Procesos de renovación:

El objetivo de la teoría de renovación es estudiar ciertos fenómenos aleatorios que se "repiten" en tiempos grandes.

Sea $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d, no negativas.

Vamos a definir al n-ésimo tiempo de renovación como

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad T(0) = 0.$$

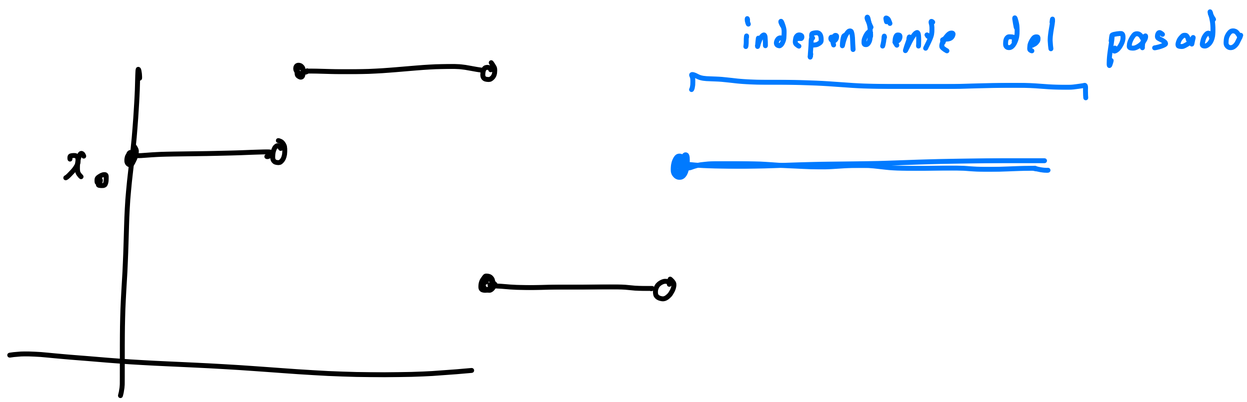
Ejemplo Fundamental: Sea X una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados E. Vamos a suponer $X_0 = x_0 \in E$, y consideremos

$T(n)$ = n-ésimo tiempo de regreso a x_0:

De manera formal:

$$M_{x_0}^{n+1} = \inf\{ t > T(n);\ X_t \neq x_0 \} - T(n). \qquad T(0) = 0$$

$$T(n+1) = \inf\{ t > T(n) + M_{x_0}^{n+1};\ X_t = x_0 \}.$$



De la propiedad de Markov, se tiene que $T(n)$ es un tiempo de renovación.

Definición:
Un proceso de renovación $\{N(t);\ t \geq 0\} =: N$ es un proceso tal que

$$N(t) = \max\{ n \in \mathbb{N},\ T(n) \leq t \}.$$

¿Qué nos va a interesar?

Definición:
Definimos la función de renovación como:

$$U(t) = 1 + \mathbb{E}[N(t)].$$

Notación: Denotaremos por F a la función de distribución de ξ_1, i.e. $F(t) = \mathbb{P}[\xi_1 \leq t]$.

Definimos $F_k(t)$ = convolución k-veces de la distribución F $\approx (dF)^{*k}$.

Lema:

- $\mathbb{P}[N(t)=k] = F_k(t) - F_{k+1}(t)$.
- $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \iff 1 + \mathbb{E}[N(t)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$

donde $F_0 \equiv 1$.

Prueba:

$$\mathbb{P}[N(t)=k] = \mathbb{P}[T(k) \leq t < T(k+1)]$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[N(t)=k] = \mathbb{P}[T(k) \leq t] - \mathbb{P}[T(k+1) \leq t].$$

$$= F_k(t) - F_{k+1}(t)$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}[N(t)=k] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(F_k(t) - F_{k+1}(t))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\,F_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} k\,F_{k+1}(t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,F_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} (\overbrace{k+1}^{\ell})\,\underbrace{F_{k+1}}_{\ell}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{\underbrace{k+1}_{\ell}}(t)$$

$$= 1\,F_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} k\,F_k(t) - \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell\,F_\ell(t) + \sum_{\ell=2}^{\infty} F_\ell(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} F_\ell(t)$$

Ejemplo:

Suponer que F tiene distribución exponencial de parámetro $q>0$. i.e.

$$F(dx) = q e^{-qx} dx.$$

Se puede ver que $F_n \sim \Gamma(n,q)$. i.e.

$$F_k(t) = \int_0^t \frac{q^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-qx} dx$$

justificación:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{-\lambda \xi_i}\right]}_{\frac{q}{\lambda+q}} = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^n$$

Por otro lado, la transf. de Laplace de la $\Gamma(n,q)$ es

$$\int_0^\infty \frac{q^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qx} e^{-\lambda x} dx = \frac{q^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\overbrace{(q+\lambda)x}^{u}} dx$$

$u = (q+\lambda)x$

$$= \frac{q^n}{(n-1)!} \cdot (q+\lambda)^{-n} \overbrace{\int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du}^{\Gamma(n) = (n-1)!} = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^n.$$

Cálculo de $\mathbb{P}[N(t)=k]$:

$$\mathbb{P}[N(t)=k] = \mathbb{P}[T(k) \leq t < T(k) + \xi_{k+1}]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < T(k) + \xi_{k+1}\}}] \qquad \xi_{k+1} \sim \exp(q)$$

$$= \int_0^\infty q e^{-qx} \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < T(k)+x\}} dx]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty q e^{-qx} \, \mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < \underset{t - T(k) < x}{T(k)+x}\}} dx\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} \int_{t-T(k)}^\infty q e^{-qx} dx\right]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} e^{-q(t-T(k))} dx]$$

$$= e^{-qt} \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} e^{qT(k)}]$$

$$= e^{-qt} \int_0^t e^{qx} e^{-qx} \frac{q^k}{(k-1)!} x^{k-1} dx$$

$$= e^{-qt} \cdot \frac{1}{k!} (tq)^k \longleftarrow \text{distribución Poisson}(tq).$$

$\Rightarrow U(t) = 1 + \mathbb{E}[N(t)] = 1 + qt.$

En éste caso, el modelo está completamente determinado

Vamos ahora a hacer lo mismo, pero con transformadas de Laplace:

Recordar que

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)$$

convoluciones

Notar que, si "^" denota transformada de Laplace, es decir, para $\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$,

$$\hat{\psi}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \psi(x)\, dx$$

siempre cuando converja

Hecho: resultado de análisis: la tranformada de Laplace caracteriza a ψ.

$$\widehat{\sum_{k=1}^{\infty} F_k(\cdot)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{F_k(\cdot)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hat{F}(\lambda)\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^k$$

la transformada de Laplace de una convolución es el producto de las transformadas

Por lo tanto,

$$\widehat{\sum_{k=1}^{\infty} F_k(\cdot)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^{k} = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^{k}$$

$$= \left(\frac{q}{\lambda+q}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{q}{\lambda+q}} = \frac{1}{\frac{\lambda+q}{q}-1} = \frac{q}{\lambda}$$

Recordar que

$$U(t) = 1 + qt \iff 1 + \widehat{\mathbb{E}[N(\cdot)]}(\lambda) = 1 + \widehat{(q\cdot(\cdot))}(\lambda).$$

$$\uparrow$$

$$t \longmapsto G(t) := qt$$

$$\widehat{(q\cdot(\cdot))}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dG(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} q\, dx = \frac{q}{\lambda}$$

Por lo tanto

$$\widehat{\mathbb{E}[N(\cdot)]}(\lambda) = \widehat{(q\cdot(\cdot))}(\lambda) \iff \mathbb{E}[N(t)] = qt \qquad \blacksquare$$

Motivación para lo que sigue:

En el problema 3 de la tarea 4, teníamos una expresión del tipo

$$\mathbb{E}[Y_t] = \int_0^t \delta e^{-\delta x} * (\text{Algo}(x))\,dx + \text{Término adicional}(t)$$

$\uparrow$ tamaño de la población

Esto motiva lo siguiente:

Ecuación de renovación:

La función de renovación U satisface la ec. de renovación

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)\,dF(s)$$

recordatorio $F(x) = \mathbb{P}[\xi_1 \leq x]$.

prueba:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$

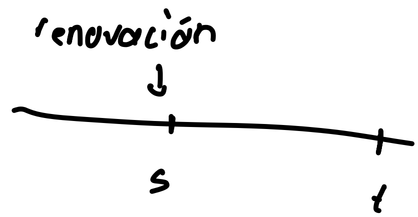
Notar que $F_k(t) = F * F_{k-1}(t)$

$$U(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F * F_{k-1}(t)$$

$$= F_0(t) + F * \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)}^{U(t)} = 1 + \int_0^t U(t-s)\,dF(s)$$

Proposición:

Sea H una función positiva y acotada & continua por derecha. Consideremos la ecuación:



$$\mu(t) = H(t) + \int_0^t \mu(t-s)\,dF(s) \qquad (1)$$

Usualmente, lo que queremos calcular en las aplicaciones

algo que sale en las "cuentas" de nuestro modelo.

Usualmente sale al "renovar" el proceso

tiene que ver, usualmente con "condicionar con respecto a ξ_1"

Entonces, existe una única solución a (1) dada por

$$\mu(t) = \int_0^t H(t-s)\,dU(s)$$

conocida

"más o menos" conocida

Demostración:

Usaremos transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\mu(q) = \int_0^\infty e^{-qx}\, d\mu(x)$$

Entonces, la ecuación: $\mu(t) = H(t) + \int_0^t \mu(t-s)\, dF(s)$

se reduce a

$$\mathcal{L}\mu(q) = \mathcal{L}H(q) + (\mathcal{L}\mu(q))(\mathcal{L}F(q)).$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\mu(q) = \frac{\mathcal{L}H(q)}{1-\mathcal{L}F(q)} = \mathcal{L}H(q)\left(1 + \mathcal{L}F(q) + (\mathcal{L}F(q))^2 + (\mathcal{L}F(q))^3 + \cdots\right)$$

$$= \mathcal{L}H(q)\left(1 + \mathcal{L}F(q) + \mathcal{L}F_2(q) + \mathcal{L}F_3(q) + \cdots\right)$$

$$\mathcal{L}\mu(q) = \mathcal{L}H(q)\, \mathcal{L}U(q) = \mathcal{L}(H*U)(q)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu(t) = H*U(t) = \int_0^t H(t-s)\, dU(s) \qquad \blacksquare$$

Objetivo:

estudiar dichas expresiones cuando $t \approx \infty$:

Observación: en el teorema anterior, teníamos

$$\mu(t) = \int_0^t H(\underbrace{t-s}_{x})\, dU(s) \overset{\uparrow}{=} \int_0^t H(x)\, d\underbrace{(U(t) - U(t-x))}$$

teorema de cambio de variable.

¿cómo estimar $U(t) - U(t-x)$ cuando t es grande?

Teorema de Blackwell:

Def: Decimos que el proceso de renovación (o la distribución F) es aritmética si

$\mathbb{P}[\xi_1 \in r\mathbb{N}] = 1$ para algún $r \in \mathbb{N}$.

Al máximo r que cumple esta propiedad se le conoce como el "paso de ξ".

Un ejemplo de proceso aritmético surge de una caminata aleatoria simétrica.

Aquí, $T(1), T(2), \ldots \leftarrow$ los tiempos de retorno a 0 dan una estructura de proceso de renovación aritmético con paso $r = 2$.

Teorema de Blackwell:

Supongamos que $\mathbb{E}[\xi_1] = m < \infty$.

i) Si F es no-aritmética, entonces $\forall\ h > 0$,

$$\lim_{x \to \infty} (U(x+h) - U(x)) = \frac{h}{m}$$

ii) Si F es aritmética con paso $r > 0$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} (U((n+1)r) - U(nr)) = \frac{r}{m}$$

Corolario (Teorema de renovación clave)

Supongamos que F no es aritmética, y $m = \mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Sea $g: [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función continua con soporte compacto.

Entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x g(x-s)\, dU(s) = \frac{1}{m}\int_0^\infty g(x)\, dx$$

prueba (bosquejo)

Notemos que

$$\int_0^x g(x-s)\, dU(s) \overset{y = x-s}{=} \int_0^x g(y)\, d\big(U(x) - U(x-y)\big)$$

Del teorema de blackwell,

$$U(x) - U(x-s) \longrightarrow \frac{s}{m} \qquad \text{cuando } x \approx \infty$$

de manera que, cuando $x \approx \infty$,

$$\int_0^x g(x-s)\, dU(s) \approx \int_0^x g(y)\, \frac{dy}{m} = \frac{1}{m}\int_0^x g(y)\, dy \approx \frac{1}{m}\int_0^\infty g(y)\, dy.$$

La siguiente clase:

Teorema de renovación elemental: Si $\mathbb{E}[\xi_1] = m < \infty$

i) $\frac{1}{t} U(t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{m}$ ← (pensar en el proceso Poisson)

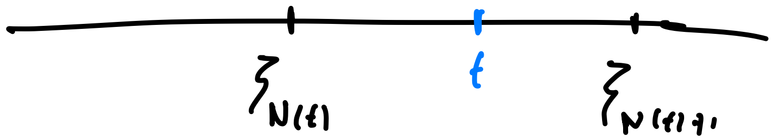
ii) $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{m}$ ← con probabilidad 1.

Lemma (Wald).

Supongamos que $m = \mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Entonces,

$$\mathbb{E}\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{N(t)+1} \xi_i}_{}\Big] = \mathbb{E}[\xi_1]\,\mathbb{E}[N(t)+1].$$

pensar que esta suma "localiza" el valor de t:



prueba:

Definir

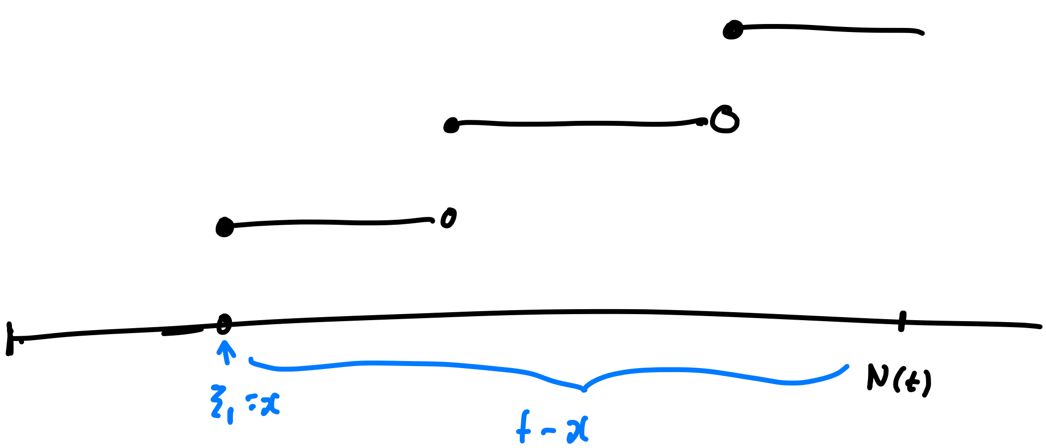
$$A(t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \xi_i\Big]$$

Condicionando sobre ξ_1, obtenemos

$$A(t) = \mathbb{E}\Big[(\xi_1 + \dots + \xi_{N(t)+1})(\mathbb{1}_{\{\xi_1 \le t\}} + \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}})\Big].$$

$$= \mathbb{E}\Big[(\xi_1 + \overbrace{\xi_2 + \dots + \xi_{N(t)+1}}^{})\,\mathbb{1}_{\{\xi_1 \le t\}}\Big] + \mathbb{E}\big[\xi_1 \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}\big]$$

Imaginar que $\xi_1 = x \le t$.



$$\Rightarrow A(t) = \int_0^t \Big(x + \mathbb{E}\big[\xi_1 + \dots + \dots\, \xi_{N(t-x)+1}\big]\Big) F(dx) + \mathbb{E}\big[\xi_1 \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}\big]$$

$$A(t) = \int_0^t \Big(x + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1 + \cdots + \cdots \xi_{N(t-x)+1}]}_{A(t-x)} F(dx) + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1 \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}]}_{\int_t^\infty x \, F(dx)}$$

$\Rightarrow$

$$A(t) = \mathbb{E}[\xi_1] + \int_0^t A(t-x) \, F(dx)$$ $\leftarrow$ ecuación como

$$\mu(t) = N(t) + \int_0^t \mu(t-s) \, dF(s)$$ $\leftarrow$ $\Big\{ \begin{array}{l} N(t) = \mathbb{E}[\xi_1] \\ \mu(t) = A(t) \end{array}$

$\Rightarrow$ Por resultados anteriores,

$$\underbrace{A(t)}_{\mu(t)} = \int_{[0,t]} \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1]}_{N(t-x)} U(dx) = \mathbb{E}[\xi_1](U(t) - \underbrace{U(0)}_{=0}) = \mathbb{E}[\xi_1](1 + \mathbb{E}[N(t)]).$$

$U(0) := 0.$ $\leftarrow$ $U(t) = \underbrace{F_0(t)}_{\text{Función de distribución degenerada en cero.}} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$

$\blacksquare$

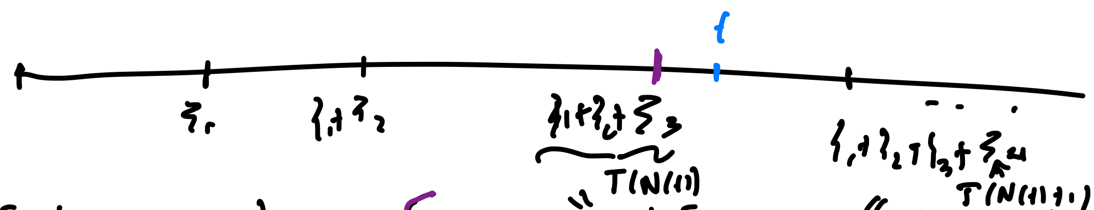
Continuación de la prueba del teorema elemental de renovación:

Primero estudiaremos

¿ $\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{m}$?

$\uparrow$

idea: asintóticamente, estudiaremos $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$



Intuitivamente, $S_{N(t)}$ "está cerca" de t.

Hace sentido entonces considerar la aproximación

$$\frac{t}{N(t)} \approx \frac{S_{N(t)}}{N(t)}$$

Imanol: $\mathbb{P}[\{N(t) \geq c\}] = \mathbb{P}[\{T(c) \leq t\}] \xrightarrow{c \to \infty} 1$

$\Rightarrow N(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$

monotonicidad $\Rightarrow N(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$

Para formalizar esto notemos que

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} t \frac{N(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} t \cdot \mathbb{E}[\xi_1] = \infty \quad \text{con proba } 1,$$

ley fuerte de grandes números

Recordar que $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N};\ T(n) \leq t\}$.

$T(n) =$ n-ésimo tiempo de renovación

Definimos:

$A_1 = \{\omega \in \Omega;\ N(t)(\omega) \to \infty,\ t \to \infty\}$.

$A_2 = \{\omega : \frac{S_n}{n}(\omega) \to \mathbb{E}[\xi_1] = m \text{ cuando } t \to \infty\}$

Notar que $\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_2] = 1$

En $\omega \in A_1 \cap A_2$,

$$\frac{S_{N(t)}(\omega)}{N(t)(\omega)} \xrightarrow{t \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = m \quad (*).$$

Finalmente, ya que $N(t) \to \infty$, entonces, para $t \approx \infty$,

$$\left| \frac{S_{N(t)}}{N(t)} - \frac{t}{N(t)} \right| \leq \frac{\xi_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{t \to \infty} 0.$$

$$\therefore \quad \frac{t}{N(t)} \xrightarrow{t \to \infty} \lim_{t \to \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \overset{\text{por } (*)}{=} m.$$

Ahora probamos la parte i):

i) $\frac{1}{t} U(t) \to \frac{1}{m}$ cuando $t \to \infty$.

Observemos lo siguiente:

$$T(N(t)) \leq t < T(N(t)+1). \quad (*)$$

Por lo tanto,

$$\frac{T(N(t))}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T(N(t)+1)}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

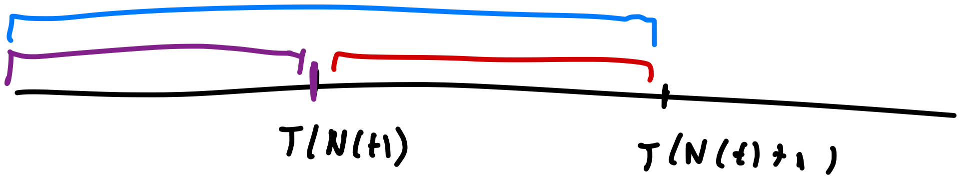
lo que obtengo de aquí es que con proba 1,

$$\underset{\substack{\downarrow \\ m}}{\frac{T(N(t))}{N(t)}} \leq \frac{t}{N(t)} < \underset{\substack{\downarrow \\ m}}{\frac{T(N(t)+1)}{N(t)+1}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{N(t)+1}{N(t)}} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = m$$

Por ⊛,

$$T(N(t)) \leq t$$

$$t \geq \mathbb{E}[T(N(t))] = \mathbb{E}[T(N(t)+1) - \xi_{N(t)+1}] = m\,U(t) - \mathbb{E}[\xi_{N(t)+1}]$$



$$\Rightarrow \limsup_{t\to\infty} m\frac{U(t)}{t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{(mU(t) - \mathbb{E}[\xi_{N(t)+1}])}{t} \leq \limsup \frac{t}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \limsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \leq m.$$

Para la desigualdad inversa, definimos

$$\xi_j^c = \begin{cases} \xi_j & \text{si } \xi_j < c \\ c & \text{si } \xi_j \geq c \end{cases}$$

para $c > 0$. Ahora, consideremos al proceso N^c asociado a los tiempos $\{\xi_j^c\}$. Notemos que si $m^c = \mathbb{E}[\xi_j^c]$, razonando como antes, tenemos

$$t \geq m^c\,\mathbb{E}[N^c(t)+1] - \mathbb{E}[\xi_{N(t)+1}] \geq m^c\,\mathbb{E}[N^c(t)+1] - c. \quad (1)$$

Como $\xi_j^c \leq \xi_j \ \forall\ j \geq 1 \Rightarrow N^c(t) \geq N(t) \ \forall\ t \geq 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N^c(t)] + 1 \geq \mathbb{E}[N(t)] + 1 = U(t) \quad (2)$$

Por (1) y (2), $t \geq m^c\,U(t) - c$.

$t \geq m^c U(t) - C.$

De aquí se sigue que

$$\frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m^c} + \frac{C}{m^c t}$$

Sacando $\limsup\limits_{t\to\infty}$, obtengo

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m^c} \quad \leftarrow \quad \forall \quad c > 0$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m} \qquad (**)$$

Para hacer el límite inferior:

$$t < \mathbb{E}[T(N(t)+1)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \xi_i\right] = \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1]}_{m}\underbrace{\mathbb{E}[N(t)+1]}_{U(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} < \frac{U(t)}{t} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \geq \frac{1}{m} \qquad (***)$$

Por (***) y (**),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = m. \quad \blacksquare$$

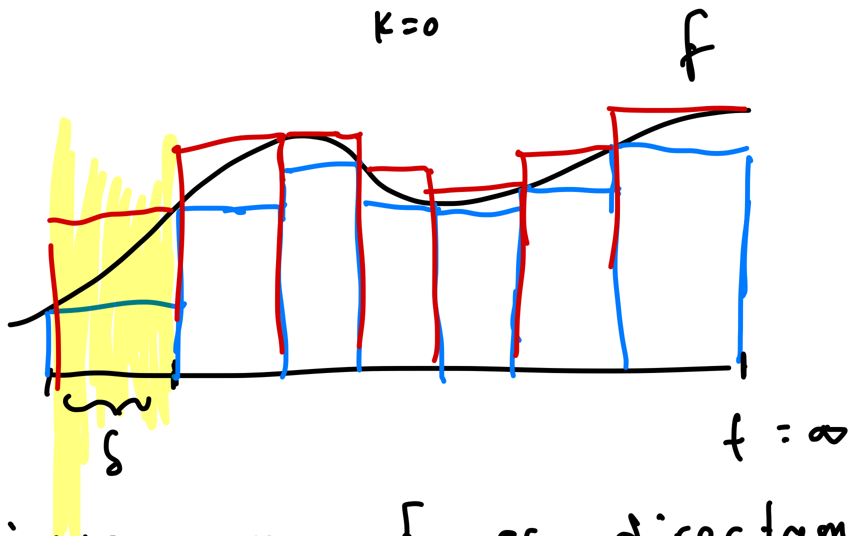
Definición:

Sea $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función arbitraria.

Definimos

$$I_\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf\{f(x);\ x\in[\delta k,\delta(k+1)]\}$$

$$I^\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup\{f(x);\ x\in[\delta k,\delta(k+1)]\}.$$



Decimos que f es directamente Riemann integrable si $\lim_{\delta\to 0} I_\delta = \lim_{\delta\to\infty} I^\delta$

Reforzamiento del teorema de renovación clave:

Supongamos que F es una Función de distribución! de una v.a. positivo con media μ. Suponer que $a: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es directamente Riemann integrable.

Sea A la solución a la ecuación de renovación

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)\,F(dx).$$

(recordar que la sol. es $A(t) = \int_0^t a(t-x)\,\underset{\text{función de renovación.}}{U(dx)}$)

i) Si F es no aritmética, entonces

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(x)\,dx & \text{si} \quad \mu < \infty \\ 0 & \text{si} \quad \mu = \infty. \end{cases}$$

ii) Si F es aritmética, con tamaño de paso λ, entonces $\forall$ $c>0$,

$$\lim_{n\to\infty} A(c+n\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu}\sum_{n=0}^\infty a(c+n\lambda) & \text{si} \quad \mu < \infty \\ 0 & \text{si} \quad \mu = \infty. \end{cases}$$

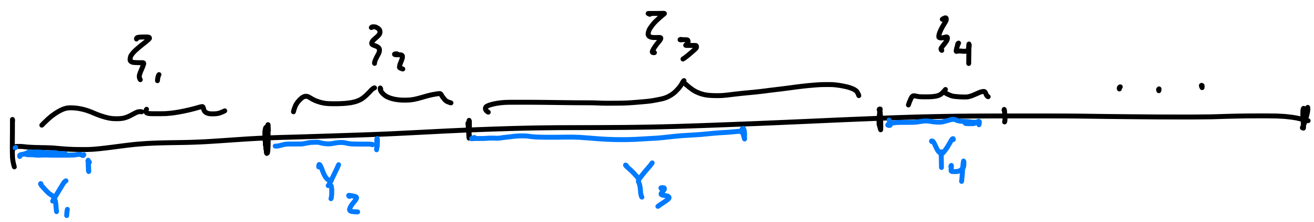
Aplicaciones de la teoría de renovación:

Ejemplo 1.:)

Procesos de renovación con dos componentes en cada intervalo de renovación.

$\{\xi_i, Y_i\} \subset$ • ξ_i ← tiempo aleatorio real. (no infinito). (Por ejemplo, un tiempo de servicio)

• Y_i ← una porción de ξ_i.



Suponer que los vectores (ξ_i, Y_i) son indep. entre sí

Sea $p(t)$ la prob. de que t caiga en una "porción Y" de algún intervalo de renovación.

Condicionamos sobre $\{\xi_1 = x\}$ y distinguimos entre las dos posibilidades $x < t$ y $x \geq t$.

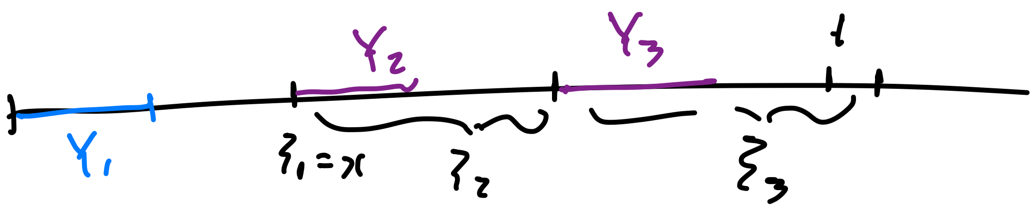
$$\rho(t) = \int_0^\infty \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto } | \xi_1 = x]\, F(dx)$$

$$= \int_0^t \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto } | \xi_1 = x]\, F(dx)$$

$$+ \int_t^\infty \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto } | \xi_1 = x]\, F(dx)$$

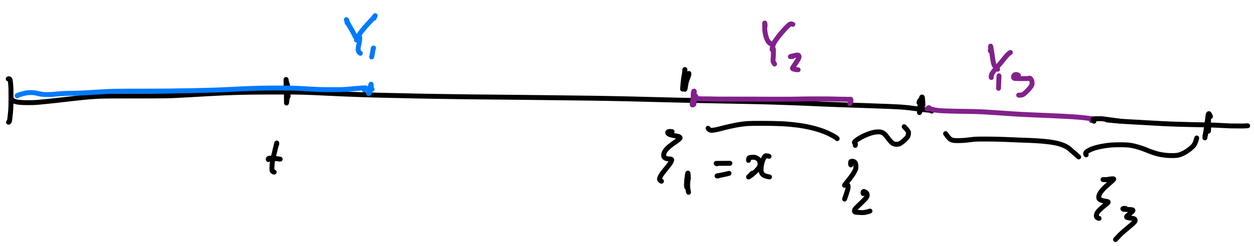
$$e(t) = \int_0^t \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto} \mid \xi_0 = x]\, F(dx)$$

$$+ \int_t^\infty \mathbb{P}[\underbrace{t \text{ esté cubierto}}_{t \text{ esté cubierto por } Y_1} \mid \xi_0 = x]\, F(dx)$$



← caso $x \leq t$

$$\Rightarrow \quad e(t) = \int_0^t \underbrace{e(t-x)}_{\mu} F(dx) + \underbrace{\mathbb{P}[t \text{ esté cubierto por } Y_1]}_{H}$$



← caso $x > t$

La solución a la ecuación de renovación

$$\mu(t) = \int_{[0,t]} \mu(t-s)\, F(ds) \quad \text{es}$$

$$\mu(t) = \int_{[0,t]} H(t-s)\, U(ds), \quad \text{donde} \quad \mu(t) = e(t)$$

$$H(t) = \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto por } Y_1]$$

$$\lim_{t \to \infty} p(t) \overset{?}{=} \frac{1}{\mathbb{E}[\xi_1]} \int_0^\infty H(x)\, dx$$

Ahora,

$\mathbb{P}[t$ está cubierto por $Y_1]$

$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,Y_1]}(t)]$

Obs: $t \mapsto \mathbb{P}[t$ está cubierto por $Y_1]$ es decreciente, y

$$\int_0^\infty \mathbb{P}[t \text{ está cubierto por } Y_1]\,dt$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,Y_1]}(t)]\,dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,Y_1]}(t)\,dt\right]$$

$$= \mathbb{E}[Y_1] =: \gamma. \leftarrow \text{definamos } \gamma \text{ así.}$$

Se puede ver fácil de aquí que $t \mapsto \mathbb{P}[t$ está cubierto por $Y_1]$ es directamente Riemann integrable, y por el teorema de renovación clave (parte 2),

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[Z_1]} \int_0^\infty \mathbb{P}[t \text{ está cubierta por } Y_1]\,dt$$

$$= \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[Z_1]}$$

Para la siguiente clase:

$$X_t = \underbrace{z}_{\substack{\uparrow \\ \text{capital} \\ \text{inicial}}} + c\underbrace{t}_{\substack{\uparrow \\ \text{prima}}} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

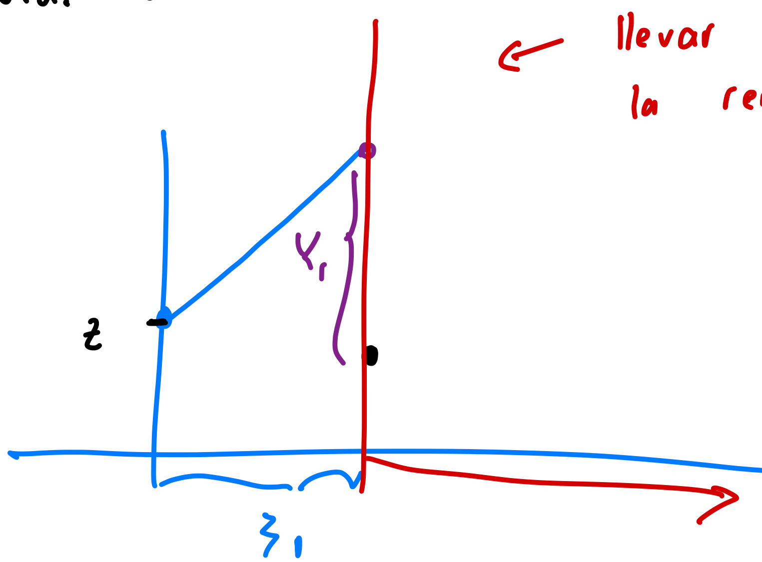
- $N(t) \leftarrow$ proceso Poisson
- $Y_i \leftarrow$ tamaño del reclamo.

Pregunta de interés:

$$R(z) = \mathbb{P}[X_t > 0 \quad \forall \quad t > 0].$$

Idea: determinar una ecuación de renovación para R.

$\leftarrow$ llevar a cabo la renovación.



Ejemplo de lo visto anteriormente:

Modelos de colas:

Si las llegadas de una cola siguen un proceso Poisson, entonces los tiempos sucesivos ξ_K del K-ésimo tiempo en que el servidor se encuentra ocupado forma un proceso de renovación

se encuentra solicitado.

Podemos suponer que cada ξ_K se compone de una porción ocupada Z_K y una porción libre Y_K

Entonces $e(t)$, la probabilidad de que el servidor esté libre al tiempo t converge a

$$\frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_1]} = \frac{Y_1}{\mathbb{E}[\xi_1]}.$$

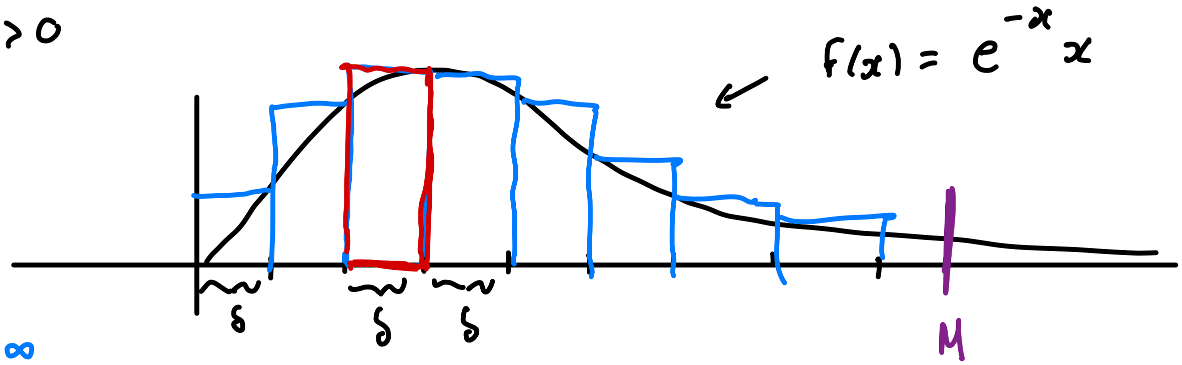
Paréntesis sobre cómo probar que una función es directamente Riemann integrable

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = x e^{-x}$$

Probemos que es directamente Riemann integrable.

Sea $\delta > 0$



$$I^{\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup\{ f(x) ; \ x \in [k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup\{ e^{-x} x : \ x \in [k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$I_{\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf\{ f(x) : \ x \in [k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf\{ e^{-x} x ; \ x \in [k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$0 \leq I^{\delta} - I_{\delta} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-(k+1)\delta} k\delta \right)$$

$$0 \le I^{\delta} - I_{\delta} \le \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-(k+1)\delta} k\delta \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-k\delta} k\delta \right)$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(e^{-(k+1)\delta} k\delta - e^{-k\delta} k\delta \right)$$

teorema del valor medio

$$= \delta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta e^{-k\delta} - \sum_{k=0}^{\infty} \delta (k\delta) e^{-\xi_k \delta} \right)$$

$$\le \delta \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \delta e^{-k\delta} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta (k\delta) e^{-k\delta}}_{\text{ver que está acotado sobre } \delta.} \right) \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

Más aplicaciones:

Procesos de acumulación

Suponer que tenemos variables Y_i que representan un costo o valor, etc.

Ahora vamos a considerar una clase de problemas que dependen de parejas $(\xi_i, Y_i) \leftarrow$ i.i.d.

donde ξ_i genera un proceso de renovación

Definimos el proceso de acumulación asociado como

$$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k$$

Interpretación: costo acumulado al tiempo t.

Pregunta natural: $\mu(t) := \mathbb{E}[W(t)] \approx ?$ cuando $t \to \infty$.

Nota:

el mismo resultado vale cuando

$$\tilde{W}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k.$$

justificación:

$$\tilde{W}(t) = \left(\frac{1}{N(t)} \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \right) \cdot \frac{N(t)}{t}$$

$$\frac{N(t)}{t} = \underbrace{\frac{N(t)+1}{t}}_{\to \frac{1}{m}} \cdot \underbrace{\frac{N(t)}{N(t)+1}}_{\to 1}$$

$\downarrow$ ley de grandes números

$\mathbb{E}[Y_1] \cdot \frac{1}{m}$

Idea para calcular

$\mu(t) = \mathbb{E}[W(t)]$ es

condicionar en el primer tiempo de renovación:

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[W(t)\, \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}] + \mathbb{E}[W(t)\, \mathbb{1}_{\{\xi_1 \leq t\}}]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k\, \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}\Big] + \int_{[0,t]} \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \;\Big|\; \xi_1 = x\Big] F(dx).$$

$$\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[Y_1] + \int_{[0,t]} \mathbb{E}[W(t-x)]\, F(dx)$$

↑ el proceso comienza de nuevo en x

$H(t)$

$$\Rightarrow \mu(t) = \mathbb{E}[Y_1] + \int_0^t \mu(t-x)\, F(dx)$$

$H(t-x)$

$$\Rightarrow \mu(t) = \int_0^t \mathbb{E}[Y_1]\, U(dx) = \mathbb{E}[Y_1]\, U(t).$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\mu(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[Y_1]\, \frac{U(t)}{t} = \mathbb{E}[Y_1] \cdot \frac{1}{m}$$

$$m = \int x\, F(dx) = \mathbb{E}[\xi_1].$$

Algunas ideas nuevas:

$$\mu^\lambda(t) = \mathbb{E}[e^{i\lambda W(t)}]$$

Podría ser (lo voy a checar).

Idea: Formular

alguna función de distribución

$$\mu^\lambda(t) = H^\lambda(t) + \int_{[0,t]} \mu^\lambda(t-x)\, G(dx)$$

Modelos de reemplazo:

Supongamos que Y_i representa el costo del i-ésimo reemplazo. Supongamos que bajo una estrategio de reemplazo por edad, un reemplazo planeado al tiempo T cuesto C_1 y un reemplazo por falla al tiempo $t < T$ cuesto C_2. Si Y_K es el costo del K-esimo ciclo de reemplazo, entonces

$$Y_K = \begin{cases} C_1 & \text{con probabilidad } 1-F(T). \\ C_2 & \text{con probabilidad } F(T). \end{cases}$$

En este caso $\mathbb{E}[Y_K] = C_1(1-F(T)) + C_2 F(T).$

¿Qué proceso de renovación estaré considerando?

los tiempos que generan a mi proceso de renovación van a ser:

$\xi_k \leftarrow$ tiempos de las fallas:

Si G es la función de distribución de los ξ_k.

Los tiempos que generan a mi proceso de renovación serán:

$\xi_k \wedge T \leftarrow$ nuevamente son i.i.d.

$$\mathbb{E}[\xi_k \wedge T] = \int_0^\infty \mathbb{E}[\xi_k \wedge T \mid \xi_k = x]\, G(dx) = \int_0^\infty \mathbb{E}[x \wedge T \mid \xi_k = x]\, G(dx)$$

$$= \int_0^T x\, G(dx) + \int_T^\infty T\, G(dx) = \int_0^T x\, G(dx) + T(1 - G(T))$$

Notar también que:

$$\mathbb{E}[Y_k] = c_1\, \mathbb{P}[\text{No reemplazo}] + c_2\, \mathbb{P}[\text{reemplazo}]$$

$$= c_1(1 - G(T)) + c_2\, G(T).$$

Sea $M(t)$ = proceso de renovación asociado a los tiempos $\{\xi_k \wedge T\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Costo acumulado al tiempo t. $= \sum_{k=1}^{M(t)+1} Y_k$

Si

$$M(t) = \mathbb{E}\left[\begin{array}{c}\text{Costo acumulado}\\ \text{al tiempo } t.\end{array}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{M(t)+1} Y_k\right]$$

entonces,

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{M(t)}{t}} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_1 \wedge T]} = \frac{c_1(1-G(T)) + c_2 G(T)}{\int_0^T x\, G(dx) + T(1-G(T))}$$

Interpretación
de costo esperado promedio.

Otra interpretación:

Teoría de riesgo:

$Y_k \leftarrow$ tamaño de reclamos de los asegurados

$\xi_k \leftarrow$ tiempos de los reclamos.

$N(t) \leftarrow$ conteo de los reclamos al tiempo t.

$$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \quad \leftarrow \text{costo acumulado:}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[W(t)]}{t} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_1]}$$

Plan para examen:

Viernes 19, 20 y 22 ← sesiones de ejercicios

Examen para llevar:
del 24 al 29 de Marzo
(pensando que la duración está planeada del
24 al 26)

Continuación de aplicaciones de procesos de renovación:

Procesos de renovación terminal:

$E[N(t)]$ ← ya lo estudiamos:

$N(t)$ ← cantidad de renovaciones
con tiempos interarrivos $\xi_1, \xi_2, \ldots,$

Siempre suponemos $\xi_i \in \mathbb{R}_+$ ← (en particular, $\xi_i \neq \infty$).

(Pensar en proceso de riesgo:

$$Z(t) = -\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k + ct + z.)$$

Es relevante considerar el caso ξ_i puede tomar el valor infinito

Supongamos que ξ_i son una v.a.i.i.d. con valores en $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. El proceso de renovación asociado

$N(t)$ = # renovaciones antes del tiempo t.

se conoce como proceso de renovación terminal.

Pensar que

"No hay más renovaciones" $\longleftrightarrow$ "algún ξ_i tomó el valor infinito".

Al igual que antes:

$$\{N(t) \geq k\} = \{T_k \leq t\}$$

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$$

y se puede estudiar, $\mathbb{E}[N(t)]$:

Denotemos por

$N(\infty)$ = número total de renovaciones $= \lim_{t \to \infty} N(t)$

(Notar que si $\xi_1 = \infty$, entonces $N(\infty) = 0$).

¿Cuál es la distribución de $N(\infty)$?

- $N(\infty)$ puede tomar los valores $0, \infty, 1, 2, \ldots$

$$\{N(\infty) \geq k\} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \text{ son finitos}\}.$$
$$= \{\xi_1 < \infty\} \cap \cdots \cap \{\xi_k < \infty\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}[N(\infty) \geq k] = \mathbb{P}[\xi_1 < \infty]^k = L^k$$

donde $L = \mathbb{P}[\xi_1 < \infty]$.

$L = \mathbb{P}[\xi_1 < \infty]$

Notemos que, como antes

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) < \sum_{k=1}^{\infty} L^k = \frac{L}{1-L} \qquad \text{si} \quad L < 1$$

$$F_k = \underbrace{F * \dots * F}_{k \text{ veces}}$$

El argumento de renovación sigue funcionando

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[N(t) \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}] + \mathbb{E}[N(t) \mathbb{1}_{\{\xi_1 \le t\}}]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[N(t)] = F(t) + \int_0^t \mathbb{E}[N(t-s)] F(ds) \quad \leftarrow \text{ecuación de renovación}$$

Problema: F no es una función de distribución en $\mathbb{R}_+$, sino en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

La idea para resolver esto es "modificar F".

Consideremos la función

$$g(s) = \int_0^\infty e^{sx} F(dx)$$

y supongamos que $\int_0^\infty e^{sx} F(dx) < \infty \quad \forall \quad s > 0.$

Notar que

asumir

- $g(0) = \lim_{x\to\infty} F(x) = \mathbb{P}[\xi_1 < \infty] = L < 1$
- $\lim_{s\to\infty} g(s) = \infty$
- Por argumentos de teoría de la medida, se puede ver que $g(s)$ es continua

$\Rightarrow$ Por teorema del valor intermedio, $\exists \; s_0 =: \lambda > 0$ t.q. $g(\lambda) = 1$.

Conclusión:

$$\hat{F}(t) := \int_0^t e^{\lambda x} F(dx) \quad \text{satisface}$$

$$\left(\int_A \hat{F}(t) = \int_A e^{\lambda t} F(dt) \right)$$

Nota:

$$\left(\hat{F}(t) \neq e^{\lambda t} F(t) \right)$$

$$\lim_{t\to\infty} \hat{F}(t) = \int_0^\infty e^{\lambda x} F(dx) = g(\lambda) = 1$$

$\Rightarrow$ $\hat{F}$ es una función de distribución.

Ahora, supongamos que tenemos una ec. de renovación "abstracta" de la forma

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) F(dx)$$

Fijemos $\hat{A}(t) = e^{\lambda t} A(t), \qquad \hat{a}(t) = e^{\lambda t} a(t).$

Notar que

$$\hat{A}(t) = \hat{a}(t) + \int_0^t \hat{A}(t-x) \hat{F}(dx)$$

Aplicación de esta idea:

Tomar

$$A(t) = \mathbb{E}[\underset{\uparrow}{N(\infty)} - N(t)] = \frac{L}{1-L} - \mathbb{E}[N(t)]$$

ley geométrica

(i.e. $A(t)$ es el número promedio de índices n

t.q $t < T_n < \infty$.

Queremos hacer un arg. de renov. para

$A(t) \leftrightarrow$ condicionar sobre ξ_1:

$$\mathbb{E}[N(\infty) - N(t) \mid \xi_1] = \begin{cases} 1 + \frac{L}{1-L} = \frac{1}{1-L} & \text{si } \xi_1 > t \\ A(t-\xi_1) & \text{si } 0 < \xi_1 \leq t \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$A(t) = \frac{1}{1-L} \mathbb{P}[\xi_1 > t, \xi_1 < \infty] + \int_0^t A(t-x) F(dx)$$

$\Rightarrow$

$$A(t) = \underbrace{\frac{1}{1-L}(L - F(t))}_{a(t).} + \int_0^t A(t-x) F(dx).$$

Definir

$$\hat{a}(t) = \frac{e^{\lambda t}(L - F(t))}{1-L}. \quad \text{y} \quad \hat{A}(t) = e^{\lambda t} A(t)$$

$\Rightarrow$

$$\hat{A}(t) = \hat{a}(t) + \int_0^t \hat{A}(t-x) \hat{F}(dx)$$

¿Puedo aplicar el teorema de renovación clave?

Probemos que $\hat{a}(t)$ es directamente Riemann integrable:

creciente, decreciente:

$$\int_0^\infty \hat{a}(t)\,dt = \frac{1}{1-L}\int_0^\infty e^{\lambda t}\,(L-F(t))\,dt$$

$$= \frac{1}{1-L}\int_0^\infty e^{\lambda t}\int_t^\infty F(ds)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-L}\int_0^\infty \int_0^s e^{\lambda t}\,dt\,F(ds)$$

$$= \frac{1}{1-L}\int_0^\infty \frac{(e^{\lambda s}-1)}{\lambda}\,F(ds)$$

$$= \frac{1-L}{(1-L)\lambda} = \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

$\leftarrow$ (otro approach:

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\,G(dt)$$

$$dG(t) = (L-F(t))\,dt.$$

$$\Updownarrow$$

$$G(t) := \int_0^t (L-F(s))\,ds$$

como $t \mapsto e^{\lambda t}$ es creciente, basta ver que

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\,G(dt) < \infty,)$$

Procediendo como en el ejemplo donde $a(t) := te^{-t}$ se puede ver que $\hat{a}(t)$ es directamente Riemann integrable,

$\Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t}\left(\mathbb{E}[N(\infty)] - \mathbb{E}[N(t)]\right) = \lim_{t\to\infty} \hat{A}(t) = \frac{\int_0^\infty \hat{a}(t)\,dt}{\int_0^\infty x\,\hat{F}(dx)} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\int_0^\infty x\,\underbrace{e^{\lambda x}F(dx)}_{\hat{F}(dx)}}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t}\left(\frac{L}{1-L} - \mathbb{E}[N(t)]\right) = \frac{1}{\lambda\int_0^\infty x\,e^{\lambda x}\,F(dx)}$$

Problemas concretos referentes a procesos de acumolación:

Ejemplo de "fila de banco".

Ingredientes

- Clientes que llegan a un banco de acuerdo a un proceso Poisson (λ).
- Sólo hay un servidor
- Los clientes "entran" al banco si el servidor está libre.
- Tiempos de servicio son v.a. i.i.d. con distribución $G(x)$, independientes de las llegadas de clientes.
- Cada que llega un cliente, deposita cierta cantidad de dinero, con distribución $M(x)$.

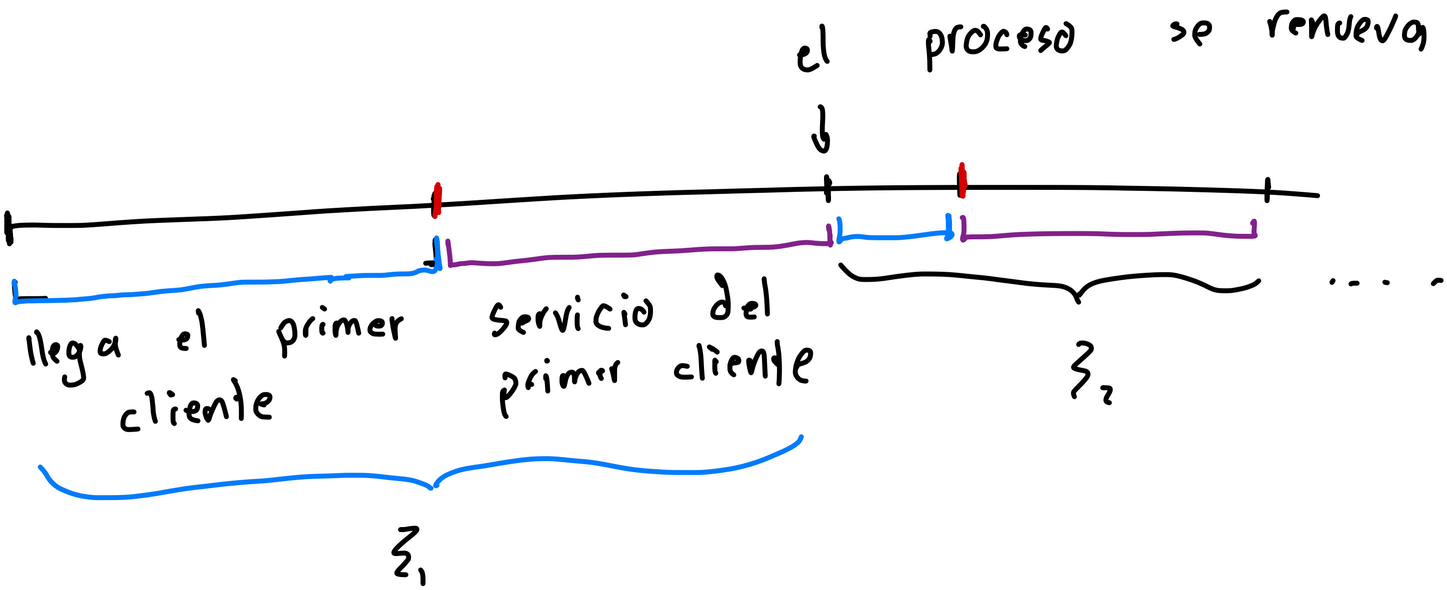
¿ Tasa asintótica de los depósitos ?

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{\text{total de depósitos al tiempo } t}{t}\right] = \, ?$$

Ideas: Introducir un proceso de renovación.

. $\xi_i = ?$

(el proceso se renueva cada vez que termina el servicio de un cliente)



$M(t) =$ # de renovaciones al tiempo t.

Definir $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d $\sim H$

Y_i representa el dinero depositado por el i-ésimo cliente.

Dinero acumulado en el banco $= \displaystyle\sum_{i=1}^{M(t)} Y_i$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\text{total de depósitos al tiempo } t}{t} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_i]} = *$$

Necesitamos que la ley de ξ_1 sea no-aritmética

Ello se cumple pues ξ_1 es v.a. continua

(debido a que es la suma de una v.a. Y_i con una v.a. independiente $\sim \exp(\lambda)$).

$$* = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} x\, H(dx)}{\mathbb{E}[\xi_1]} = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} x\, H(dx)}{\frac{1}{\lambda} + \int_{\mathbb{R}_+} x\, G(dx)}.$$

$$\mathbb{E}[\xi_1] = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{E}[\text{tiempo del Primer cliente}}}{\frac{1}{\lambda}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tiempo de atención}]}}{\int_{\mathbb{R}_+} x\, G(dx)}$$

Resultado que usamos: (aplicaciones del teorema de renovación clave $\leftarrow \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}_+} a(x)\,dx$)

Ejemplo 2:)

Modelo de compra de autos:

Ingredientes:

- Una persona renueva su auto
- Compra un auto nuevo sii $\begin{cases} \text{su auto actual se descompone} \\ \text{Pasa una cantidad de tiempo } T > 0 \end{cases}$

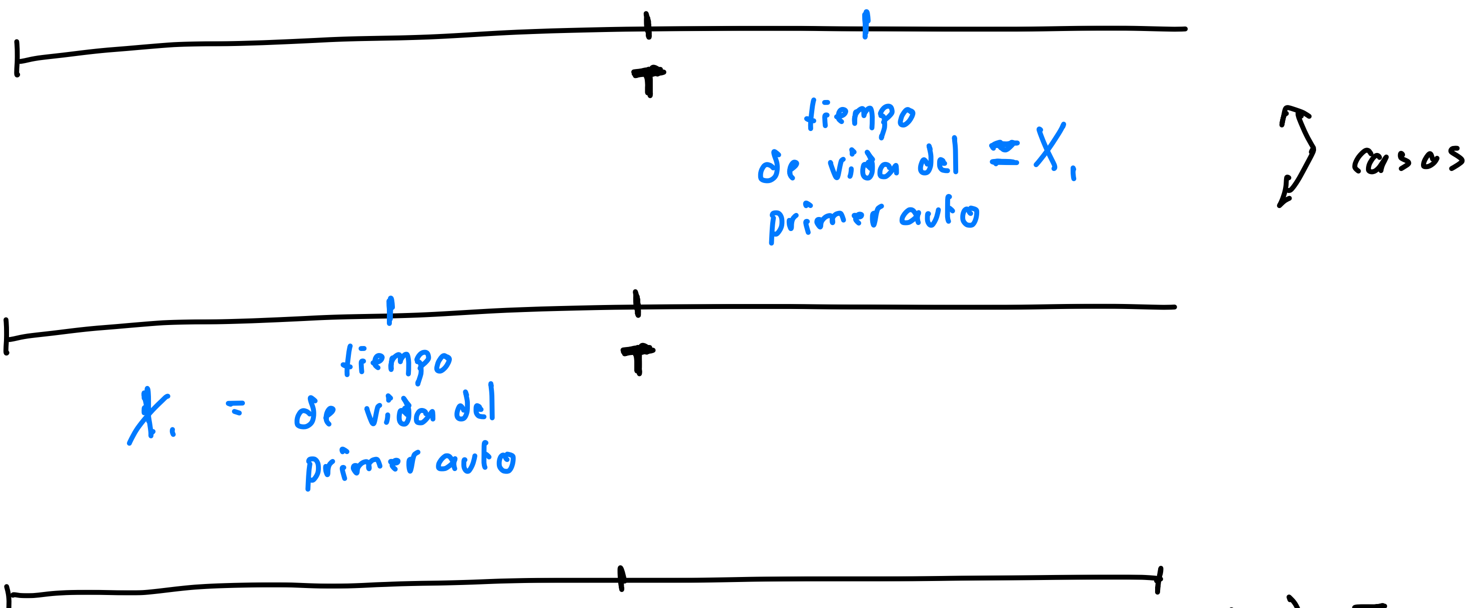
- Un auto nuevo cuesta una cantidad determinista C_1. Pero si su auto se descompuso, además de invertir C_1 en el auto nuevo, debes pagar C_2 por la reparación del auto viejo.

- Los tiempos de vida de los autos son. v.a.i.i.d con ley común dado por una func. de distribución H.

¿Cual es la esperanza del costo acumulado promedio?

¿Cuál es la esperanza del costo acumulado promedio?

- Tiempos de renovación tendrán ley igual a $\leftarrow$ tiempos $\xi_1, \xi_2, \ldots$
(tiempo de vida de los autos) $\wedge T$



$\xi_1 = $ (tiempo de vida de los autos) $\wedge T$

- $M(t) \leftarrow$ proceso de renovación con tiempos ξ_i

- Costo acumulado al tiempo t $= \displaystyle\sum_{i=1}^{M(t)} \underbrace{(\text{costo de la i-ésima renovación})}_{Y_i}$

$$Y_i = \mathbb{1}_{\{X_i > T\}} C_1 + \mathbb{1}_{\{X_i \leq T\}} (C_1 + C_2)$$

Lo único que requerimos es que los vectores

$\{(\xi_i, Y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ sean indep.

Supongamos que la ley de X_1 es una v.a. continua $\Rightarrow$ $X_i \wedge T = \xi_i$ tienen ley no aritmética

Por la aplicación previamente vista sobre procesos de acumulación,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right] = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_1]} = \frac{\mathbb{E}\left[C_1 \mathbb{1}_{\{X_1 > T\}} + (C_1+C_2)\mathbb{1}_{\{X_1 \le T\}}\right]}{\mathbb{E}[\xi_1]}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi_1] &= \mathbb{E}\left[\xi_1 \mathbb{1}_{\{X_1 > T\}}\right] + \mathbb{E}\left[\xi_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \le T\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[T \mathbb{1}_{\{X_1 > T\}}\right] + \mathbb{E}\left[X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \le T\}}\right] \\ &= T\,\mathbb{P}[X_1 > T] + \int_0^T x\, H(dx) = T(1-H(T)) + \int_0^T x\, H(dx)\end{aligned}$$

$X_1 \sim$ Función de distribución H

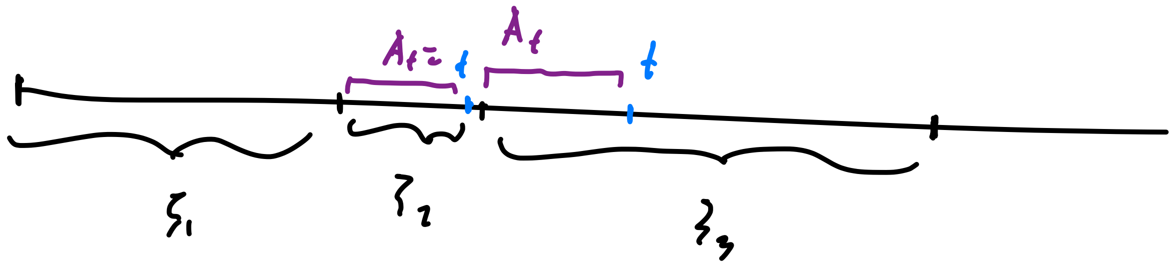
Conclusión:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right] = \frac{C_1(1-H(T)) + (C_1+C_2)H(T)}{T(1-H(T)) + \int_0^T x\, H(dx)}$$

$$= \frac{C_1 + C_2 H(T)}{T(1-H(T)) + \int_0^T x\, H(dx)}$$

Ejercicios adicionales

Proceso de tiempo de edad A_t = tiempo desde la última ocurrencia



Pregunta natural:

cual es el promedio de A_t

$$\lim_{s\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{s}\int_0^s A_u\,du\right]$$

$\uparrow$

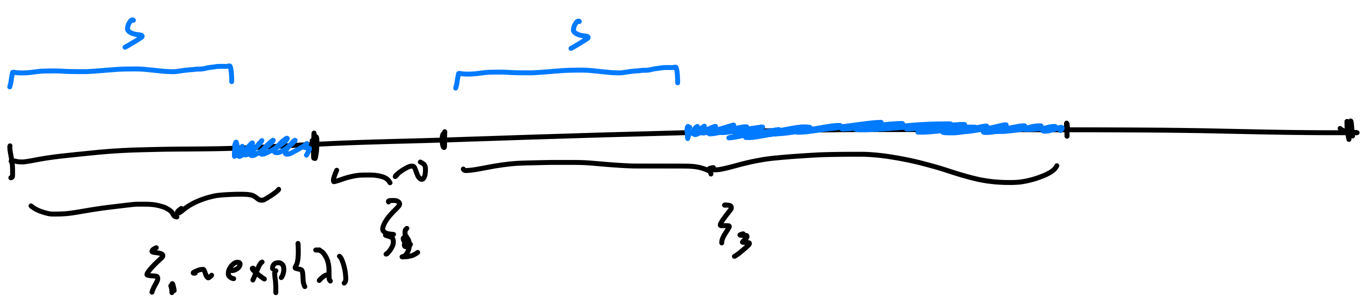
ver como proceso de acumulación

Ejercicio:

Ingredientes:

- Compañía de seguros cobra cierta prima.
- Se pueden cobrar primas r_0 y r_1
- Antes de cada reclamo, me cobraron:

$$\begin{cases} r_0 & \text{si el reclamo duró más que "s"} \\ r_1 & \text{si el reclamo duró menos que "s"} \end{cases}$$



- Tiempos interarrivos $\sim \exp(\lambda)$. $\Rightarrow \mathbb{E}[\xi_1] = \frac{1}{\lambda}$

- $\mathbb{E}$[Proporción de tiempo que ξ_1 estuvo cubierto]

$$= (\mathbb{E}[\xi_1 - \xi_1 \wedge s])$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \mathbb{E}[\xi_1 \wedge s]$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \left(\int_0^s x \underbrace{(\lambda e^{-\lambda x}) dx}_{F(dx)} + s \int_s^\infty \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{F(dx)} \right)$$

$u = x \qquad v = e^{-\lambda x}$

$du = dx \qquad dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{(1 - e^{-\lambda s})}{\lambda}$$

costo promedio

$$= r_0 \left(\frac{\mathbb{E}[\text{Proporción de tiempo cubierto}]}{\mathbb{E}[\xi_1]} \right) + r_1 \left(\frac{\mathbb{E}[\text{Proporción de tiempo no cubierto}]}{\mathbb{E}[\xi_1]} \right)$$

costo promedio

$$= r_0\left(\frac{\mathbb{E}[\text{Proporción de tiempo cubierto}]}{\mathbb{E}[\xi_1]}\right) + r_1\left(\frac{\mathbb{E}[\text{Proporción de tiempo no cubierto}]}{\mathbb{E}[\xi_1]}\right)$$

$$= r_0\left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s})}{\frac{1}{\lambda}}\right) + r_1\left(\frac{\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s})}{\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$= r_0 e^{-\lambda s} + r_1(1-e^{-\lambda s})$$

Costo al tiempo t $= r_0 \cdot \left(\begin{array}{l}\text{tiempo cubierto por un intervalo azul}\\ \text{antes del tiempo } t\end{array}\right)$

$+ r_1 \left(\begin{array}{l}\text{tiempo no cubierto por un intervalo azul}\\ \text{antes del tiempo } t\end{array}\right)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\mathbb{E}\left(\begin{array}{l}\text{costo promedio}\\ \text{al tiempo } t\end{array}\right)}{t} = r_0 \lim_{t\to\infty} \cdot \left(\begin{array}{l}\text{tiempo cubierto por un intervalo azul}\\ \text{antes del tiempo } t\end{array}\right)$$

$$r_1 \lim_{t\to\infty} \left(\begin{array}{l}\text{tiempo no cubierto por un intervalo azul}\\ \text{antes del tiempo } t\end{array}\right)$$

$$= r_0\left(\frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_1]}\right) + r_1\left(\frac{\mathbb{E}[\xi_1 - Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_1]}\right)$$

$T = \min\{n \geq 1 ; R_n > s\}$.

$\{T = n\} = \{\max\{R_1, \dots, R_{n-1}\} \leq s\} \cap \{R_n > s\}$

$T_n \sim geom(p)$, $\quad \alpha = \mathbb{P}[R_1 > s]$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T_n} R_k\right] = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{m} R_k \,\middle|\, T_n = m\right]} \cdot (1-\alpha)^{m-1}\alpha$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{m-1} R_k \,\middle|\, R_1, \dots, R_{m-1} \leq s\right] + \mathbb{E}[R_m \mid R_m > s]$$

$$= (m-2)\int_0^s x e^{-\lambda x}\, dx + \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T_n} R_k\right] = (1-\alpha)^m \int_0^s x e^{-\lambda x}\, dx + \left(\frac{1}{\lambda} - 2\int_0^s x e^{-\lambda x}\, dx\right)$$

arreglar este pedazo.

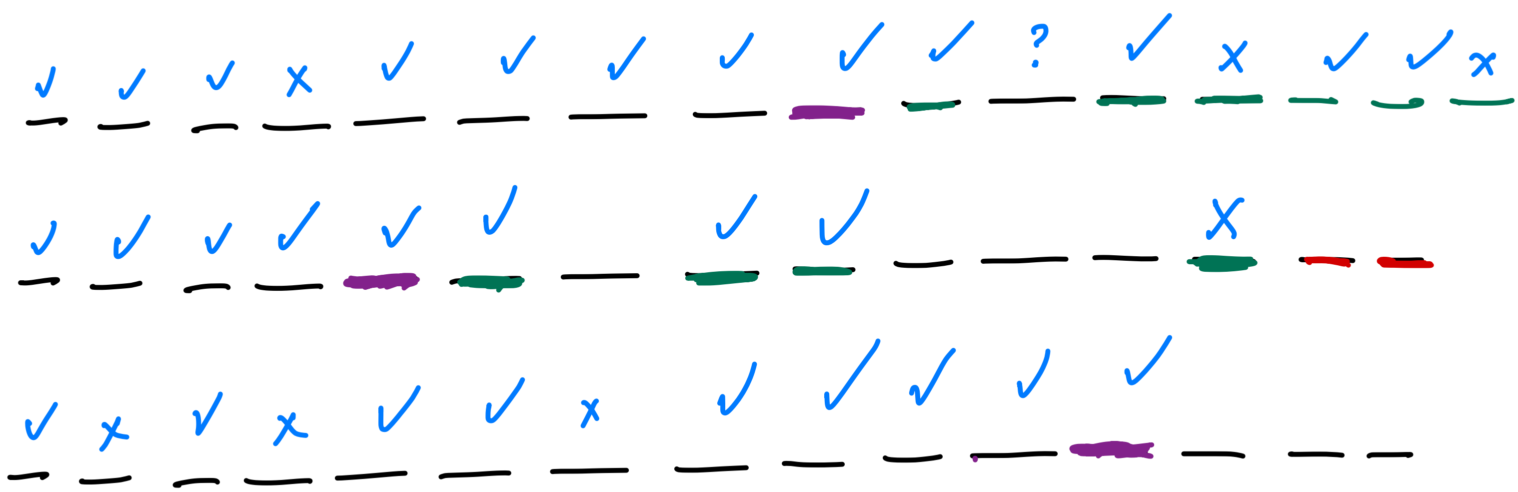
Ejercicio:

Ingredientes:

- Búsquedo de elementos defectuosos en un lote
- Paso 1

  Reviso TODOS los primeros elementos, hasta que haya al menos k aceptables consecutivos

  ejemplo: $k=5$ reviso hasta el color morado



- Paso 2 :-)

  Yo que encotré k elementos aceptables consecutivos, empiezo a revisar de acuerdo a Bernoullis independientes $\sim B(\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$

  En el primer momento que encuentro un elemento defectuoso, empiezo a revisar TODOS los elementos, como en el paso 1.

¿Cual es la proporción asintótica de elementos inspeccionados?

Hipótesis:

Supondremos que los elementos defectuosos aparecen de acuerdo a Bernoullis indep. de parámetro $q \in (0,1)$.

Solución:

Proceso de acumulación:

$$\text{Proporción de elementos inspeccionados al tiempo } t = \frac{\frac{1}{t}\left(\text{Número de elementos inspeccionados al tiempo } t\right)}{\frac{1}{t}\left(\text{Número de elementos producidos al tiempo } t\right)}$$

$$\xrightarrow{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\text{Número de elementos inspeccionados en una renovación}\right]}{\mathbb{E}\left[\text{Número de elementos producidos en una renovación}\right]} ?$$

Formulación de proceso de acumulación: necesito

$$\begin{cases} \cdot \{\xi_K\} \leftarrow \text{tiempos de un proceso de renovación} \\ \cdot \{Y_K\} \leftarrow \text{sumandos del proceso de acumulación.} \end{cases}$$

$$W_t = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

Para nosotros:

. ξ_1 = tiempo hasta que:

. Encontramos K elementos aceptables consecutivos y luego

• encontramos 1 defectuoso.

W_t = # elementos inspeccionados

Y_j = # elementos inspeccionados en la j-ésima renovación.

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_1]}$$

$$\widetilde{W}_t = \sum_{j=1}^{N(t)} \widetilde{Y}_i$$

$\widetilde{Y}_j$ = # elementos producidos en la jésima renovación.

$$\frac{\widetilde{W}_t}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[\widetilde{Y}_1]}{\mathbb{E}[\xi_1]}$$

$$\frac{W_t}{\widetilde{W}_t} = \frac{\frac{1}{t}W_t}{\frac{1}{t}\widetilde{W}_t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\cancel{\mathbb{E}[\xi_1]}}}{\frac{\mathbb{E}[\widetilde{Y}_1]}{\cancel{\mathbb{E}[\xi_1]}}} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\widetilde{Y}_1]}$$

Calcular $\dfrac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\tilde{Y}_1]}$:

Y_1 = # elts inspeccionados en 1 renovación:

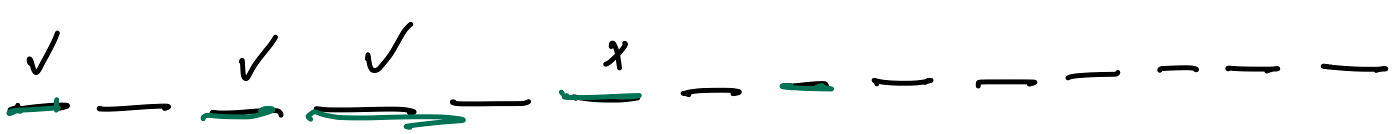
$Y_1 = X_1 + Z_1$

X_1 = # elementos inspeccionados hasta obtener k aceptables consecutivos.

Z_1 = # elementos inspeccionados (sucesivos a X_1) hasta obtener un elemento defectuoso

Análisis de Z_1:

Z_1 = primera revisión en que la componente sea defectuosa (probabilidad q).



$Z_1 \sim geom(1-q) \Rightarrow \mathbb{E}[Z_1] = \dfrac{1}{q}$ ✓

Análisis de X_1:

X_1 = # componentes revisadas hasta obtener una racha de tamaño K: $(\mathbb{E}[X_1])$.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{q}.$$

Para ver $\mathbb{E}[\tilde{Y}_1]$:

$\tilde{Y}_1 = \#$ elts producidos en $\underline{1}$ renovación:

$$\tilde{Y}_1 = X_1 + \tilde{Z}_1$$

$X_1 = \#$ elementos inspeccionados hasta obtener k aceptables consecutivos.

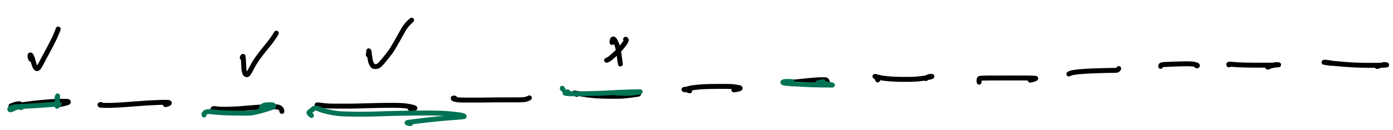
$\tilde{Z}_1 = \#$ elementos producidos (sucesivos a X_1) hasta obtener

- un elemento <u>revisado</u> <u>defectuoso</u>

Análisis de $\tilde{Z}_1$:

$\tilde{Z}_1 =$ primera componente que satisface:

- la componente sea defectuosa (probabilidad q).
- la componente fue revisada (probabilidad α).



$$\tilde{Z}_1 \sim \text{geom}(1-\alpha q) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[\tilde{Z}_1] = \frac{1}{\alpha q}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_1] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[\tilde{Z}_1] = \mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{\alpha q}.$$

Conclusion:

proporción de elementos inspeccionados al tiempo t $\xrightarrow{t\to\infty}$ $\dfrac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\tilde{Y}_1]} = \dfrac{\mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{q}}{\mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{\alpha q}} = ⊛$

Revisar que

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{(1-q)} + \frac{1}{(1-q)^2} + \cdots \frac{1}{(1-q)^K} = \frac{\left(\frac{1}{1-q}\right)^K - 1}{q}$$

$$⊛ = \frac{\left(\frac{1}{1-q}\right)^K - 1}{\left(\frac{1}{1-q}\right)^K - 1 + \frac{1}{\alpha}}$$ ← después de simplificar