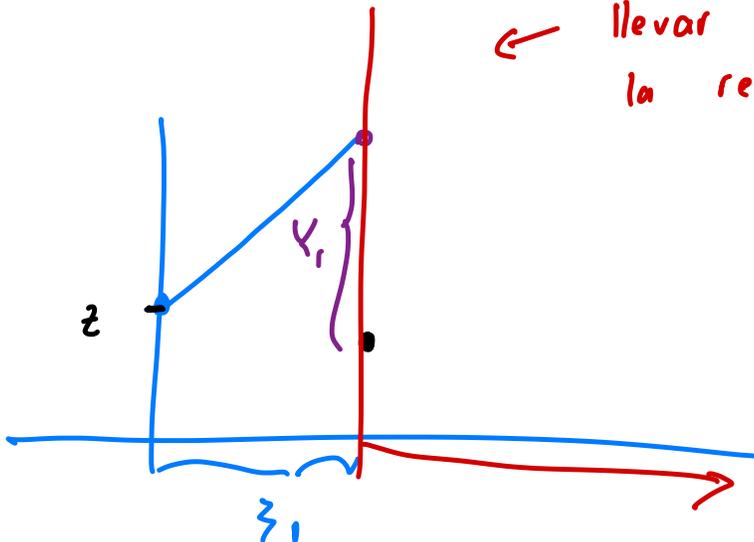
•  $Y_i \leftarrow$  tamaño del reclamo.

Pregunta de interés:

$$R(z) = P\{X_t > 0 \ \forall \ t > 0\}.$$

Idea: determinar una ecuación de renovación para  $R$ .

$\leftarrow$  llevar a cabo la renovación.



Ejemplo de lo visto anteriormente:

Modelos de colas:

Si las llegadas de una cola siguen un proceso Poisson, entonces los tiempos sucesivos  $Z_k$

del  $k$ -ésimo tiempo en que el servidor se encuentra ocupado forma un proceso de renovación

se encuentra solicitado.

Podemos suponer que cada  $Z_k$  se compone de una porción ocupada  $Z_k$  y una porción libre  $Y_k$

Entonces  $e(t)$ , la probabilidad de que el servidor esté libre al tiempo  $t$  converge a

$$\frac{E[Y_i]}{E[Z_i]} = \frac{Y_i}{Z_i}$$

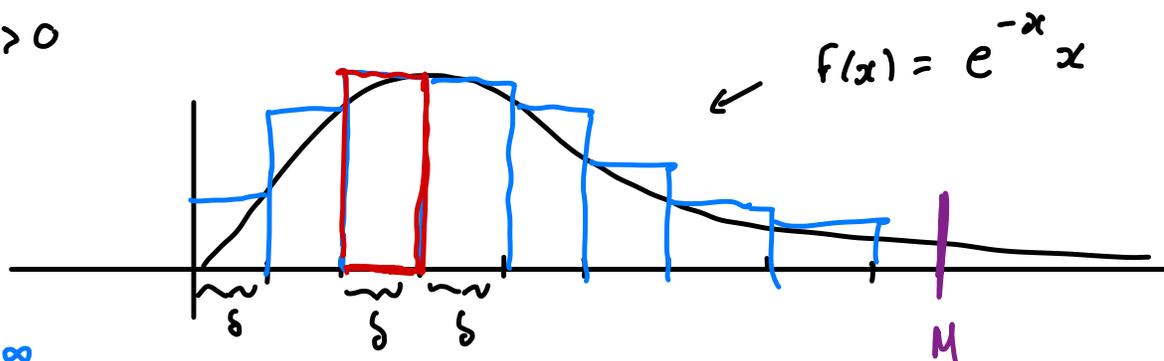
Paréntesis sobre cómo probar  
que una función es directamente Riemann  
integrable

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = x e^{-x}$$

Probamos que es directamente Riemann integrable.

Sea  $\delta > 0$



$$I_\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup \{ f(x); x \in ]k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup \{ e^{-x} x; x \in ]k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$I_\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf \{ f(x); x \in ]k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf \{ e^{-x} x; x \in ]k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$0 \leq I_\delta - I_\delta \leq \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left( e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-(k+1)\delta} k\delta \right)$$

$$0 \leq I^\delta - \bar{I}_\delta \leq \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left( e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-(k+1)\delta} k\delta \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left( e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-k\delta} k\delta \right)$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left( e^{-(k+1)\delta} k\delta - e^{-k\delta} k\delta \right)$$

$$= \delta \left( \sum_{k=0}^{\infty} \delta e^{-k\delta} - \sum_{k=0}^{\infty} \delta (k\delta) e^{-k\delta} \right)$$

teorema del valor medio

$$\leq \delta \left( \sum_{k=0}^{\infty} \delta e^{-k\delta} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta (k\delta) e^{-k\delta} \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

ver que está acotado sobre  $\delta$ .

## Más aplicaciones:

### Procesos de acumulación

Suponer que tenemos variables  $Y_i$  que representan un costo o valor, etc.

Ahora vamos a considerar una clase de problemas que dependen de parejas  $(\tau_i, Y_i) \leftarrow$  i.i.d.

donde  $\tau_i$  genera un proceso de renovación

Definimos el proceso de acumulación asociado como

$$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

Interpretación: costo acumulado al tiempo  $t$ .

Pregunta natural:  $\mu(t) := \mathbb{E}[W(t)] \approx ?$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Idea para calcular

$$M(t) = E[W(t)] \text{ es}$$

condicionar en el primer tiempo de renovación:

$$\begin{aligned} E[W(t)] &= E[W(t) \mid \{Z_1 > t\}] + E[W(t) \mid \{Z_1 \leq t\}] \\ &= E\left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \mid \{Z_1 > t\}\right] + \int_{[0, t]} E\left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \mid Z_1 = x\right] F(dx). \end{aligned}$$

$$E[W(t)] = E[Y_1] + \int_{[0, t]} E[W(t-x)] F(dx)$$

$\uparrow$   
el proceso comienza de nuevo en  $x$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} H(t) \\ \downarrow \\ M(t) = E[Y_1] + \int_0^t M(t-x) F(dx) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \leftarrow H(t-x) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M(t) = \int_0^t E[Y_1] U(dx) = E[Y_1] U(t).$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Y_1] \frac{U(t)}{t} = E[Y_1] \cdot \frac{1}{m}$$

Si  $F$  es no-aritmética

$$m = \int x F(dx) = E[Z_1].$$

Algunas ideas nuevas:

$$\mu^\lambda(t) = \mathbb{E} [ e^{i\lambda W(t)} ]$$

Podría ser (lo voy a checar).

Idea: Formular  $\leftarrow$  alguna función de distribución

$$\mu^\lambda(t) = \mu^\lambda(0) + \int_{0,t} \mu^\lambda(t-x) G(dx)$$

Modelos de reemplazo:

Supongamos que  $Y_i$  representa el costo del  $i$ -ésimo reemplazo. Supongamos que bajo una estrategia de reemplazo por edad, un reemplazo planado al tiempo  $T$  cuesta  $C_1$  y un reemplazo por falla al tiempo  $t < T$  cuesta  $C_2$ . Si  $Y_k$  es el costo del  $k$ -ésimo ciclo de reemplazo, entonces

$$Y_k = \begin{cases} C_1 & \text{con probabilidad } 1 - F(T). \\ C_2 & \text{con probabilidad } F(T). \end{cases}$$

En este caso  $\mathbb{E}[Y_k] = C_1(1 - F(T)) + C_2 F(T)$ .

¿Qué proceso de renovación estaré considerando?

los tiempos que generan a mi proceso de renovación van a ser:

$Z_k \leftarrow$  tiempos de las fallas:

Si  $G$  es la función de distribución de los  $Z_k$ .

Los tiempos que generan a mi proceso de renovación serán:

$Z_k \wedge T \leftarrow$  nuevamente son i.i.d.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_k \wedge T] &= \int_0^{\infty} \mathbb{E}[Z_k \wedge T \mid Z_r = x] G(dx) = \int_0^{\infty} \mathbb{E}[x \wedge T \mid Z_r = x] G(dx) \\ &= \int_0^T x G(dx) + \int_T^{\infty} T G(dx) = \int_0^T x G(dx) + T(1 - G(T)) \end{aligned}$$

Notar también que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k] &= C_1 P(\text{No reemplazo}) + C_2 P(\text{reemplazo}) \\ &= C_1(1 - G(T)) + C_2 G(T). \end{aligned}$$

Sea  $M(t) =$  proceso de renovación asociado a los tiempos  $\{Z_k \wedge T\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

$$\text{Costo acumulado al tiempo } t. = \sum_{k=1}^{M(t)+1} Y_k$$

Si

$$M(t) = \mathbb{E} \left[ \text{Costo acumulado al tiempo } t. \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \right]$$

entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\tau, NT]} = \frac{c_1 (1 - G(T)) + c_2 G(T)}{\int_0^T x G(dx) + T(1 - G(T))}$$

Interpretación  
de costo esperado promedio.

Otra interpretación:

Teoría de riesgo:

$Y_k \leftarrow$  tamaño de reclamos de los asegurados

$\tau_k \leftarrow$  tiempos de los reclamos.

$N(t) \leftarrow$  conteo de los reclamos al tiempo  $t$ .

$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \leftarrow$  costo acumulado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[W(t)]}{t} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\tau]}$$

## Plan para examen:

Viernes 19, 20 y 22 ← sesiones de ejercicios

Examen para llevar:

del 24 al 29 de Marzo

(pensando que la duración está planeada del 24 al 26)

Continuación de aplicaciones de procesos de renovación:

Procesos de renovación terminal:

$E[N(t)]$  ← ya lo estudiamos:

$N(t)$  ← cantidad de renovaciones  
con tiempos interarribos  $\xi_1, \xi_2, \dots$

Siempre suponemos  $\xi_i \in \mathbb{R}_+$  ← (en particular,  $\xi_i \neq \infty$ ).

Pensar en proceso de riesgo:

$$Z(t) = - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k + ct + z_0$$

Es relevante considerar el caso  $\xi_i$  puede tomar el valor infinito

Supongamos que  $\xi_i$  son una v.a.i.i.d. con valores en  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . El proceso de renovación asociado

$N(t) = \#$  renovaciones antes del tiempo  $t$ .

Se conoce como proceso de renovación terminal.

Pensar que

"No hay más renovaciones"  $\leftrightarrow$  "algún  $\xi_i$  tomó el valor infinito".

Al igual que antes:

$$\{N(t) \geq k\} = \{T_k \leq t\}$$

$$T_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$$

y se puede estudiar,  $\mathbb{E}[N(t)]$ :

Denotemos por

$N(\infty) =$  número total de renovaciones  $= \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$

(Notar que si  $\xi_i = \infty$ , entonces  $N(\infty) = 0$ ).

¿Cuál es la distribución de  $N(\infty)$ ?

•  $N(\infty)$  puede tomar los valores  $0, \infty, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \{N(\infty) \geq k\} &= \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \text{ son finitos}\} \\ &= \{\xi_1 < \infty\} \cap \dots \cap \{\xi_k < \infty\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[N(\infty) \geq k] = \mathbb{P}[\xi_1 < \infty]^k = L^k$$

donde  $L = \mathbb{P}[\xi_1 < \infty]$ .

$$L = P\{Z < \infty\}$$

Notemos que, como antes

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) < \sum_{k=1}^{\infty} L^k = \frac{L}{1-L} \quad \text{si } L < 1$$

$$F_k = \underbrace{F * \dots * F}_{k \text{ veces}}$$

El argumento de renovación sigue funcionando

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[N(t) \mid \{Z > t\}] + \mathbb{E}[N(t) \mid \{Z \leq t\}]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N(t)] = F(t) + \int_0^t \mathbb{E}[N(t-s)] F(ds) \quad \leftarrow \text{ecuación de renovación}$$

Problema:  $F$  no es una función de distribución en  $\mathbb{R}_+$ , sino en  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ .

La idea para resolver esto es "modificar  $F$ ".

Consideremos la función

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(dx)$$

y supongamos que  $\int_0^{\infty} e^{-sx} F(dx) < \infty \quad \forall s > 0.$

Notar que

$g(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = P\{X < \infty\} = L < 1$   
 $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$   
Por argumentos de teoría de la medida, se puede ver que

asumir

$\Rightarrow$  Por teorema del valor intermedio,  
 $\exists s_0 =: \lambda > 0$   
t.q.  $g(\lambda) = L$

$g(s)$  es continua

Conclusión:

$$\hat{F}(t) := \int_0^t e^{-\lambda x} F(dx)$$

satisface

$$\int_A^{\infty} \hat{F}(t) = \int_A^{\infty} e^{-\lambda t} F(dt)$$

Nota:  
 $\hat{F}(t) \neq e^{-\lambda t} F(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{F}(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} F(dx) = g(\lambda) = L$$

$\Rightarrow \hat{F}$  es una función de distribución.

Ahora, supongamos que tenemos una ec. de renovación "abstracta" de la forma

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) F(dx)$$

$$\text{Fijemos } \hat{A}(t) = e^{\lambda t} A(t), \quad \hat{a}(t) = e^{\lambda t} a(t).$$

Notar que

$$\hat{A}(t) = \hat{a}(t) + \int_0^t \hat{A}(t-x) \hat{F}(dx)$$

Aplicación de esta idea:

Tomar

$$A(t) = \mathbb{E}[N(\infty) - N(t)] = \frac{L}{1-L} - \mathbb{E}[N(t)]$$

↑  
ley geométrica

(i.e.  $A(t)$  es el número promedio de índices  $n$

t.q.  $t < T_n < \infty$ .

Queremos hacer un arg. de renov. para

$A(t) \leftrightarrow$  condicionar sobre  $Z_1$ :

$$\mathbb{E}[N(\infty) - N(t) | Z_1] = \begin{cases} 1 + \frac{L}{1-L} = \frac{1}{1-L} & \text{si } Z_1 > t \\ A(t - Z_1) & \text{si } 0 < Z_1 \leq t \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{1}{1-L} \mathbb{P}[Z_1 > t, Z_1 < \infty] + \int_0^t A(t-x) F(dx)$$

$$\Rightarrow A(t) = \underbrace{\frac{1}{1-L} (L - F(t))}_{a(t)} + \int_0^t A(t-x) F(dx).$$

Definir

$$\hat{a}(t) = \frac{e^{\lambda t} (L - F(t))}{1-L} \quad \text{y} \quad \hat{A}(t) = e^{\lambda t} A(t)$$

$$\Rightarrow \hat{A}(t) = \hat{a}(t) + \int_0^t \hat{A}(t-x) \hat{F}(dx)$$

¿Puedo aplicar el teorema de renovación clave?

Problemas que  $\hat{a}(t)$  es directamente Riemann

integrable:

$$\int_0^{\infty} \hat{a}(t) dt = \frac{1}{1-L} \int_0^{\infty} e^{\lambda t} (L - F(t)) dt$$

← creciente
← de creciente:

$$= \frac{1}{1-L} \int_0^{\infty} e^{\lambda t} \int_t^{\infty} F(ds) dt$$

$$= \frac{1}{1-L} \int_0^{\infty} \int_0^s e^{\lambda t} dt F(ds)$$

$$= \frac{1}{1-L} \int_0^{\infty} \frac{(e^{\lambda s} - 1)}{\lambda} F(ds)$$

$$= \frac{1-L}{(1-L)\lambda} = \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

← otro approach:

$$\int_0^{\infty} e^{\lambda t} G(dt)$$

$$dG(t) = (L - F(t)) dt.$$

$$\Downarrow$$

$$G(t) := \int_0^t (L - F(s)) ds$$

como  $t \mapsto e^{\lambda t}$  es creciente, basta

ver que

$$\int_0^{\infty} e^{\lambda t} G(dt) < \infty,$$

Procediendo como en el ejemplo

donde  $a(t) = te^{-t}$  se puede ver que

$\hat{a}(t)$  es directamente Riemann integrable,

⇒

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} (\mathbb{E}[N(\infty)] - \mathbb{E}[N(t)]) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{A}(t) = \frac{\int_0^{\infty} \hat{a}(t) dt}{\int_0^{\infty} x \hat{F}(dx)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\int_0^{\infty} x e^{\lambda x} F(dx)}$$

$\hat{F}(dx)$

⇒

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} \left( \frac{L}{1-L} - \mathbb{E}[N(t)] \right) = \frac{1}{\lambda \int_0^{\infty} x e^{\lambda x} F(dx)}$$