Procesos de renovación:

El objetivo de la teoría de renovación es estudiar ciertos fenómenos aleatorios que se "repiten" en tiempos grandes.

Sea $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d, no negativas. Vamos a definir al n-ésimo tiempo de renovación como

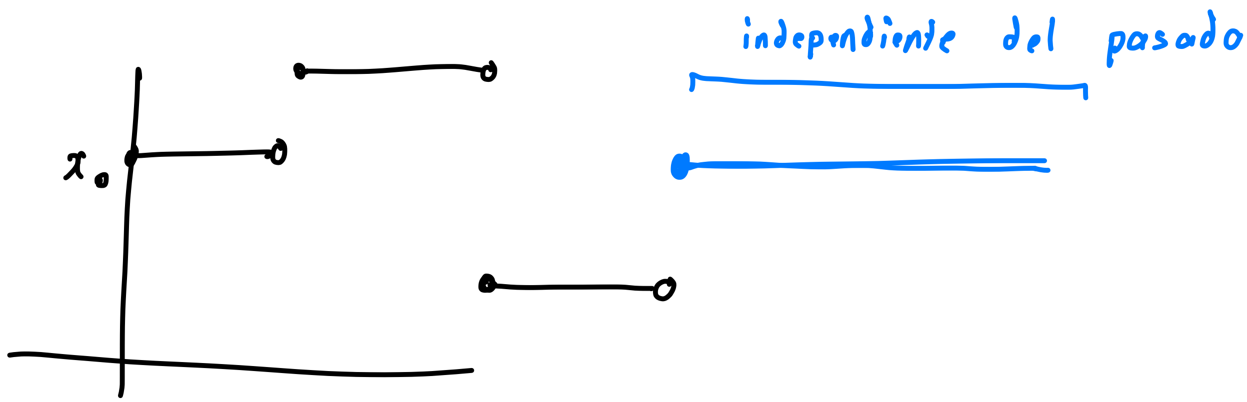
$$T_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad T(0) = 0.$$

Ejemplo Fundamental: Sea X una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados E. Vamos a suponer $X_0 = x_0 \in E$, y consideremos $T(n) =$ n-ésimo tiempo de regreso a x_0:

De manera formal:

$$M_{x_0}^{n+1} = \inf\{ t > T(n);\ X_t \neq x_0 \} - T(n). \qquad T(0) = 0$$

$$T(n+1) = \inf\{ t > T(n) + M_{x_0}^{n+1};\ X_t = x_0 \}.$$



De la propiedad de Markov, se tiene que $T(n)$ es un tiempo de renovación.

Definición:
Un proceso de renovación $\{N(t);\ t \geq 0\} =: N$ es un proceso tal que

$$N(t) = \max\{ n \in \mathbb{N},\ T(n) \leq t \}.$$

¿Qué nos va a interesar?

Definición:
Definimos la función de renovación como:

$$U(t) = 1 + \mathbb{E}[N(t)].$$

Notación: Denotaremos por F a la función de distribución de ξ_1, i.e. $F(t) = \mathbb{P}[\xi_1 \leq t]$.

Definimos $F_k(t) =$ convolución k-veces de la distribución F $\simeq (dF)^{*k}$.

Lema:

- $\mathbb{P}[N(t) = k] = F_k(t) - F_{k+1}(t).$

- $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \iff 1 + \mathbb{E}[N(t)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$

donde $F_0 \equiv 1.$

Prueba:

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \mathbb{P}[T(k) \leq t < T(k+1)]$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[N(t) = k] = \mathbb{P}[T(k) \leq t] - \mathbb{P}[T(k+1) \leq t].$$

$$= F_k(t) - F_{k+1}(t)$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{P}[N(t) = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(F_k(t) - F_{k+1}(t))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, F_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} k\, F_{k+1}(t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, F_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{(k+1)}^{\ell}\, \underbrace{F_{k+1}}_{\ell}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{F_{k+1}}_{\ell}(t)$$

$$= 1\, F_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} k\, F_k(t) - \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell\, F_\ell(t) + \sum_{\ell=2}^{\infty} F_\ell(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} F_\ell(t)$$

Ejemplo:

Suponer que F tiene distribución exponencial de parámetro $q>0$. i.e.

$$F(dx) = q e^{-qx} dx.$$

Se puede ver que $F_n \sim \Gamma(n,q)$. i.e.

$$F_k(t) = \int_0^t \frac{q^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-qx} dx$$

justificación:

$$\mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda \sum_{i=1}^n \xi_i\}\right] = \prod_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{-\lambda \xi_i}\right]}_{\frac{q}{\lambda+q}} = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^n$$

Por otro lado, la transf. de Laplace de la $\Gamma(n,q)$ es

$$\int_0^\infty \frac{q^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qx} e^{-\lambda x} dx = \frac{q^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\overbrace{(q+\lambda)x}^{u}} dx$$

$$\overset{u=(q+\lambda)x}{=} \frac{q^n}{(n-1)!} \cdot (q+\lambda)^{-n} \overbrace{\int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du}^{\Gamma(n)=(n-1)!} = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^n.$$

Cálculo de $\mathbb{P}[N(t)=k]$:

$$\mathbb{P}[N(t)=k] = \mathbb{P}[T(k) \le t < T(k) + \xi_{k+1}]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(k)\le t < T(k)+\xi_{k+1}\}}] \qquad \xi_{k+1} \sim \exp(q)$$

$$= \int_0^\infty q e^{-qx}\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(k)\le t < T(k)+x\}}\, dx]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty q e^{-qx}\, \mathbb{1}_{\{T(k)\le t < \underset{t-T(k)<x}{\underset{\uparrow}{T(k)+x}}\}}\, dx\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T(k)\le t\}} \int_{t-T(k)}^\infty q e^{-qx}\, dx\Big]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(k)\le t\}}\, e^{-q(t-T(k))}\, dx]$$

$$= e^{-qt}\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(k)\le t\}} e^{qT(k)}]$$

$$= e^{-qt} \int_0^t e^{qx} e^{-qx} \frac{q^k}{(k-1)!} x^{k-1}\, dx$$

$$= e^{-qt} \cdot \frac{1}{k!}(tq)^k \longleftarrow \text{distribución Poisson}(tq).$$

$\Rightarrow U(t) = 1 + \mathbb{E}[N(t)] = 1 + qt.$

En éste caso, el modelo está completamente determinado

Vamos ahora a hacer lo mismo, pero con transformadas de Laplace:

Recordar que convoluciones

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)$$

Notar que, si "^" denota transformada de Laplace, es decir, para $\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$,

$$\hat{\psi}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \psi(x)\, dx$$ siempre cuando converja

Hecho: resultado de análisis:
la tranformada de Laplace caracteriza a ψ.

$$\widehat{\sum_{k=1}^{\infty} F_k(\cdot)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_k(\cdot)(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{F}(\lambda))^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^k$$

la transformada de Laplace de una convolución es el producto de las transformadas

Por lo tanto,

$$\widehat{\sum_{k=1}^{\infty} F_k(\cdot)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^k = \left(\frac{q}{\lambda+q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda+q}\right)^k$$

$$= \left(\frac{q}{\lambda+q}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{q}{\lambda+q}} = \frac{1}{\frac{\lambda+q}{q} - 1} = \frac{q}{\lambda}$$

Recordar que

$$U(t) = 1 + qt \iff 1 + \widehat{\mathbb{E}[N(\cdot)]}(\lambda) = 1 + \widehat{(q\cdot(\cdot))}(\lambda).$$

$$t \longmapsto G(t) := qt$$

$$\widehat{(q\cdot(\cdot))}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dG(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} q\, dx = \frac{q}{\lambda}$$

Por lo tanto

$$\widehat{\mathbb{E}[N(\cdot)]}(\lambda) = \widehat{(q\cdot(\cdot))}(\lambda) \iff \mathbb{E}[N(t)] = qt$$

$\blacksquare$

Motivación para lo que sigue:

En el problema 3 de la tarea 4, teníamos una expresión del tipo

$$\mathbb{E}[Y_t] = \int_0^t \delta e^{-\delta x} * (\text{Algo}(x))\,dx + \text{Término adicional}(t)$$

$\uparrow$ tamaño de la población

Esto motiva lo siguiente:

Ecuación de renovación:

La función de renovación U satisface la ec. de renovación

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)\,dF(s)$$

$\longleftarrow$ recordatorio $F(x) = \mathbb{P}[\xi_1 \leq x]$.

prueba:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$

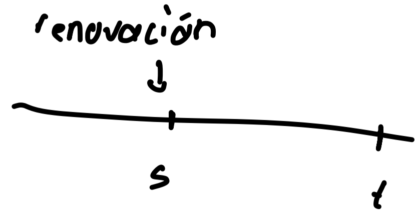
Notar que $F_k(t) = F * F_{k-1}(t)$

$$U(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F * F_{k-1}(t)$$

$$= F_0(t) + F * \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)}^{U(t)} = 1 + \int_0^t U(t-s)\,dF(s)$$

Proposición:

Sea H una función positiva y acotada & continua por derecha. Consideremos la ecuación:



(1) $$\mu(t) = H(t) + \int_0^t \mu(t-s)\, dF(s)$$

Usualmente, lo que queremos calcular en las aplicaciones

Usualmente sale al "renovar" el proceso

tiene que ver, usualmente con "condicionar con respecto a ξ_1

algo que sale en las "cuentas" de nuestro modelo.

Entonces, existe una única solución a (1) dada por

$$\mu(t) = \int_0^t H(t-s)\, dU(s)$$

conocida

"más o menos" conocida

Demostración:

Usaremos transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\mu(q) = \int_0^\infty e^{-qx}\, d\mu(x)$$

Entonces, la ecuación: $\mu(t) = H(t) + \int_0^t \mu(t-s)\, dF(s)$

se reduce a

$$\mathcal{L}\mu(q) = \mathcal{L}H(q) + (\mathcal{L}\mu(q))(\mathcal{L}F(q)).$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\mu(q) = \frac{\mathcal{L}H(q)}{1-\mathcal{L}F(q)} = \mathcal{L}H(q)\left(1 + \mathcal{L}F(q) + (\mathcal{L}F(q))^2 + (\mathcal{L}F(q))^3 + \cdots \right)$$

$$= \mathcal{L}H(q)\left(1 + \mathcal{L}F(q) + \mathcal{L}F_2(q) + \mathcal{L}F_3(q) + \cdots \right)$$

$$\mathcal{L}\mu(q) = \mathcal{L}H(q)\, \mathcal{L}U(q) = \mathcal{L}(H*U)(q)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu(t) = H*U(t) = \int_0^t H(t-s)\, dU(s) \quad \blacksquare$$

Objetivo:

estudiar dichas expresiones cuando $t \simeq \infty$:

Observación: en el teorema anterior, teníamos

$$\mu(t) = \int_0^t H(\underbrace{t-s}_{x})\, dU(s) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teorema} \\ \text{de cambio de} \\ \text{variable.}}}{=} \int_0^t H(x)\, d\big(\underbrace{U(t) - U(t-x)}\big)$$

¿cómo estimar $U(t) - U(t-x)$ cuando t es grande?

Teorema de Blackwell:

Def: Decimos que el proceso de renovación (o la distribución F) es aritmética si

$\mathbb{P}[\xi_1 \in r\mathbb{N}] = 1$ para algún $r \in \mathbb{N}$.

Al máximo r que cumple esta propiedad se le conoce como el "paso de ξ".

Un ejemplo de proceso aritmético surge de una caminata aleatoria simétrica.

Aquí, $T(1), T(2), \ldots \leftarrow$ los tiempos de retorno a 0 dan una estructura de proceso de renovación aritmético con paso $r=2$.

Teorema de Blackwell:

Supongamos que $\mathbb{E}[\xi_1] = m < \infty$.

i) Si F es no-aritmética, entonces $\forall\ h>0$,

$$\lim_{x \to \infty} (U(x+h) - U(x)) = \frac{h}{m}$$

ii) Si F es aritmética con paso $r>0$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} (U((n+1)r) - U(nr)) = \frac{r}{m}$$

Corolario (Teorema de renovación clave)

Supongamos que F no es aritmética, y $m = \mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Sea $g: [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función continua con soporte compacto.

Entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x g(x-s)\, dU(s) = \frac{1}{m}\int_0^\infty g(x)\, dx$$

prueba (bosquejo)

Notemos que

$$\int_0^x g(x-s)\, dU(s) \overset{y = x-s}{=} \int_0^x g(y)\, d\big(U(x) - U(x-y)\big)$$

Del teorema de blackwell,

$$U(x) - U(x-s) \longrightarrow \frac{s}{m} \qquad \text{cuando } x \approx \infty$$

de manera que, cuando $x \approx \infty$,

$$\int_0^x g(x-s)\, dU(s) \approx \int_0^x g(y)\, \frac{dy}{m} = \frac{1}{m}\int_0^x g(y)\, dy \approx \frac{1}{m}\int_0^\infty g(y)\, dy.$$

La siguiente clase:

Teorema de renovación elemental: Si $\mathbb{E}[\xi_1] = m < \infty$

i) $\frac{1}{t}U(t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{m}$ $\leftarrow$ (pensar en el proceso Poisson)

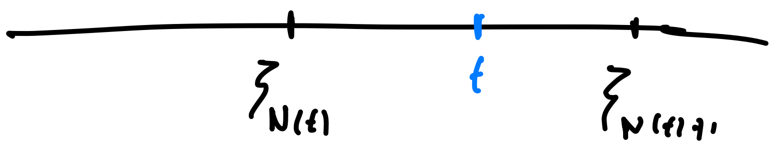
ii) $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{m}$ $\leftarrow$ con probabilidad 1.

Lemma (Wald).

Supongamos que $m = \mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Entonces,

$$\mathbb{E}\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{N(t)+1} \xi_i}\Big] = \mathbb{E}[\xi_1]\,\mathbb{E}[N(t)+1].$$

pensar que esta suma "localiza" el valor de t :



prueba:

Definir

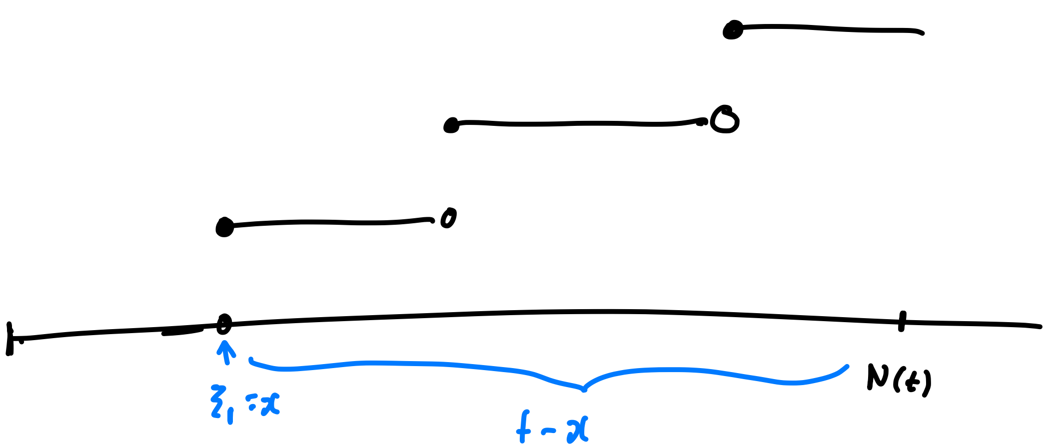
$$A(t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \xi_i\Big]$$

Condicionando sobre ξ_1, obtenemos

$$A(t) = \mathbb{E}\Big[(\xi_1 + \cdots + \xi_{N(t)+1})(\mathbb{1}_{\{\xi_1 \le t\}} + \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}})\Big].$$

$$= \mathbb{E}\Big[(\xi_1 + \overbrace{\xi_2 + \cdots + \xi_{N(t)+1}})\,\mathbb{1}_{\{\xi_1 \le t\}}\Big] + \mathbb{E}\big[\xi_1 \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}\big]$$

Imaginar que $\xi_1 = x \le t$.



$$\Rightarrow A(t) = \int_0^t \Big(x + \mathbb{E}\big[\xi_1 + \cdots + \cdots \xi_{N(t-x)+1}\big]\Big) F(dx) + \mathbb{E}\big[\xi_1 \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}\big]$$

$$A(t) = \int_0^t \Big(x + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1 + \cdots + \cdots \xi_{N(t-x)+1}]}_{A(t-x)}\Big) F(dx) + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1 \mathbb{1}_{\{\xi_1 > t\}}]}_{\int_t^\infty x \, F(dx)}$$

$\Rightarrow$

$$A(t) = \mathbb{E}[\xi_1] + \int_0^t A(t-x) \, F(dx)$$ ← ecuación como

$$\mu(t) = N(t) + \int_0^t \mu(t-s) \, dF(s)$$ ← $\begin{cases} N(t) = \mathbb{E}[\xi_1] \\ \mu(t) = A(t) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Por resultados anteriores,

$$\underbrace{A(t)}_{\mu(t)} = \int_{[0,t]} \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1]}_{N(t-x)} U(dx) = \mathbb{E}[\xi_1] (U(t) - \underbrace{U(0)}_{=0}) = \mathbb{E}[\xi_1] (1 + \mathbb{E}[N(t)]).$$

$U(0) := 0.$ ← $U(t) = \underbrace{F_0(t)}_{\text{Función de distribución degenerada en cero.}} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$

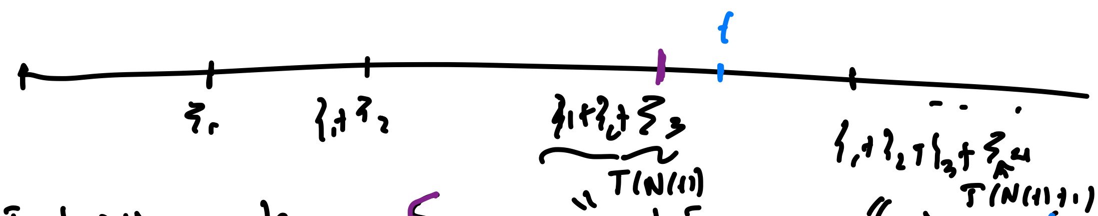
$\blacksquare$

Continuación de la prueba del teorema elemental de renovación:

Primero estudiaremos

¿ $\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{m}$?

idea: asintóticamente, estudiaremos $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$



Intuitivamente, $S_{N(t)}$ "está cerca" de t.

Hace sentido entonces considerar la aproximación

$$\frac{t}{N(t)} \approx \frac{S_{N(t)}}{N(t)}$$

Imanol: $\mathbb{P}\left[\{N(t) \geq c\}\right] = \mathbb{P}\left[\{T(c) < t\}\right] \xrightarrow{c\to\infty} 1$

$\Rightarrow N(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$

$\overset{\text{monotonicidad}}{\Rightarrow} N(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$

Para formalizar esto notemos que

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} t \frac{N(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} t \cdot \mathbb{E}[\xi_1] = \infty$$ con proba 1,

ley fuerte de grandes números

Recordar que $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N};\ T(n) \leq t\}$.

$T(n) =$ n-ésimo tiempo de renovación

Definimos:

$A_1 = \{\omega \in \Omega;\ N(t)(\omega) \to \infty,\ t \to \infty\}$.

$A_2 = \{\omega :\ \frac{S_n}{n}(\omega) \to \mathbb{E}[\xi_1] = m \text{ cuando } t \to \infty\}$

Notar que $\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_2] = 1$

En $\omega \in A_1 \cap A_2$,

$$\frac{S_{N(t)}(\omega)}{N(t)(\omega)} \xrightarrow{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m \quad (*).$$

Finalmente, ya que $N(t) \to \infty$, entonces, para $t \approx \infty$,

$$\left| \frac{S_{N(t)}}{N(t)} - \frac{t}{N(t)} \right| \leq \frac{\xi_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

$$\therefore \quad \frac{t}{N(t)} \xrightarrow{t\to\infty} \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \overset{\text{por } (*)}{=} m.$$

Ahora probamos la parte i) :

i) $\frac{1}{t} U(t) \to \frac{1}{m}$ cuando $t \to \infty$.

Observemos lo siguiente:

$$T(N(t)) \leq t < T(N(t)+1). \quad (*)$$

Por lo tanto,

$$\frac{T(N(t))}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T(N(t)+1)}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

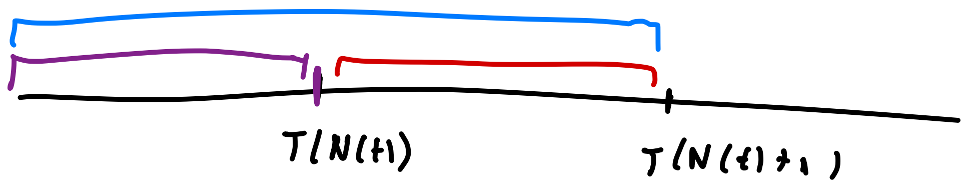
lo que obtengo de aquí es que con proba 1,

$$\underset{\downarrow \atop m}{\frac{T(N(t))}{N(t)}} \leq \frac{t}{N(t)} < \underset{\downarrow \atop m}{\frac{T(N(t)+1)}{N(t)+1}} \cdot \underset{\downarrow \atop 1}{\frac{N(t)+1}{N(t)}} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = m$$

Por ⊛,

$$T(N(t)) \le t$$

$$t \geq \mathbb{E}[T(N(t))] = \mathbb{E}[T(N(t)+1) - \xi_{N(t)+1}] = mU(t) - \mathbb{E}[\xi_{N(t)+1}]$$



$$\Rightarrow \limsup_{t\to\infty} m\frac{U(t)}{t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{(mU(t) - \mathbb{E}[\xi_{N(t)}])}{t} \le \limsup_{t} \frac{t}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \limsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \le m.$$

Para la desigualdad inversa, definimos

$$\xi_j^c = \begin{cases} \xi_j & \text{si } \xi_j < c \\ c & \text{si } \xi_j \geq c \end{cases}$$

para $c>0$. Ahora, consideremos al proceso N^c asociado a los tiempos $\{\xi_j^c\}$. Notemos que si $m^c = \mathbb{E}[\xi_j^c]$, razonando como antes, tenemos

$$t \geq m^c\, \mathbb{E}[N^c(t)+1] - \mathbb{E}[\xi_{N(t)+1}] \geq m^c\, \mathbb{E}[N^c(t)+1] - c. \qquad (1)$$

Como $\xi_j^c \le \xi_j \quad \forall\ j \geq 1 \Rightarrow N^c(t) \geq N(t) \quad \forall\ t \geq 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N^c(t)]+1 \geq \mathbb{E}[N(t)]+1 = U(t) \qquad (2)$$

Por (1) y (2), $\quad t \geq m^c U(t) - c.$

$t \geq m^c U(t) - C.$

De aquí se sigue que

$$\frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m^c} + \frac{C}{m^c t}$$

Sacando $\limsup\limits_{t\to\infty}$, obtengo

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m^c} \qquad \leftarrow \quad \forall \quad c > 0$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{m} \qquad (**)$$

Para hacer el límite inferior:

$$t < \mathbb{E}[T(N(t)+1)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} \xi_i\right] = \overbrace{\mathbb{E}[\xi_1]}^{m}\ \overbrace{\mathbb{E}[N(t)+1]}^{U(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} < \frac{U(t)}{t} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \geq \frac{1}{m} \qquad (***)$$

Por (***) y (**),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = m. \qquad \blacksquare$$

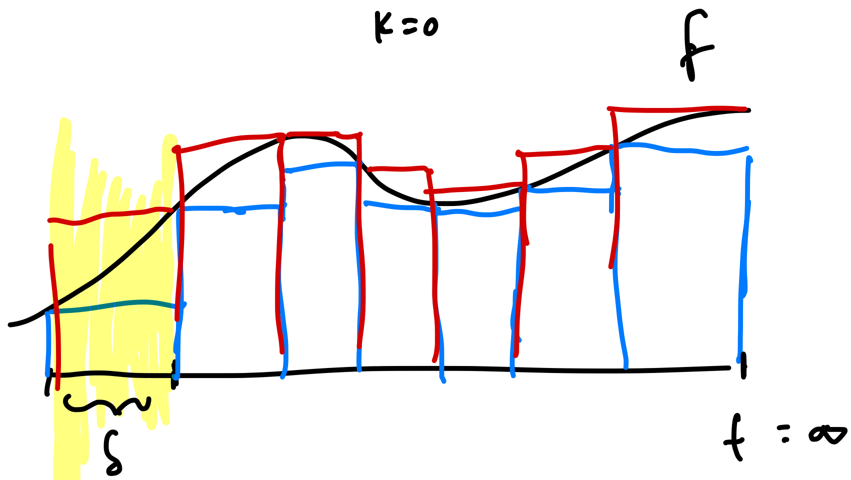
Definición:

Sea $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función arbitraria.

Definimos

$$I_\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf\{f(x);\ x\in[\delta k,\delta(k+1)]\}$$

$$I^\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup\{f(x);\ x\in[\delta k,\delta(k+1)]\}.$$



Decimos que f es directamente Riemann integrable si $\lim_{\delta\to 0} I_\delta = \lim_{\delta\to\infty} I^\delta$

Reforzamiento del teorema de renovación clave:

Supongamos que F es una Función de distribución! de una v.a. positivo con media μ. Suponer que $a: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es directamente Riemann integrable. Sea A la solución a la ecuación de renovación

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)\, F(dx).$$

(recordar que la sol. es $A(t) = \int_0^t a(t-x)\, \underset{\text{función de renovación.}}{\overset{\downarrow}{U}}(dx)$)

i) Si F es no aritmética, entonces

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(x)\,dx & \text{si } \mu < \infty \\ 0 & \text{si } \mu = \infty. \end{cases}$$

ii) Si F es aritmética, con tamaño de paso λ, entonces $\forall\ c>0$,

$$\lim_{n\to\infty} A(c+n\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu}\sum_{n=0}^\infty a(c+n\lambda) & \text{si } \mu<\infty \\ 0 & \text{si } \mu = \infty. \end{cases}$$

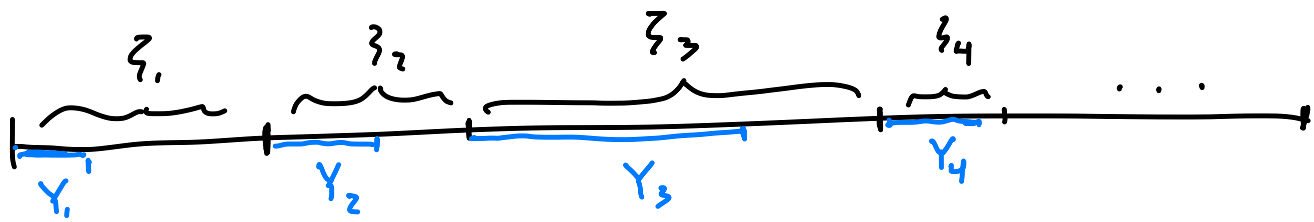
Aplicaciones de la teoría de renovación:

Ejemplo 1:)

Procesos de renovación con dos componentes en cada intervalo de renovación.

$\{\xi_i, Y_i\} \leftarrow$ • $\xi_i \leftarrow$ tiempo aleatorio real. (no infinito). (Por ejemplo, un tiempo de servicio)

• $Y_i \leftarrow$ una porción de ξ_i.



suponer que los vectores (ξ_i, Y_i) son indep. entre si

Sea $p(t)$ la prob. de que t caiga en una "porcion Y de algún intervalo de renovación.

Condicionamos sobre $\{\xi_1 = x\}$ y distinguimos entre las dos posibilidades $x < t$ y $x \geq t$.

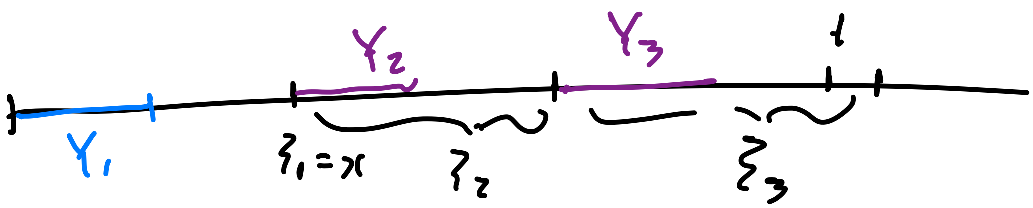
$$p(t) = \int_0^\infty \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto } | \xi_1 = x]\, F(dx)$$

$$= \int_0^t \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto } | \xi_1 = x]\, F(dx)$$

$$+ \int_t^\infty \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto } | \xi_1 = x]\, F(dx)$$

$$p(t) = \int_0^t \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto} \mid \xi_0 = x]\, F(dx)$$

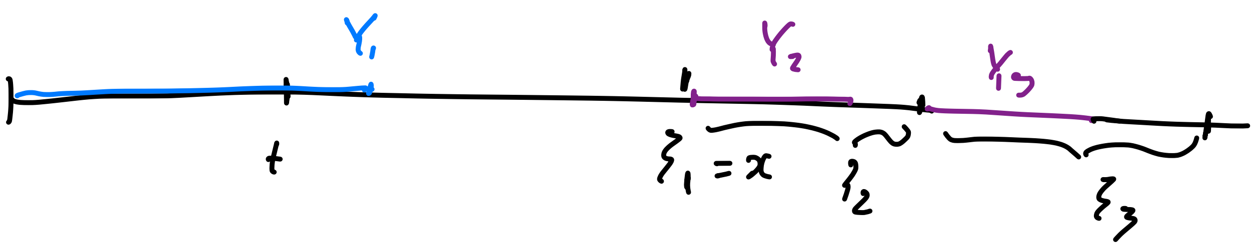
$$+ \int_t^\infty \mathbb{P}[\underbrace{t \text{ esté cubierto}}_{t \text{ esté cubierto por } Y_1} \mid \xi_0 = x]\, F(dx)$$



← caso $x \leq t$

$$\Rightarrow$$

$$p(t) = \int_0^t \underbrace{p(t-x)}_{\mu} F(dx) + \mathbb{P}[\underbrace{t \text{ esté cubierto por } Y_1}_{H}]$$



← caso $x > t$

La solución a la ecuación de renovación

$$\mu(t) = \int_{[0,t]} \mu(t-s)\, F(ds)$$ es

$$\mu(t) = \int_{[0,t]} H(t-s)\, U(ds),$$ donde $\mu(t) = p(t)$

$H(t) = \mathbb{P}[t \text{ esté cubierto por } Y_1]$

$$\lim_{t \to \infty} p(t) \overset{?}{=} \frac{1}{\mathbb{E}[\xi_1]} \int_0^\infty H(x)\, dx$$

Ahora,

$\mathbb{P}[t$ está cubierto por $Y_1]$

$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,Y_1]}(t)]$

Obs: $t \mapsto \mathbb{P}[t$ está cubierto por $Y_1]$ es decreciente, y

$$\int_0^\infty \mathbb{P}[t \text{ está cubierto por } Y_1]\,dt$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,Y_1]}(t)]\,dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,Y_1]}(t)\,dt\right]$$

$$= \mathbb{E}[Y_1] =: \gamma. \leftarrow \text{ definamos } \gamma \text{ así.}$$

Se puede ver fácil de aquí que $t \mapsto \mathbb{P}[t$ está cubierto por $Y_1]$ es directamente Riemann integrable, y por el teorema de renovación clave (parte 2),

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{1}{\mathbb{E}[Z_1]} \int_0^\infty \mathbb{P}[t \text{ está cubierta por } Y_1]\,dt$$

$$= \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[Z_1]}$$

Para la siguiente clase:

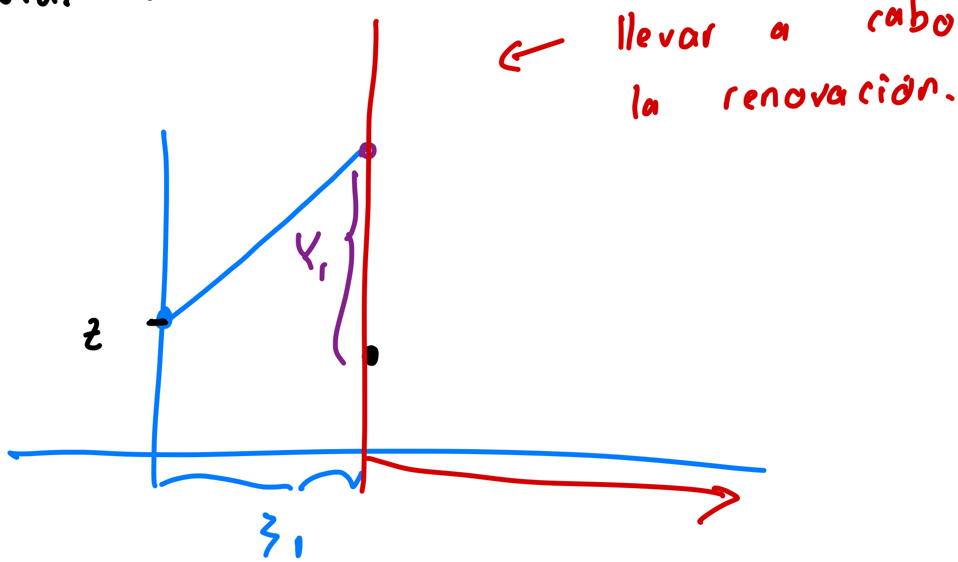
$$X_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{capital} \\ \text{inicial}}}{z} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prima}}}{ct} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

- $N(t) \leftarrow$ proceso Poisson
- $Y_i \leftarrow$ tamaño del reclamo.

Pregunta de interés:

$$R(z) = \mathbb{P}[X_t > 0 \quad \forall \quad t > 0].$$

Idea: determinar una ecuación de renovación para R.



Ejemplo de lo visto anteriormente:

Modelos de colas:

Si las llegadas de una cola siguen un proceso Poisson, entonces los tiempos sucesivos ξ_K del K-ésimo tiempo en que el servidor se $\underbrace{\text{encuentra ocupado}}_{\text{se encuentra solicitado.}}$ forma un proceso de renovación

Podemos suponer que cada ξ_K se compone de una porción ocupada Z_K y una porción libre Y_K

Entonces $e(t)$, la probabilidad de que el servidor esté libre al tiempo t converge a

$$\frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}[\xi_1]} = \frac{Y_1}{\mathbb{E}[\xi_1]}.$$