


Procesos de renovación:

El objetivo de la teoría de renovación es estudiar ciertos fenómenos aleatorios que se "repiten" en tiempos grandes.

Sea $\{\zeta_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d., no negativos.

Vamos a definir al n -ésimo tiempo de renovación como

$$T_n := \sum_{k=1}^n \zeta_k, \quad T(0) = 0.$$

Ejemplo fundamental: Sea X una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados E .

Vamos a suponer $X_0 = x_0 \in E$, y consideremos

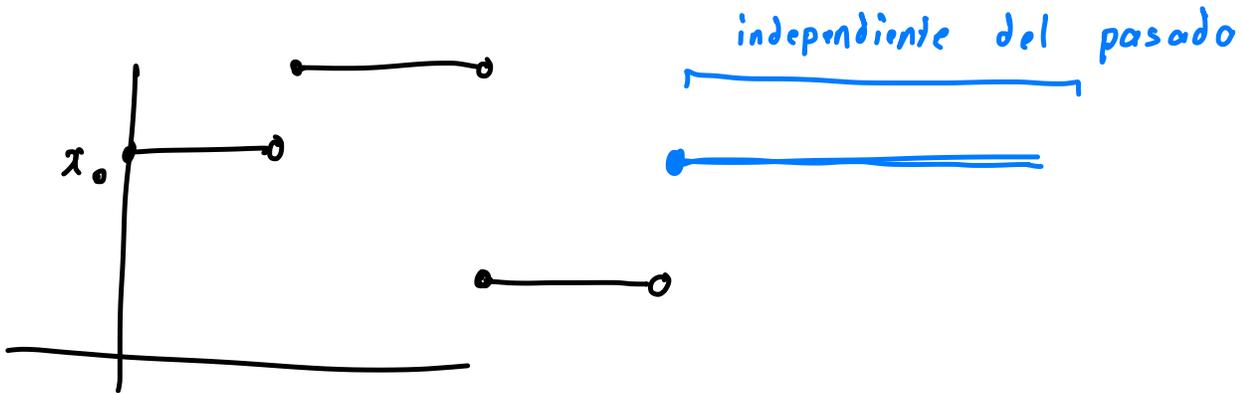
$T(n) = n$ -ésimo tiempo de regreso a x_0 :

De manera formal:

$$M_{x_0}^{n+1} = \inf \{ t > T(n); X_t \neq x_0 \} - T(n).$$

$$T(0) = 0$$

$$T(n+1) = \inf \{ t > T(n) + M_{x_0}^{n+1}; X_t = x_0 \}.$$



De la propiedad de Markov, se tiene que $T(n)$ es un tiempo de renovación.

Definición:

Un proceso de renovación $\{N(t); t \geq 0\} =: N$ es un proceso tal que

$$N(t) = \max \{ n \in \mathbb{N}, T(n) \leq t \}.$$

¿Qué nos va a interesar?

Definición:

Definimos la función de renovación como:

$$U(t) = 1 + E[N(t)].$$

Notación: Denotaremos por F a la función de distribución de ξ_1 , i.e. $F(t) = P\{\xi_1 \leq t\}$.

Definimos $F_k(t)$ = convolución k -veces de la distribución $F \approx (dF)^{*k}$.

Lema:

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = F_k(t) - F_{k+1}(t).$$

$$\bullet U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \Leftrightarrow 1 + \mathbb{E}[N(t)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

donde $F_0 \equiv 1$.

Prueba:

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \mathbb{P}[T(k) \leq t < T(k+1)]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{P}[N(t) = k] &= \mathbb{P}[T(k) \leq t] - \mathbb{P}[T(k+1) \leq t] \\ &= F_k(t) - F_{k+1}(t) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}[N(t) = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k (F_k(t) - F_{k+1}(t))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k F_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} k F_{k+1}(t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k F_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k+1)}_l \underbrace{F_{k+1}}_d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{F_{k+1}}_l(t)$$

$$= 1 F_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} k F_k(t) - \sum_{l=2}^{\infty} l F_l(t) + \sum_{l=2}^{\infty} F_l(t) = \sum_{l=1}^{\infty} F_l(t)$$

Ejemplo:

Suponer que F tiene distribución exponencial de parámetro $q > 0$. i.e.

$$f(x) = q e^{-qx} dx.$$

Se puede ver que $F_n \sim \Gamma(n, q)$. i.e.

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{q^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-qx} dx$$

Justificación:

$$E\left[\exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^n z_i\right\}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[e^{-\lambda z_i}\right] = \left(\frac{q}{\lambda + q}\right)^n$$

Por otro lado, la transf. de Laplace de la $\Gamma(n, q)$ es

$$\int_0^{\infty} \frac{q^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qx} e^{-\lambda x} dx = \frac{q^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\overbrace{(q+\lambda)}^u} x dx$$
$$\stackrel{v = (q+\lambda)x}{=} \frac{q^n}{(n-1)!} (q+\lambda)^{-n} \int_0^{\infty} \underbrace{v^{n-1}}_{\Gamma(n) = (n-1)!} e^{-v} dv = \left(\frac{q}{\lambda + q}\right)^n.$$

Cálculo de $P\{N(t)=k\}$:

$$P\{N(t)=k\} = P\{T(k) \leq t < T(k) + Z_{k+1}\}$$

$$= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < T(k) + Z_{k+1}\}} \right] \quad Z_{k+1} \sim \exp(q)$$

$$= \int_0^{\infty} q e^{-qx} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < T(k) + x\}} dx \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} q e^{-qx} \mathbb{1}_{\{T(k) \leq t < T(k) + x\}} dx \right]$$

\uparrow
 $t - T(k) < x$

$$= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} \int_{t-T(k)}^{\infty} q e^{-qx} dx \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} e^{-q(t-T(k))} dx \right]$$

$$= e^{-qt} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T(k) \leq t\}} e^{qT(k)} \right]$$

$$= e^{-qt} \int_0^t e^{qx} e^{-qx} \frac{q^k}{(k-1)!} x^{k-1} dx$$

$$= e^{-qt} \cdot \frac{1}{k!} (tq)^k \quad \leftarrow \text{distribución Poisson } (tq).$$

$$\Rightarrow U(t) = 1 + E[N(t)] = 1 + qt.$$

En este caso, el modelo está completamente determinado

Vamos ahora a hacer lo mismo, pero con transformadas de Laplace:

Recordar que \leftarrow convoluciones

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)$$

Notar que, si " \wedge " denota transformado de Laplace, es decir, para $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\hat{\psi}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \psi(x) dx \quad \leftarrow \text{siempre cuando converge}$$

Hecho: resultado de análisis:

La transformada de Laplace caracteriza a ψ .

$$\widehat{\sum_{k=1}^{\infty} F_k(\cdot)(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{F_k(\cdot)(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{F}(\lambda))^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda + q} \right)^k$$

La transformada de Laplace de una convolución es el producto de las transformadas

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\cdot)(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^k = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^k \\ &= \left(\frac{q}{\lambda+q}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{q}{\lambda+q}} = \frac{1}{\frac{\lambda+q}{q} - 1} = \frac{q}{\lambda} \end{aligned}$$

Recordar que

$$U(t) = 1 + qt \Leftrightarrow \lambda + \overbrace{E[N(\cdot)](t)} = 1 + \overbrace{(q \cdot (\cdot))'(t)}$$

$t \mapsto G(t) := qt$

$$\overbrace{(q \cdot (\cdot))'(\lambda)} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dG(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} q dx = \frac{q}{\lambda}$$

Por lo tanto

$$\overbrace{E[N(\cdot)](\lambda)} = \overbrace{(q \cdot (\cdot))'(\lambda)} \Leftrightarrow E[N(t)] = qt \quad \blacksquare$$

Motivación para lo que sigue:

En el problema 3 de la tarea 4,

teníamos una expresión del tipo

$$E[Y_t] = \int_0^t \delta e^{-\delta x} * (\text{Algo}(x)) dx + \text{Término adicional}(t)$$

↑
tamaño de
la población

Esto motiva lo siguiente:

Ecuación de renovación:

La función de renovación U satisfacer la ec. de renovación

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s) dF(s)$$

← recordatorio
 $F(x) = P\{Z_1 \leq x\}$.

prueba:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$

Notar que $F_k(t) = F * F_{k-1}(t)$

$$\begin{aligned} U(t) &= F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F * F_{k-1}(t) \\ &= F_0(t) + F * \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)}_{U(t)} = 1 + \int_0^t U(t-s) dF(s) \end{aligned}$$

Proposición: $\&$ continua por derecha
 Sea H una función positiva y acotada \swarrow . Consideremos

la ecuación:

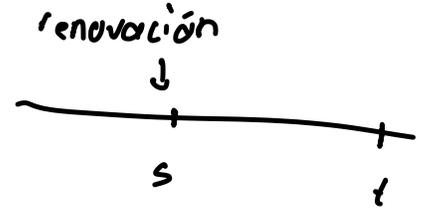
$$(1) \quad M(t) = H(t) + \int_0^t M(t-s) dF(s)$$

Usualmente, lo que queremos calcular en las aplicaciones

algo que sale en las "cuentas" de nuestro modelo.

Usualmente sale al "renovar" el proceso

fiere que ver, usualmente con "condicionar con respecto a ξ ,



Entonces, existe una única solución a (1) dada por

$$M(t) = \int_0^t H(t-s) dU(s)$$

↑
conocida
↑
"más o menos"
conocida

Demostración:

Usaremos transformada de Laplace

$$\mathcal{L}M(q) = \int_0^{\infty} e^{-qx} dM(x)$$

Entonces, la ecuación: $M(t) = N(t) + \int_0^t M(t-s) dF(s)$
se reduce a

$$\mathcal{L}M(q) = \mathcal{L}N(q) + (\mathcal{L}M(q))(\mathcal{L}F(q)).$$

\Rightarrow

$$\mathcal{L}M(q) = \frac{\mathcal{L}N(q)}{1 - \mathcal{L}F(q)} = \mathcal{L}N(q) \left(1 + \mathcal{L}F(q) + (\mathcal{L}F(q))^2 + (\mathcal{L}F(q))^3 + \dots \right)$$

$$= \mathcal{L}N(q) (1 + \mathcal{L}F(q) + \mathcal{L}F_2(q) + \mathcal{L}F_3(q) + \dots)$$

$$\mathcal{L}M(q) = \mathcal{L}N(q) \mathcal{L}U(q) = \mathcal{L}(N * U)(q)$$

$$\Leftrightarrow M(t) = N * U(t) = \int_0^t N(t-s) dU(s) \quad \blacksquare$$

Objetivo:

estudiar dichas expresiones cuando $t \approx \infty$:

Observación: en el teorema anterior, teníamos

$$M(t) = \int_0^t \underbrace{N(t-s)}_x dU(s) = \int_0^t N(x) d \underbrace{U(t) - U(t-x)}_{\text{¿cómo estimar}}$$

teorema
de cambio de
variable.

$U(t) - U(t-x)$ cuando
 x es grande?

Teorema de Blackwell:

Def: Decimos que el proceso de renovación (o la distribución F) es aritmética si

$$P\{Z_i \in r\mathbb{N}\} = 1 \quad \text{para algún } r \in \mathbb{N}.$$

Al máximo r que cumple esta propiedad se le conoce como el "paso de Z ".

Un ejemplo de proceso aritmético surge de una caminata aleatoria simétrica,

Aquí, $T(1), T(2), \dots$ ← los tiempos de retorno a 0

dan una estructura de proceso de renovación aritmético con paso $r=2$.

Teorema de Blackwell:

Supongamos que $E[Z_i] = m < \infty$.

i) Si F es no-aritmética, entonces $\forall h > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (U(x+h) - U(x)) = \frac{h}{m}$$

ii) Si F es aritmética con paso $r > 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U((n+1)r) - U(nr)) = \frac{r}{m}$$

Corolario (Teorema de renovación clave)

Supongamos que F no es aritmética, y

$m = \mathbb{E}[Z_1] < \infty$. Sea $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función continua con soporte compacto.

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x g(x-s) dU(s) = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} g(x) dx$$

prueba (bosquejo)

Notemos que

$$\int_0^x g(x-s) dU(s) = \int_0^x g(y) d(U(x) - U(x-y))$$

$y = x-s$

Del teorema de Blackwell,

$$U(x) - U(x-s) \rightarrow \frac{s}{m} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty$$

de manera que, cuando $x \rightarrow \infty$,

$$\int_0^x g(x-s) dU(s) \approx \int_0^x g(y) \frac{dy}{m} = \frac{1}{m} \int_0^x g(y) dy \approx \frac{1}{m} \int_0^{\infty} g(y) dy.$$

La siguiente clase:

Teorema de renovación elemental: Si $\mathbb{E}[Z_1] = m < \infty$

i) $\frac{1}{t} U(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m}$ ← (pensar en el proceso Poisson)

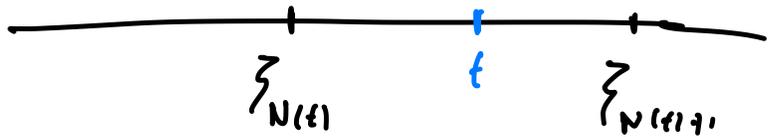
ii) $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m}$ ← con probabilidad 1.

Lemma (Wald).

Supongamos que $m = E[\zeta_i] < \infty$. Entonces,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \zeta_i \right] = E[\zeta_i] E[N(t)+1].$$

Pensar que esta suma "localiza" el valor de t



prueba:

Definir

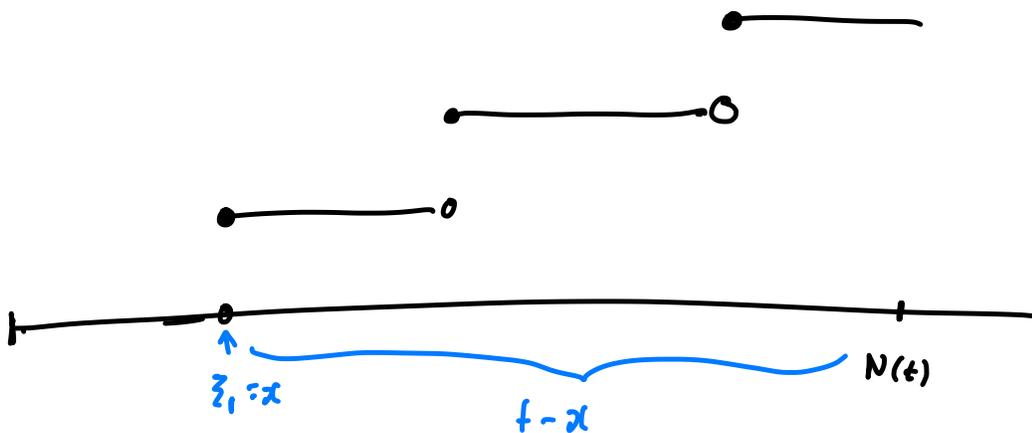
$$A(t) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \zeta_i \right]$$

Condicionando sobre ζ_1 , obtenemos

$$A(t) = \mathbb{E} \left[(\zeta_1 + \dots + \zeta_{N(t)+1}) (\mathbb{1}_{\{\zeta_1 \leq t\}} + \mathbb{1}_{\{\zeta_1 > t\}}) \right].$$

$$= \mathbb{E} \left[(\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{N(t)+1}) \mathbb{1}_{\{\zeta_1 \leq t\}} \right] + \mathbb{E} \left[\zeta_1 \mathbb{1}_{\{\zeta_1 > t\}} \right]$$

Imaginar que $\zeta_1 = x \leq t$.



$$\Rightarrow A(t) = \int_0^t \left(x + \mathbb{E} \left[\zeta_1 + \dots + \zeta_{N(t-x)+1} \right] F(dx) + \mathbb{E} \left[\zeta_1 \mathbb{1}_{\{\zeta_1 > t\}} \right] \right)$$

$$A(t) = \int_0^t \left(x + \underbrace{E\{Z_1 + \dots + Z_{N(t-x)+1}\}}_{A(t-x)} \right) F(dx) + \underbrace{E\{Z_1 \mathbb{1}_{\{Z_1 > t\}}\}}_{\int_t^\infty x F(dx)}$$

→

$$A(t) = E\{Z_1\} + \int_0^t A(t-x) F(dx) \quad \leftarrow \text{ecuación como}$$

$$M(t) = N(t) + \int_0^t M(t-s) dF(s) \quad \leftarrow \begin{cases} M(1) = E\{Z_1\} \\ M(t) = A(t) \end{cases}$$

⇒ Por resultados anteriores,

$$\underbrace{M(t)}_{M(t)} = \int_{[0,t]} \underbrace{E\{Z_1\}}_{N(t-x)} U(dx) = E\{Z_1\} (U(t) - \underbrace{U(0)}_{=0}) = E\{Z_1\} (1 + E\{N(t)\}).$$

$$U(0) := 0. \quad \leftarrow \quad U(t) = \underbrace{F_0(t)}_{\text{función}} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$$

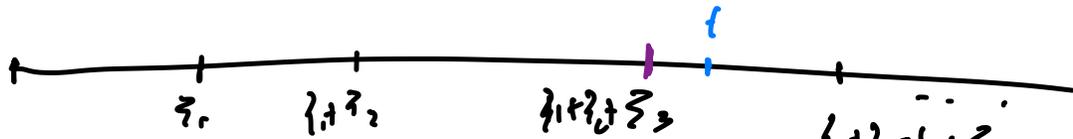
de distribución degenerada en cero. □

Continuación de la prueba del teorema elemental de renovación:

Primero estudiaremos

$$\text{¿ } \frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{m} ?$$

idea: \uparrow asintóticamente, estudiaremos $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$



Intuitivamente, $S_{N(t)}$ "está cerca" de t .

Hace sentido entonces considerar la aproximación

$$\frac{t}{N(t)} \approx \frac{S_{N(t)}}{N(t)}$$

$$\mathbb{P} \{ N(t) \geq c \} = \mathbb{P} \{ T(c) < t \}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 1 \\ & \Rightarrow N(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty \\ & \Rightarrow N(t) \xrightarrow{\text{c.s.}} \infty \end{aligned}$$

Para formalizar esto notemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot \frac{N(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot \mathbb{E}[\xi_i] = \infty$$

ley fuerte de grandes números

Recordar que $N(t) = \max \{ n \in \mathbb{N}; T(n) \leq t \}$.

$T(n)$ = n-ésimo tiempo de renovación

Definimos:

$$A_1 = \{ \omega \in \Omega; N(t) | \omega \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \}$$

$$A_2 = \{ \omega; \frac{S_n}{n}(\omega) \rightarrow \mathbb{E}[\xi_i] = m \text{ cuando } t \rightarrow \infty \}$$

Notar que $\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_2] = 1$

$\forall n \quad w \in A, DA_2,$

$$\frac{S_{N(t)}(w)}{N(t)(w)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = m \quad \textcircled{4}$$

Finalmente, ya que $N(t) \rightarrow \infty$,
entonces, para $t \approx \infty$,

$$\left| \frac{S_{N(t)}}{N(t)} - \frac{t}{N(t)} \right| \leq \frac{\sum_{N(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0}{N(t)}$$

$$\therefore \frac{t}{N(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \stackrel{\text{por } \textcircled{4}}{=} m.$$

Ahora probamos la parte i):

$$i) \quad \frac{1}{t} U(t) \rightarrow \frac{1}{m} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Observemos lo siguiente:

$$T(N(t)) \leq t < T(N(t)+1). \quad \textcircled{4}$$

Por lo tanto,

$$\frac{T(N(t))}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T(N(t)+1)}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

lo que obtengo de aquí es que con proba 1,

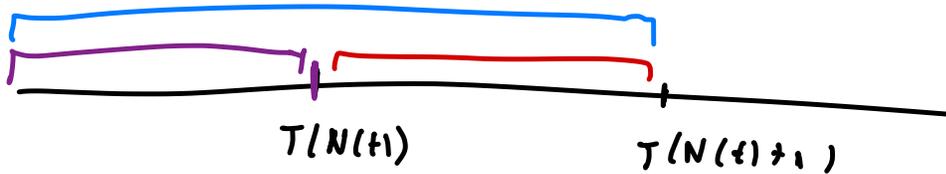
$$\frac{T(N(t))}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T(N(t)+1)}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = m$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $m \qquad \qquad \qquad m \qquad \qquad 1$

Por (1),

$$T(N(t)) \leq t$$

$$t \geq \mathbb{E}[T(N(t))] = \mathbb{E}[T(N(t+1)) - Z_{N(t+1)}] = mU(t) - \mathbb{E}[Z_{N(t+1)}]$$



$$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{mU(t)}{t} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{mU(t) - \mathbb{E}[Z_{N(t)}]}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \leq m.$$

Para la desigualdad inversa, definimos

$$Z_j^c = \begin{cases} Z_j & \text{si } Z_j < c \\ c & \text{si } Z_j \geq c \end{cases}$$

Para $c > 0$. Ahora, consideremos al proceso N^c asociado a los tiempos $\{Z_j^c\}$. Notemos que si

$m^c = \mathbb{E}[Z_j^c]$, razonando como antes, tenemos

$$t \geq m^c \mathbb{E}[N^c(t) + 1] - \mathbb{E}[Z_{N^c(t+1)}^c] \geq m^c \mathbb{E}[N^c(t) + 1] - c. \quad (1)$$

$$\text{Como } Z_j^c \leq Z_j \quad \forall j \geq 1 \Rightarrow N^c(t) \geq N(t) \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N^c(t) + 1] \geq \mathbb{E}[N(t) + 1] = U(t) \quad (2)$$

Por (1) y (2), $t \geq m^c U(t) - c$.

$$t \geq m^c U(t) - C.$$

De aquí se sigue que

$$\frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m^c} + \frac{C}{m^c t}$$

Sacando \limsup , obtengo

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m^c} \quad \leftarrow \forall c > 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m}$$

(*)

Para hacer el límite inferior:

$$t < \mathbb{E}[T(N(t)+1)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \tau_i\right] = \underbrace{\mathbb{E}[\tau_i]}_m \underbrace{\mathbb{E}[N(t)+1]}_{U(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{U(t)}{t} \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} \geq \frac{1}{m}$$

(**)

Por (*) y (**),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{m}.$$

□

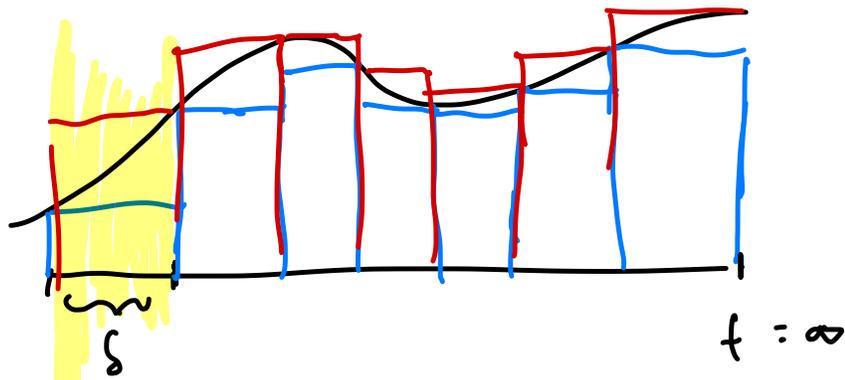
Definición:

Sea $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función arbitraria.

Definimos

$$I_{\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf \{ f(x); x \in [\delta k, \delta(k+1)] \}$$

$$I^{\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup \{ f(x); x \in [\delta k, \delta(k+1)] \}.$$



Decimos que f es directamente Riemann integrable si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I_{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} I^{\delta}$$

Reforzamiento del teorema de

renovación clave:

Supongamos que F es una **Función de distribución!**

de una v.a. positivo con media μ . Suponer que

$a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es directamente Riemann integrable.

Sea A la solución a la ecuación de renovación

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) F(dx). \quad \text{función de renovación.}$$

(recordar que la sol. es $A(t) = \int_0^t a(t-x) U(dx)$)

i) Si F es no aritmética, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(x) dx & \text{si } \mu < \infty \\ 0 & \text{si } \mu = \infty. \end{cases}$$

ii) Si F es aritmética, con tamaño de paso λ ,

entonces $\forall c > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(c + n\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a(c + n\lambda) & \text{si } \mu < \infty \\ 0 & \text{si } \mu = \infty. \end{cases}$$

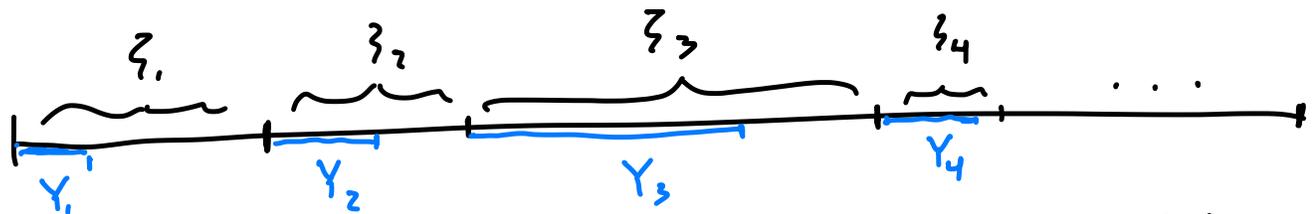
Aplicaciones de la teoría de renovación:

Ejemplo 1.1)

Procesos de renovación con dos componentes en cada intervalo de renovación. real. (no infinito).

$\{Z_i, Y_i\} \leftarrow \begin{cases} Z_i \leftarrow \text{tiempo aleatorio} \\ Y_i \leftarrow \text{una porción de } Z_i \end{cases}$ (por ejemplo, un tiempo de servicio)

$Y_i \leftarrow \text{una porción de } Z_i$.



Suponer que los vectores (Z_i, Y_i) son indep. entre sí

Sea $p(t)$ la prob. de que t caiga en una "porción" Y de algún intervalo de renovación.

$= \mathbb{E} \{ \mathbb{1}_{\{t \text{ está cubierto por algún intervalo azul}\}} \}$.

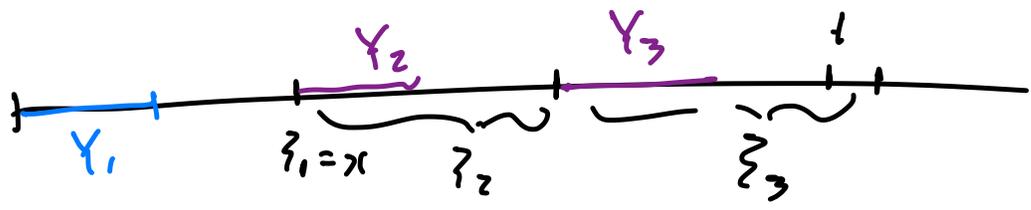
Condicionamos sobre $\{Z_i = x\}$ y distinguimos entre las dos posibilidades $x < t$ y $x \geq t$.

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{t \text{ esté cubierto} \mid Z_i = x\} F(dx) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}\{t \text{ esté cubierto} \mid Z_i = x\} F(dx) \\ &\quad + \int_t^{\infty} \mathbb{P}\{t \text{ esté cubierto} \mid Z_i = x\} F(dx) \end{aligned}$$

$$e(t) = \int_0^t P\{t \text{ est\u00e9 cubierto} \mid \tau_0 = x\} F(dx)$$

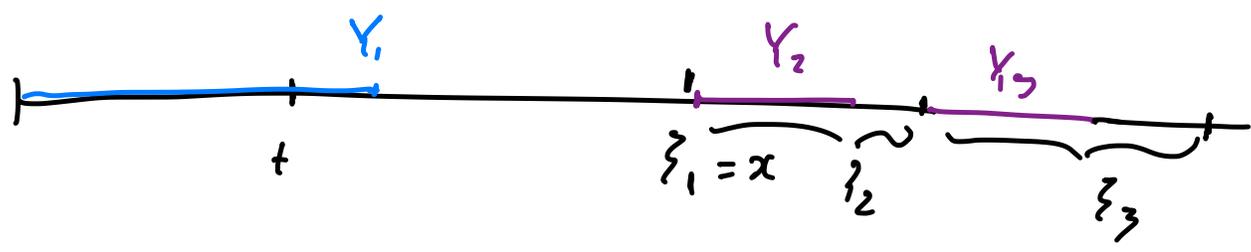
$$+ \int_t^\infty P\{t \text{ est\u00e9 cubierto} \mid \tau_0 = x\} F(dx)$$

t est\u00e9 cubierto por Y_1 .



← caso $x \leq t$

$$\Rightarrow e(t) = \int_0^t e(t-x) F(dx) + \underbrace{P\{t \text{ est\u00e9 cubierto por } Y_1\}}_H$$



← caso $x > t$

La soluci\u00f3n a la ecuaci\u00f3n de renovaci\u00f3n

$$M(t) = \int_{(0,t)} M(t-s) F(ds) \quad \text{es}$$

$$M(t) = \int_{(0,t)} H(t-s) U(ds), \quad \text{donde } M(t) = e(t)$$

$$\rightarrow H(t) = P\{t \text{ est\u00e9 cubierto por } Y_1\}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{1}{E[\tau_1]} \int_0^\infty H(x) dx$$

Ahora,

$\mathbb{P}\{t \text{ está cubierto por } Y_i\}$

$$= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[0, Y_i]}(t) \right]$$

Obs: $t \mapsto \mathbb{P}\{t \text{ está cubierto por } Y_i\}$ es

decreciente, y

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{t \text{ está cubierto por } Y_i\} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[0, Y_i]}(t) \right] dt = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{[0, Y_i]}(t) dt \right]$$

$$= \mathbb{E}[Y_i] =: \gamma. \leftarrow \text{definamos } \gamma \text{ así.}$$

Se puede ver fácil de aquí que $t \mapsto \mathbb{P}\{t \text{ está cubierto por } Y_i\}$ es directamente

Riemann integrable, y por el teorema

de renovación clave (parte 2),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[Z_i]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{t \text{ está cubierta por } Y_i\} dt = \frac{\mathbb{E}[Y_i]}{\mathbb{E}[Z_i]}$$

Para la siguiente clase:

$$X_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{capital} \\ \text{inicial}}}{z} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prima}}}{ct} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

• $N(t) \leftarrow$ proceso Poisson

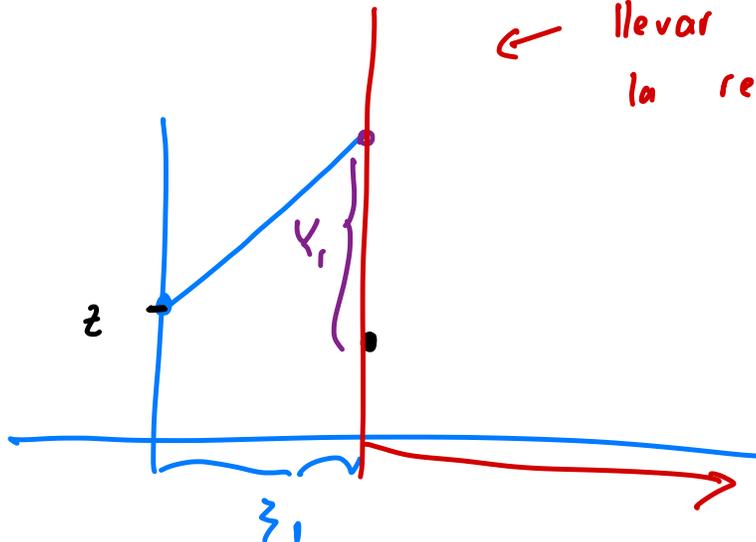
• $Y_i \leftarrow$ tamaño del reclamo.

Pregunta de interés:

$$R(z) = P\{X_t > 0 \ \forall \ t > 0\}.$$

Idea: determinar una ecuación de renovación para R .

\leftarrow llevar a cabo la renovación.



Ejemplo de lo visto anteriormente:

Modelos de colas:

Si las llegadas de una cola siguen un proceso

Poisson, entonces los tiempos sucesivos Z_k

del k -ésimo tiempo en que el servidor se encuentra ocupado forma un proceso de renovación

se encuentra
solicitado.

Podemos suponer que cada Z_k se
compone de una porción ocupada Z_k

y una porción libre Y_k

Entonces $e(t)$, la probabilidad de que el servidor
esté libre al tiempo t converge a

$$\frac{E[Y_i]}{E[Z_i]} = \frac{Y_i}{Z_i}$$

$$\frac{1}{t} \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

$$\text{Cantidad de interés } (t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

$P[t \text{ esté cubierto}]$

$\curvearrowright Y_k$

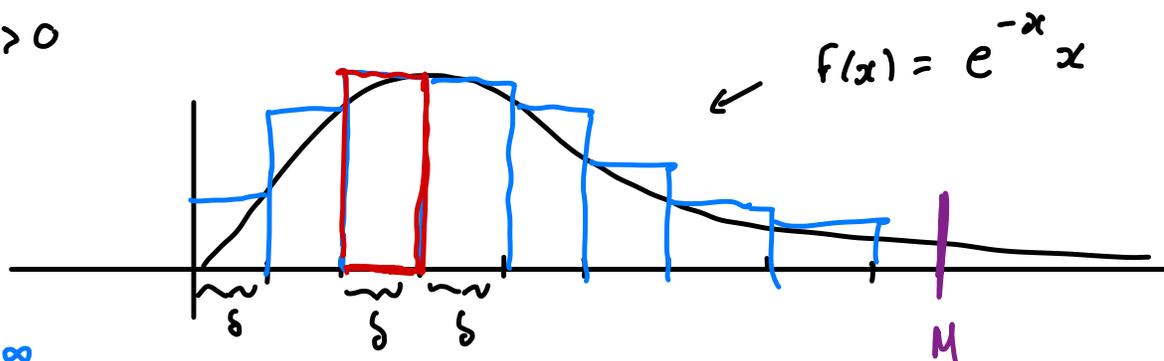
Paréntesis sobre cómo probar
que una función es directamente Riemann
integrable

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = x e^{-x}$$

Probamos que es directamente Riemann integrable.

Sea $\delta > 0$



$$I_\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup \{ f(x); x \in]k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup \{ e^{-x} x; x \in]k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$I_\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf \{ f(x); x \in]k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf \{ e^{-x} x; x \in]k\delta, (k+1)\delta) \}$$

$$0 \leq I_\delta - I_\delta \leq \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-(k+1)\delta} k\delta \right)$$

$$0 \leq I^\delta - \bar{I}_\delta \leq \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-(k+1)\delta} k\delta \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(e^{-k\delta} (k+1)\delta - e^{-k\delta} k\delta \right)$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(e^{-(k+1)\delta} k\delta - e^{-k\delta} k\delta \right)$$

$$= \delta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta e^{-k\delta} - \sum_{k=0}^{\infty} \delta (k\delta) e^{-k\delta} \right)$$

teorema del valor medio

$$\leq \delta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta e^{-k\delta} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta (k\delta) e^{-k\delta} \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

ver que está acotado
sobre δ .

Más aplicaciones:

Procesos de acumulación

Suponer que tenemos variables Y_i que representan un costo o valor, etc.

Ahora vamos a considerar una clase de problemas

que dependen de parejas $(\tau_i, Y_i) \leftarrow \text{i.i.d.}$

donde τ_i genera un proceso de renovación

Definimos el proceso de acumulación asociado como

$$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

Interpretación: costo acumulado al tiempo t .

Pregunta natural: $\mu(t) := \mathbb{E}[W(t)] \approx ?$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Nota:

el mismo resultado vale cuando

$$\tilde{W}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

justificación:

$$\tilde{W}(t) = \left(\frac{1}{N(t)} \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \right) \cdot \frac{N(t)}{t}$$

↓ ley de grandes números
 $\mathbb{E}[Y_i] \cdot \frac{1}{m}$

$$\frac{N(t)+1}{t} \cdot \frac{N(t)}{N(t)+1}$$

↑ $\frac{1}{m}$ ↑ t

Idea para calcular

$$M(t) = E[W(t)] \text{ es}$$

condicionar en el primer tiempo de renovación:

$$\begin{aligned} E[W(t)] &= E[W(t) \mid \{Z_1 > t\}] + E[W(t) \mid \{Z_1 \leq t\}] \\ &= E\left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \mid \{Z_1 > t\}\right] + \int_{[0,t]} E\left[\sum_{k=0}^{N(t)+1} Y_k \mid Z_1 = x\right] F(dx). \end{aligned}$$

$$E[W(t)] = E[Y_0] + \int_{[0,t]} E[W(t-x)] F(dx)$$

\uparrow
el proceso comienza de nuevo en x

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} H(t) \\ \downarrow \\ M(t) = E[Y_0] + \int_0^t M(t-x) F(dx) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \leftarrow H(t-x) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M(t) = \int_0^t E[Y_0] U(dx) = E[Y_0] U(t).$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Y_0] \frac{U(t)}{t} = E[Y_0] \cdot \frac{1}{m}$$

$$m = \int x F(dx) = E[Z_0].$$

Algunas ideas nuevas:

$$\mu^\lambda(t) = \mathbb{E} [e^{i\lambda W(t)}]$$

Podría ser (lo voy a checar).

Idea: Formular

alguna función de distribución

$$\mu^\lambda(t) = \mu^\lambda(0) + \int_0^t \mu^\lambda(t-x) G(dx)$$

Modelos de reemplazo:

Supongamos que Y_i representa el costo del i -ésimo reemplazo. Supongamos que bajo una estrategia de reemplazo por edad, un reemplazo planado al tiempo T cuesta C_1 y un reemplazo por falla al tiempo $t < T$ cuesta C_2 . Si Y_k es el costo del k -ésimo ciclo de reemplazo, entonces

$$Y_k = \begin{cases} C_1 & \text{con probabilidad } 1 - F(T). \\ C_2 & \text{con probabilidad } F(T). \end{cases}$$

En este caso $\mathbb{E}[Y_k] = C_1(1 - F(T)) + C_2 F(T)$.

¿Qué proceso de renovación estaré considerando?

los tiempos que generan a mi proceso de renovación van a ser:

$Z_k \leftarrow$ tiempos de las fallas:

Si G es la función de distribución de los Z_k .

Los tiempos que generan a mi proceso de renovación serán:

$Z_k \wedge T \leftarrow$ nuevamente son i.i.d.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_k \wedge T] &= \int_0^{\infty} \mathbb{E}[Z_k \wedge T \mid Z_k = x] G(dx) = \int_0^{\infty} \mathbb{E}[x \wedge T \mid Z_k = x] G(dx) \\ &= \int_0^T x G(dx) + \int_T^{\infty} T G(dx) = \int_0^T x G(dx) + T(1 - G(T)) \end{aligned}$$

Notar también que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k] &= C_1 P(\text{No reemplazo}) + C_2 P(\text{reemplazo}) \\ &= C_1 (1 - G(T)) + C_2 G(T). \end{aligned}$$

Sea $M(t) =$ proceso de renovación asociado a los tiempos $\{Z_k \wedge T\}_{k \in \mathbb{N}}$.

$$\text{Costo acumulado al tiempo } t = \sum_{k=1}^{M(t)} Y_k$$

Si

$$M(t) = \mathbb{E} \left[\text{Costo acumulado al tiempo } t. \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \right]$$

entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\tau, \infty]} = \frac{c_1 (1 - G(\tau)) + c_2 G(\tau)}{\int_0^{\tau} x G(dx) + \tau (1 - G(\tau))}$$

Interpretación
de costo esperado promedio.

Otra interpretación:

Teoría de riesgo:

$Y_k \leftarrow$ tamaño de reclamos de los asegurados

$\tau_k \leftarrow$ tiempos de los reclamos.

$N(t) \leftarrow$ conteo de los reclamos al tiempo t .

$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \leftarrow$ costo acumulado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[W(t)]}{t} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\tau]}$$

Plan para examen:

Viernes 19, 20 y 22 ← sesiones de ejercicios

Examen para llevar:

del 24 al 29 de Marzo

(pensando que la duración está planeada del 24 al 26)

Continuación de aplicaciones de procesos de renovación:

Procesos de renovación terminal:

$E[N(t)]$ ← ya lo estudiamos:

$N(t)$ ← cantidad de renovaciones
con tiempos interarribos ξ_1, ξ_2, \dots

Siempre suponemos $\xi_i \in \mathbb{R}_+$ ← (en particular, $\xi_i \neq \infty$).

Pensar en proceso de riesgo:

$$Z(t) = - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k + ct + z_0$$

Es relevante considerar el caso ξ_i puede tomar el valor infinito

Supongamos que ξ_i son una v.a.i.i.d. con valores en $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. El proceso de renovación asociado

$N(t) = \#$ renovaciones antes del tiempo t .

Se conoce como proceso de renovación terminal.

Pensar que

"No hay más renovaciones" \leftrightarrow "algún ξ_i tomó el valor infinito".

Al igual que antes:

$$\{N(t) \geq k\} = \{T_k \leq t\}$$

$$T_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$$

y se puede estudiar, $\mathbb{E}[N(t)]$:

Denotemos por

$N(\infty) =$ número total de renovaciones $= \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$

(Notar que si $\xi_i = \infty$, entonces $N(\infty) = 0$).

¿Cuál es la distribución de $N(\infty)$?

• $N(\infty)$ puede tomar los valores $0, \infty, 1, 2, \dots$

$$\{N(\infty) \geq k\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \text{ son finitos}\}$$

$$= \{\xi_1 < \infty\} \cap \dots \cap \{\xi_k < \infty\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[N(\infty) \geq k] = \mathbb{P}[\xi_1 < \infty]^k = L^k$$

donde $L = \mathbb{P}[\xi_1 < \infty]$.

$$L = P\{? < \infty\}$$

Notemos que, como antes

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) < \sum_{k=1}^{\infty} L^k = \frac{L}{1-L} \quad \text{si } L < 1$$

$$F_k = \underbrace{F * \dots * F}_{k \text{ veces}}$$

El argumento de renovación sigue funcionando

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[N(t) \mid \{?, > t\}] + \mathbb{E}[N(t) \mid \{?, \leq t\}]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N(t)] = F(t) + \int_0^t \mathbb{E}[N(t-s)] F(ds) \quad \leftarrow \text{ecuación de renovación}$$

Problema: F no es una función de distribución en \mathbb{R}_+ , sino en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

La idea para resolver esto es "modificar F ".

Consideremos la función

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(dx)$$

y supongamos que $\int_0^{\infty} e^{-sx} F(dx) < \infty \quad \forall s > 0.$

Notar que

$g(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = P\{X < \infty\} = L < 1$
 $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$
Por argumentos de teoría de la medida, se puede ver que

asumir

\Rightarrow Por teorema del valor intermedio,
 $\exists s_0 =: \lambda > 0$
t.q. $g(\lambda) = L$

$g(s)$ es continua

Conclusión:

$$\hat{F}(t) := \int_0^t e^{-\lambda x} F(dx)$$

satisface

$$\int_A^{\infty} \hat{F}(t) = \int_A^{\infty} e^{-\lambda t} F(dt)$$

Nota:
 $\hat{F}(t) \neq e^{-\lambda t} F(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{F}(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} F(dx) = g(\lambda) = L$$

$\Rightarrow \hat{F}$ es una función de distribución.

Ahora, supongamos que tenemos una ec. de renovación "abstracta" de la forma

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) F(dx)$$

$$\text{Fijemos } \hat{A}(t) = e^{\lambda t} A(t), \quad \hat{a}(t) = e^{\lambda t} a(t).$$

Notar que

$$\hat{A}(t) = \hat{a}(t) + \int_0^t \hat{A}(t-x) \hat{F}(dx)$$

Aplicación de esta idea:

Tomar

$$A(t) = \mathbb{E}[N(\infty) - N(t)] = \frac{L}{1-L} - \mathbb{E}[N(t)]$$

↑
ley geométrica

(i.e. $A(t)$ es el número promedio de índices n

t.q. $t < T_n < \infty$.

Queremos hacer un arg. de renov. para

$A(t) \leftrightarrow$ condicionar sobre ξ_1 :

$$\mathbb{E}[N(\infty) - N(t) | \xi_1] = \begin{cases} 1 + \frac{L}{1-L} = \frac{1}{1-L} & \text{si } \xi_1 > t \\ A(t - \xi_1) & \text{si } 0 < \xi_1 \leq t \end{cases}$$

\Rightarrow

$$A(t) = \frac{1}{1-L} \mathbb{P}[\xi_1 > t, \xi_1 < \infty] + \int_0^t A(t-x) F(dx)$$

\Rightarrow

$$A(t) = \underbrace{\frac{1}{1-L} (L - F(t))}_{a(t)} + \int_0^t A(t-x) F(dx).$$

Definir

$$\hat{a}(t) = \frac{e^{\lambda t} (L - F(t))}{1-L} \quad \text{y} \quad \hat{A}(t) = e^{\lambda t} A(t)$$

\Rightarrow

$$\hat{A}(t) = \hat{a}(t) + \int_0^t \hat{A}(t-x) \hat{F}(dx)$$

¿Puedo aplicar el teorema de renovación clave?

Problemas que $\hat{a}(t)$ es directamente Riemann

integrable:

$$\int_0^{\infty} \hat{a}(t) dt = \frac{1}{1-L} \int_0^{\infty} e^{\lambda t} (L - F(t)) dt$$

← creciente
← de creciente:

$$= \frac{1}{1-L} \int_0^{\infty} e^{\lambda t} \int_t^{\infty} F(ds) dt$$

$$= \frac{1}{1-L} \int_0^{\infty} \int_0^s e^{\lambda t} dt F(ds)$$

$$= \frac{1}{1-L} \int_0^{\infty} \frac{(e^{\lambda s} - 1)}{\lambda} F(ds)$$

$$= \frac{1-L}{(1-L)\lambda} = \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

← otro approach:

$$\int_0^{\infty} e^{\lambda t} G(dt)$$

$$dG(t) = (L - F(t)) dt.$$

$$\Downarrow$$

$$G(t) := \int_0^t (L - F(s)) ds$$

como $t \mapsto e^{\lambda t}$ es creciente, basta

ver que

$$\int_0^{\infty} e^{\lambda t} G(dt) < \infty,$$

Procediendo como en el ejemplo

donde $a(t) = te^{-t}$ se puede ver que

$\hat{a}(t)$ es directamente Riemann integrable,

⇒

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} (\mathbb{E}[N(\infty)] - \mathbb{E}[N(t)]) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{A}(t) = \frac{\int_0^{\infty} \hat{a}(t) dt}{\int_0^{\infty} x \hat{F}(dx)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\int_0^{\infty} x e^{\lambda x} F(dx)}$$

$\hat{F}(dx)$

⇒

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} \left(\frac{L}{1-L} - \mathbb{E}[N(t)] \right) = \frac{1}{\lambda \int_0^{\infty} x e^{\lambda x} F(dx)}$$

Problemas concretos referentes a procesos de acumulación:

Ejemplo de "fila de banco".

Ingredientes

- Clientes que llegan a un banco de acuerdo a un proceso Poisson (λ).
- Sólo hay un servidor
- Los clientes "entran" al banco si el servidor está libre.
- Tiempos de servicio son v.a.i.i.d. con distribución $G(x)$, independientes de las llegadas de clientes.
- Cada que llega un cliente, deposita cierta cantidad de dinero, con distribución $M(x)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{total de depósitos al tiempo } t}{t} = \frac{E[Y_i]}{E[Z_i]} = *$$

Necesitamos que la ley de Z_i sea no-aritmética

Ello se cumple pues Z_i es v.a. continua (debido a que es la suma de una v.a. Y_i con una v.a. independiente $\sim \exp(\lambda)$).

$$* = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} x H(dx)}{E[Z_i]} = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} x H(dx)}{\frac{1}{\lambda} + \int_{\mathbb{R}_+} x G(dx)}$$

$$E[Z_i] = \frac{1}{\lambda} + \int_{\mathbb{R}_+} x G(dx)$$

E | tiempo del primer cliente }
 E | tiempo de atención }

Resultado que usamos: (aplicaciones del teorema de renovación clave $\leftarrow \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}_+} a(x) dx$)

Ejemplo 2:)

Modelo de compra de autos:

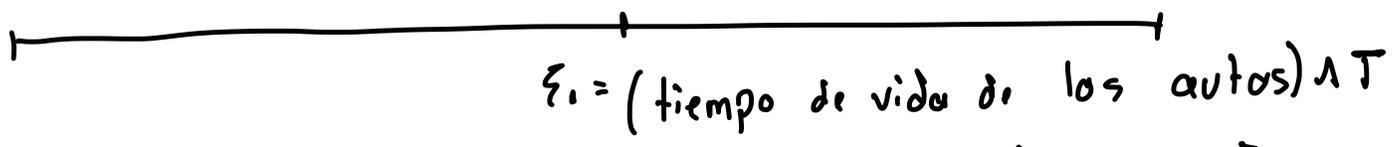
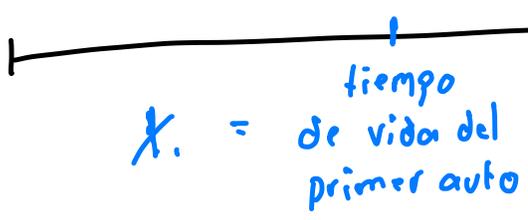
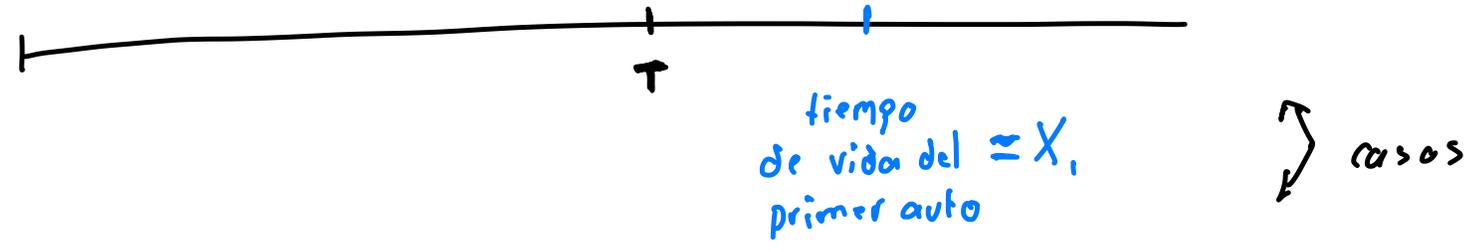
Ingredientes:

- Una persona renueva su auto
- Compra un auto nuevo sii $\left\{ \begin{array}{l} \text{su auto actual se descompone} \\ \text{Pasa una cantidad de} \\ \text{tiempo } T > 0 \end{array} \right.$
- Un auto nuevo cuesta una cantidad determinista C_1 , pero si su auto se descompuso, además de invertir C_1 en el auto nuevo, debes pagar C_2 por la reparación del auto viejo.
- Los tiempos de vida de los autos son v.a.i.i.d con ley común dada por una func. de distribución N .

¿Cuál es la esperanza del costo acumulado promedio?

¿Cuál es la esperanza del costo acumulado promedio?

• Tiempos de renovación tendrán ley igual a \leftarrow tiempos ξ_1, ξ_2, \dots
 (tiempo de vida de los autos) $\wedge T$



• $M(t) \leftarrow$ proceso de renovación con tiempos ξ_i

• Costo acumulado al tiempo $t = \sum_{i=1}^{M(t)} \underbrace{(\text{costo de la } i\text{-ésima renovación})}_{Y_i}$

$$Y_i = \mathbb{1}_{\{X_i > T\}} C_1 + \mathbb{1}_{\{X_i \leq T\}} (C_1 + C_2)$$

Lo único que requerimos es que los vectores

$\{(\xi_i, Y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ sean indep.

Supongamos que la ley de X_1 es una v.a. continua $\Rightarrow X_i \wedge T = \xi_i$ tienen ley no aritmética

Por la aplicación previamente vista sobre procesos de acumulación,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right] = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[Z_1]} = \frac{\mathbb{E} \left[C_1 \mathbb{1}_{\{X_1 > T\}} + (C_1 + C_2) \mathbb{1}_{\{X_1 \leq T\}} \right]}{\mathbb{E}[Z_1]}$$

$$\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_1 \mathbb{1}_{\{X_1 > T\}}] + \mathbb{E}[Z_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq T\}}]$$

$$= \mathbb{E}[T \mathbb{1}_{\{X_1 > T\}}] + \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq T\}}]$$

$X_1 \sim$ Función de distribución H

$$= T \mathbb{P}\{X_1 > T\} + \int_0^T x H(dx) = T(1 - H(T)) + \int_0^T x H(dx)$$

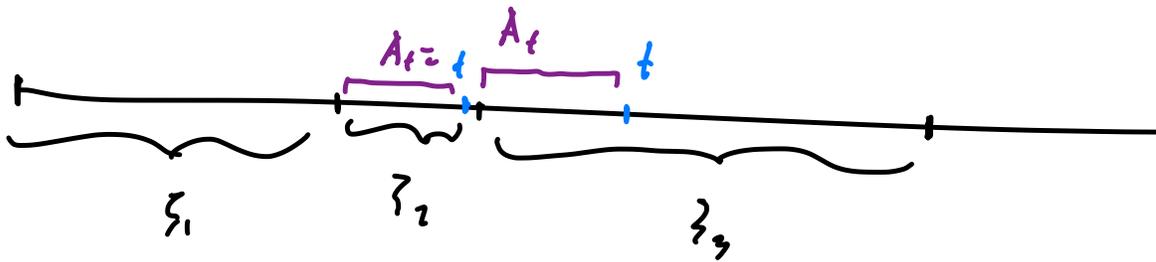
Conclusión:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right] = \frac{C_1 (1 - H(T)) + (C_1 + C_2) H(T)}{T(1 - H(T)) + \int_0^T x H(dx)}$$

$$= \frac{C_1 + C_2 H(T)}{T(1 - H(T)) + \int_0^T x H(dx)}$$

Ejercicios adicionales

Proceso de tiempo de edad $A_t =$ tiempo desde la última ocurrencia



Pregunta natural:

cuál es el promedio de A_t

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S A_u du$$

↑
ver como proceso de acumulación

Ejercicio:

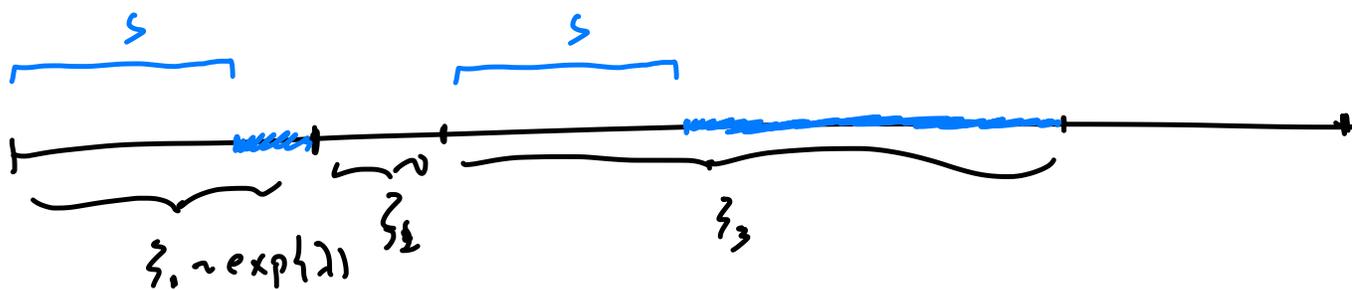
Ingredientes:

• Compañía de seguros cobra cierta prima.

• Se pueden cobrar primas r_0 y r_1 .

• Antes de cada reclamo, me cobraron:

$\left. \begin{array}{l} r_0 \text{ si el reclamo duró más que "s"} \\ r_1 \text{ si el reclamo duró menos que "s"} \end{array} \right\}$



• Tiempos interarribos $\sim \exp(\lambda)$. $\Rightarrow E[\xi_i] = \frac{1}{\lambda}$

• $E[\text{Proporción de tiempo que } \xi_i \text{ estuvo cubierto}] = (E[\xi_i - \xi_i \wedge s])$

$$= \frac{1}{\lambda} - E[\xi_i \wedge s]$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \left(\int_0^s \underbrace{x \lambda e^{-\lambda x}}_{f(x)} dx + s \int_s^{\infty} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f(x)} dx \right)$$

$$u = x \quad v = e^{-\lambda x}$$

$$du = dx \quad dv = -\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{(1 - e^{-\lambda s})}{\lambda}$$

costo promedio

$$= r_0 \left(\frac{E[\text{Proporción de tiempo cubierto}]}{E[\xi_i]} \right) + r_1 \left(\frac{E[\text{Proporción de tiempo no cubierto}]}{E[\xi_i]} \right)$$

costo promedio

$$= r_0 \left(\frac{\mathbb{E}[\text{Proporción de tiempo cubierto}]}{\mathbb{E}[\xi_i]} \right) + r_1 \left(\frac{\mathbb{E}[\text{Proporción de tiempo no cubierto}]}{\mathbb{E}[\xi_i]} \right)$$

$$= r_0 \left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda s})}{\frac{1}{\lambda}} \right) + r_1 \left(\frac{\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda s})}{\frac{1}{\lambda}} \right)$$

$$= r_0 e^{-\lambda s} + r_1 (1 - e^{-\lambda s})$$

Costo = $r_0 \cdot \left(\begin{array}{l} \text{tiempo cubierto por un intervalo azul} \\ \text{al tiempo } t \\ \text{antes del tiempo } t \end{array} \right)$

+ $r_1 \cdot \left(\begin{array}{l} \text{tiempo no cubierto por un intervalo azul} \\ \text{antes del tiempo } t \end{array} \right)$

\Rightarrow

$$\frac{\widehat{\mathbb{E}}[\text{costo promedio}]}{\text{al tiempo } t} =$$

$$r_0 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{l} \text{tiempo cubierto por un intervalo azul} \\ \text{antes del tiempo } t \end{array} \right)$$

$$r_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{l} \text{tiempo no cubierto por un intervalo azul} \\ \text{antes del tiempo } t \end{array} \right)$$

$$= r_0 \left(\frac{\mathbb{E}[Y_0]}{\mathbb{E}[\xi_i]} \right) + r_1 \left(\frac{\mathbb{E}[\xi_i - Y_0]}{\mathbb{E}[\xi_i]} \right)$$

$$T = \min \{n \geq 1; R_n > s\}.$$

$$\{\bar{T} = n\} = \{\max \{R_1, \dots, R_{n-1} \leq s\}\} \cap \{R_n > s\}$$

$$T_n \sim \text{geom}(p), \quad \alpha = \mathbb{P}\{R_1 > s\}.$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{T_n} R_k \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^m R_k \mid T_n = m \right]}_{\text{...}} \cdot (1-\alpha)^{m-1} \alpha$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{m-1} R_k \mid R_1, \dots, R_{m-1} \leq s \right] + \mathbb{E} [R_m \mid R_m > s]$$

$$= (m-2) \int_0^s x e^{-\lambda x} dx + \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{T_n} R_k \right] = (1-\alpha)^m \int_0^s x e^{-\lambda x} dx + \left(\frac{1}{\lambda} - 2 \int_0^s x e^{-\lambda x} dx \right)$$

arreglar este pedazo.



llegada del
primer Poisson(1)

otro pedazo

Ejercicio:

Ingredientes:

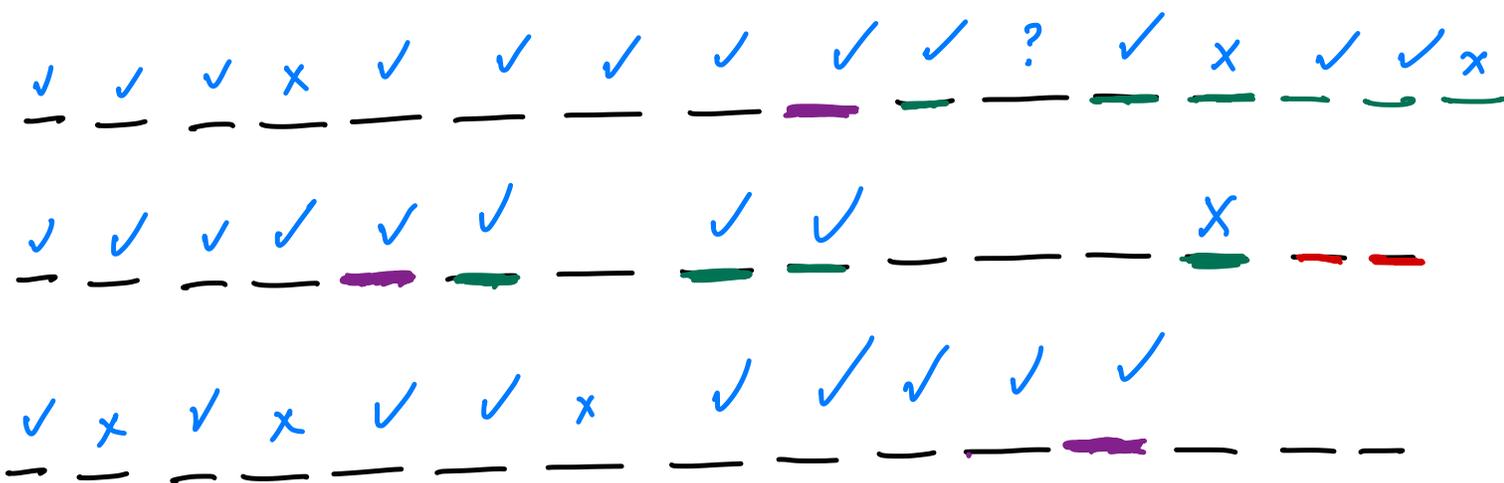
• Búsqueda de elementos defectuosos en un lote

• Paso 1

Reviso TODOS los primeros elementos,

hasta que haya al menos k aceptables consecutivos

ejemplo: $k=5$ reviso hasta el color morado



• Paso 2:)

Yo que encontré k elementos aceptables

consecutivos, empiezo a revisar de

acuerdo a Bernoullis independientes $\sim B(a)$, $a \in (0,1)$

En el primer momento que encuentro un elemento

defectuoso, empiezo a revisar TODOS los elementos,

como en el paso 1.

¿Cuál es la proporción asintótica de elementos inspeccionados?

Hipótesis:

Supondremos que los elementos defectuosos aparecen de acuerdo a Bernoullis indep. de parámetro $q \in (0,1)$.

Solución:

Proceso de acumulación:

$$\frac{\text{Proporción de elementos inspeccionados al tiempo } t}{\text{Número de elementos producidos al tiempo } t} = \frac{\frac{1}{t} \left(\text{Número de elementos inspeccionados al tiempo } t \right)}{\frac{1}{t} \left(\text{Número de elementos producidos al tiempo } t \right)}$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left[\text{Número de elementos inspeccionados en una renovación} \right]}{\mathbb{E} \left[\text{Número de elementos producidos en una renovación} \right]}$$

$$\mathbb{E} \left[\text{Número de elementos producidos en una renovación} \right]$$

Formulación de proceso de acumulación: necesito

- $\{Z_k\}$ ← tiempos de un proceso de renovación
- $\{Y_k\}$ ← sumandos del proceso de acumulación.

$$W_t = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

Para nosotros:

- Z_1 = tiempo hasta que:
- Encontramos K elementos aceptables consecutivos y luego
- encontramos 1 defectuoso.

W_t = # elementos inspeccionados

Y_j = # elementos inspeccionados en la j -ésima renovación.

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{E[Y_i]}{E[Z_i]}$$

$$\tilde{W}_t = \sum_{j=1}^{N(t)} \tilde{Y}_j$$

\tilde{Y}_j = # elementos producidos en la j -ésima renovación.

$$\frac{\tilde{W}_t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{E[\tilde{Y}_i]}{E[Z_i]}$$

$$\frac{W_t}{\tilde{W}_t} = \frac{\frac{1}{t} W_t}{\frac{1}{t} \tilde{W}_t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{E[Y_i]}{E[Z_i]}}{\frac{E[\tilde{Y}_i]}{E[Z_i]}} = \frac{E[Y_i]}{E[\tilde{Y}_i]}$$

Calcular $\frac{E[Y_1]}{E[\tilde{Y}_1]}$:

$Y_1 = \#$ elts inspeccionados en 1 renovación:

$$Y_1 = X_1 + Z_1$$

$X_1 = \#$ elementos inspeccionados hasta obtener K aceptables consecutivos.

$Z_1 = \#$ elementos inspeccionados (sucesivos a X_1) hasta obtener un elemento defectuoso

Análisis de Z_1 :

$Z_1 =$ primera revisión en que la componente sea defectuosa (probabilidad q).



$$Z_1 \sim \text{geom}(1-q) \Rightarrow E[Z_1] = \frac{1}{q} \quad \checkmark$$

Análisis de X_1 :

$X_1 = \#$ componentes revisadas hasta obtener una racha de tamaño K : $(E[X_1])$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[X_i] + \frac{1}{q}$$

Para ver $\mathbb{E}[\tilde{Y}_i]$:

$\tilde{Y}_i = \#$ elts producidos en 1 renovación:

$$\tilde{Y}_i = X_i + \tilde{Z}_i$$

$X_i = \#$ elementos inspeccionados hasta obtener k aceptables consecutivos.

$\tilde{Z}_i = \#$ elementos producidos (sucesivos a X_i) hasta obtener

• un elemento revisado defectuoso

Análisis de \tilde{Z}_i :

$\tilde{Z}_i =$ primera componente que satisface:

- la componente sea defectuosa (probabilidad q).
- la componente fue revisada (probabilidad α).



$$\tilde{Z}_i \sim \text{geom}(1 - \alpha q) \Rightarrow \mathbb{E}[\tilde{Z}_i] = \frac{1}{\alpha q} \quad \checkmark$$

\Rightarrow

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_i] = \mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[\tilde{Z}_i] = \mathbb{E}[X_i] + \frac{1}{\alpha q}$$

Conclusion:

Proporción de elementos inspeccionados al tiempo t \rightarrow
$$\frac{E[X_i]}{E[Y_i]} = \frac{E[X_i] + \frac{1}{\alpha}}{E[X_i] + \frac{1}{\alpha q}} = \textcircled{*}$$

Revisar que

$$E[X_i] = \frac{1}{(1-q)} + \frac{1}{(1-q)^2} + \dots + \frac{1}{(1-q)^k} = \frac{\left(\frac{1}{1-q}\right)^k - 1}{q}$$

$$\textcircled{*} = \frac{\left(\frac{1}{1-q}\right)^k - 1}{\left(\frac{1}{1-q}\right)^k - 1 + \frac{1}{\alpha}}$$

\rightarrow después de simplificar

Ejercicio:

Ingredientes:

- Llegan clientes a una estación de tren de acuerdo a un proceso de renovación $M(\lambda)$, con media de tiempos interarribos $(\{\tau_k\}_{k \geq 1})$.

$$E[\tau_i] = \mu.$$

- El cliente que llega espera hasta que el tren sale.
- Cuando se juntan m clientes, el tren sale.
- La estación incurre en un costo de $c \cdot k$ pesos por minuto si hay k clientes

¿Cuál es el costo promedio asintótico de la estación debido a la estadía de los clientes.

Idea:

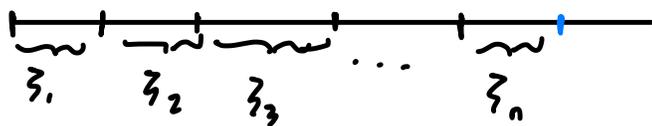
Considerar un proceso de renovación $Z(t)$ con tiempos interarribos dados por

$\eta_k =$ duración de la k -ésima ocasión en que rogieron a los pasajeros.

Nota:

$$\eta_1 = \xi_1 + \dots + \xi_m$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\eta_1] = m\mu$$



Tiempo	Tasa de pago
$[0, \xi_1]$	0
$[\xi_1, \xi_1 + \xi_2]$	C
\vdots	\vdots
$[\xi_1 + \dots + \xi_{m-1}, \xi_1 + \dots + \xi_m]$	$(m-1)C$

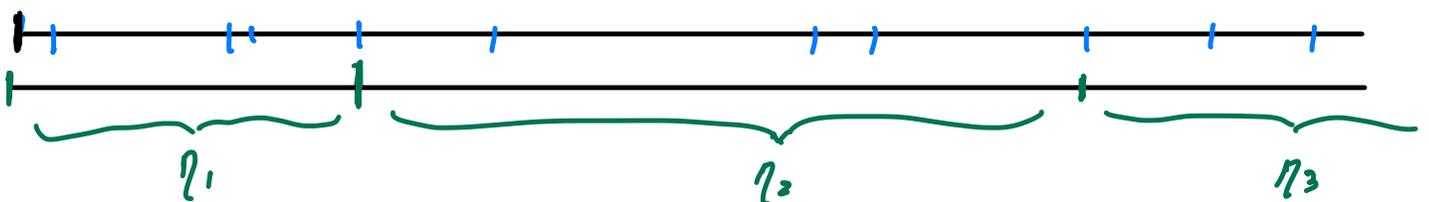
Conclusión: en el tiempo $[0, \eta_1]$ incurrimos en un costo:

$$K_1 = 0 \cdot \xi_1 + C \cdot \xi_2 + 2C \cdot \xi_3 + \dots + (m-1)C \cdot \xi_n$$

Definimos los costos de la k -ésima renovación análogamente.

Marcas azules \leftarrow llegada de los clientes.

$$m = 4$$



$$\text{Costo al tiempo } t = \sum_{j=1}^{z(t)} K_j$$

Nota: (K_j, η_i) son vectores indep.

razón K_j lo escribimos en términos de los z_i 's \leftarrow son indep.

Por lo tanto, con probabilidad 1,

$$\frac{\text{Costo al tiempo } t}{t} \longrightarrow \frac{E[K_i]}{E[\eta_i]}$$

$$E[K_i] = E\{0 \cdot z_1 + c \cdot z_2 + 2c \cdot z_3 + \dots + (m-1)c \cdot z_n\}$$

$$= c \cdot 1 \cdot \mu + 2c \cdot \mu + \dots + (m-1)c \mu$$

$$E[K_i] = c\mu \sum_{j=1}^{m-1} j = \frac{c\mu(m-1)m}{2}$$

$$E[\eta_i] = m\mu$$

$$\text{Conclusión: } \frac{\text{costo al tiempo } t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{c\mu(m-1)m}{2 \cdot m \cdot \mu} = \frac{c(m-1)}{2}$$