Movimiento Browniano.

Perspectiva personal:

- Cuando analizamos v.a. i.i.d $\leftarrow$ Objeto (v.a.) fundamental es $N(0,1)$

  $\uparrow$ distribución Gaussiana

Si $\{\xi_K\}_{K\geq 1}$ son v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[\xi_K] = 0$

y $\mathbb{E}[\xi_K^2] = 1$, $\mathbb{E}[|\xi_K|^3] < \infty$, entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{K=1}^{n} \xi_K \xrightarrow{ley} N(0,1).$$

- Cuando analizamos procesos, el objeto fundamental es el mov. Browniano.

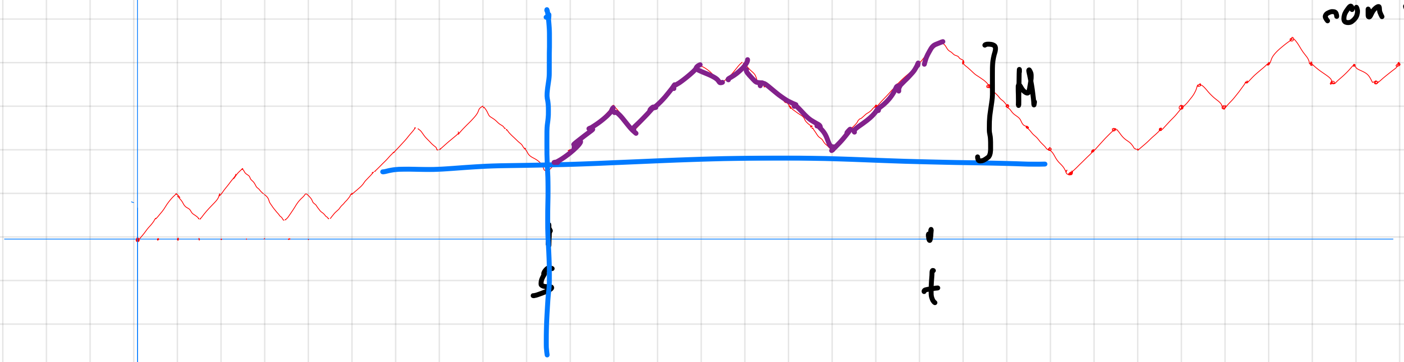
¿Qué es el mov. Browniano?

Perspectiva personal:

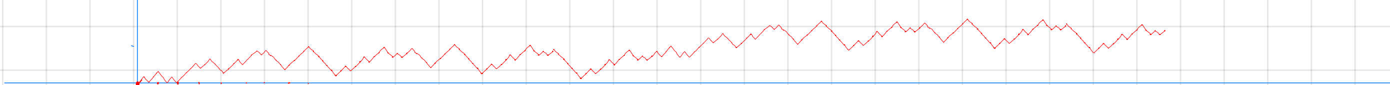
Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria:

Caminata aleatoria 1:

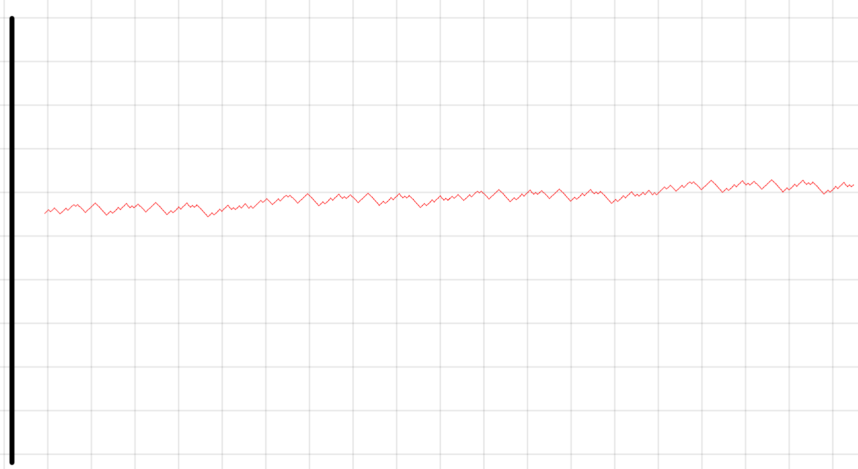
recordar que H depende de una Binomial
y las binomiales reescaladas se aproximan con normales



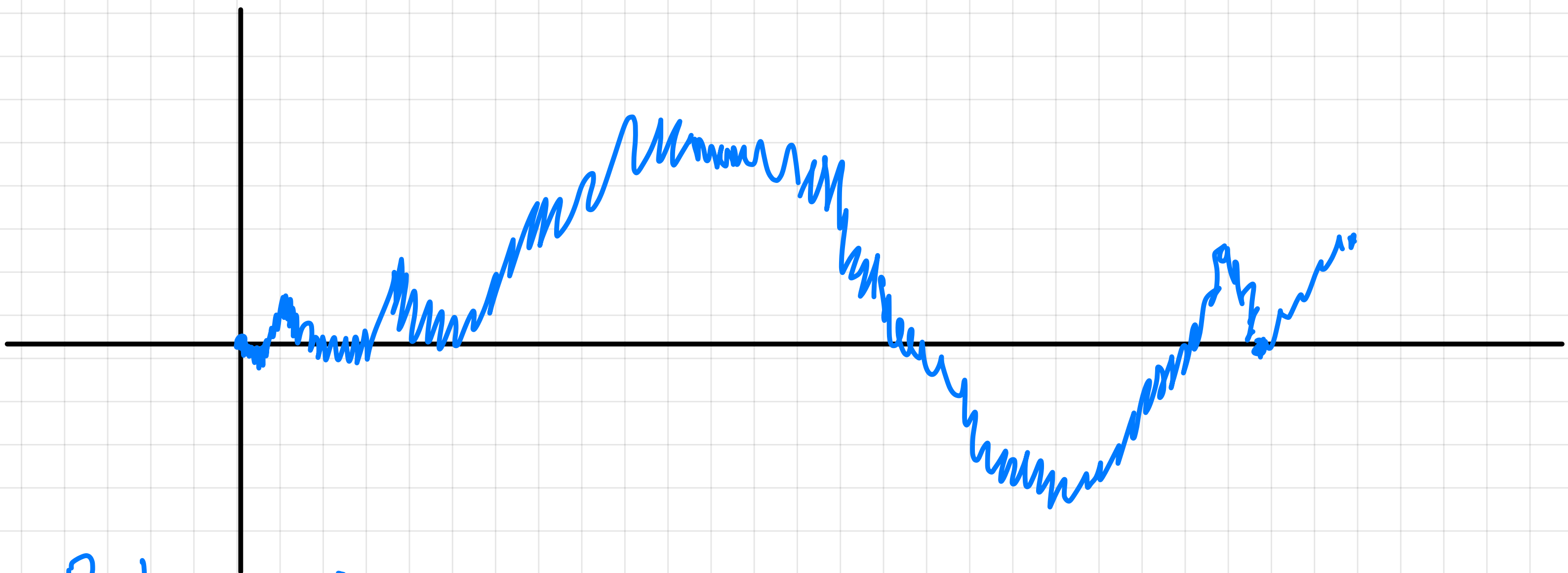
Caminata aleatoria 2:



Caminata aleatoria 3:



En el límite, cuando hacemos un plot de una caminata aleatoria, obtenemos una trayectoria que se ve con la siguiente forma:



Relevancia:

Aplicaciones en modelación:

- Precio de acciones (matemáticas financieras).
- Genética (procesos de ramificación).
- Cada vez que tengamos procesos del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k \qquad \{\xi_k\} \text{ como antes} \qquad n \in \mathbb{N}, \; t \in \mathbb{R}_+$$

- Estudio de v.a. que dependen de variables Gaussianas (Cálculo de Malliavin)
- Ecuaciones diferenciales parciales (con errores Gaussianos) → Ecuaciones parciales estocásticas. parciales

Aspectos técnicos de procesos estocásticos:

Supongamos que $X = \{X_t \,;\, t \geq 0\}$ es un proceso estocástico. Colección de v.a definidas en UN MISMO ESPACIO DE PROBABILIDAD

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Problemas técnicos:

¿Quién es $\mathcal{F}$? ¿Cómo tomamos $\mathcal{F}$?

Definición:

Decimos que un proceso estocástico $\{B_t\}_{t\geq 0}$ (indexado por un parámetro continuo $t \in \mathbb{R}_+$) es un movimiento Browniano que empieza en $x \in \mathbb{R}$, si $B_0 = x$ y

i) **Incrementos independientes:**

$\forall \; t > s \geq 0$, $B_t - B_s$ es independiente de B_u, $0 \leq u \leq s$ (equivalentemente, $B_t - B_s$ es indep. de la "información generada" por B_u, $0 \leq u \leq s$.

ii) **Incrementos estacionarios normales:**

$\forall \; t > s \geq 0$ $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$. Es decir, $B_t - B_s$ es Gaussiano centrado, con

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = \operatorname{Var}[B_t - B_s] = t - s$$

iii) **(Nota histórica)**

El mov. Browniano se "observa" por primera vez por R. Brown al momento de describir partículas de polen en 1828

Esto motiva el pedir que con probabilidad 1, $t \mapsto B_t$, $0 \leq t \leq T$, $T \in \mathbb{R}_+$ sea continua

Problema "difícil":

¿Cómo sabemos que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso $B = \{B_t ; t \geq 0\}$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que B es un movimiento Browniano?

En lo sucesivo, supondremos que SI existe un $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un B que satisface las propiedades antes mencionadas.

Comentario sobre lo existencia:

(ver el libro de Durrett "Probability theory and examples" o el libro de LeGall).

1.-) Construcción incorrecta:

Teorema de consistencia de Kolmogorov.

- $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} = \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \}$.

- Si $w \in \Omega$, entonces $w = \{ w(t) ; t \in \mathbb{R}_+ \}$.

  $X_t := w(t)$.

- Si tenemos una familia de "leyes de probabilidad" potenciales para vectores $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ (que satisfacen la propiedad de "consistencia").

Entonces existe una medide en $(\Omega, \mathcal{F})$ t.q. $\mathbb{P}[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A]$ está dictada por las

"leyes de probabilidad" potenciales para vectores

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ propuestas.

Problema: Ya tenemos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ....

$\mathcal{F} \leftarrow$ los posibles eventos

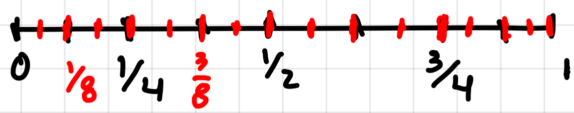
Thm: el evento $\{ t \mapsto X_t$ es continua$\} \notin \mathcal{F}$.

Detalles sobre la prueba:

1.-) Construcción correcta:

Teorema de consistencia de Kolmogorov. ✓

- $D = \{ j 2^{-n} \ ; \ j \leq 2^n, \ n \in \mathbb{N} \}$ ↔



$\tilde{\Omega} = \{ f : D \to \mathbb{R} \}$

- Si $\omega \in \Omega$, entonces $\omega = \{ \omega(t); \ t \in D \}$

  $X_t := \omega(t)$.

- Si tenemos una familia de "leyes de probabilidad" potenciales para vectores $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ (que satisfacen la propiedad de "consistencia").

Entonces existe una medida en $(\Omega, \mathcal{F})$ t.q. $\mathbb{P}[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A]$ está dictada por las "leyes de probabilidad" potenciales para vectores $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ propuestas.

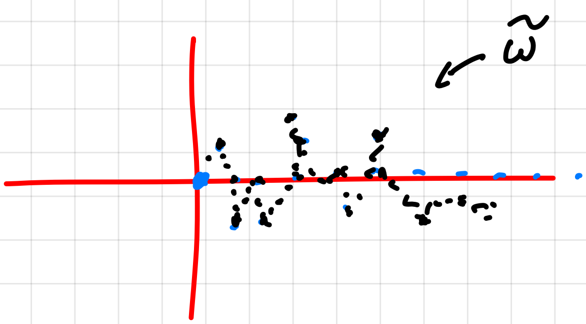
Se puede hacer.

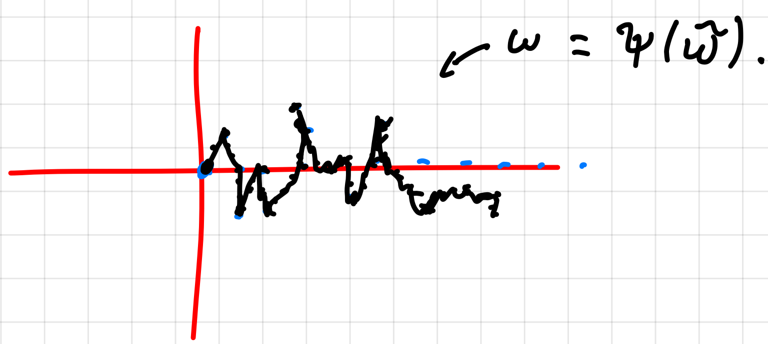
2º paso:

$\Omega = \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \}$ $\quad$ $\mathcal{F} = \sigma$-álgebra generada por

$\Psi : \tilde{\Omega} \to \Omega$. t.q. $\omega = \Psi(\tilde{\omega})$ con $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, entonces

$$\omega(t) = \tilde{\omega}(t) \quad \forall \ t \in D.$$





2.º construcción:

considerar $\{\xi_k\}_{k\geq 0}$ i.i.d. $\xi_k \sim N(0,1)$

$$X(t) := \xi_0 \frac{t}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jt)}{j} \xi_j.$$

es un mov. Browniano

ligeras modificaciones: • $\{\xi_k\}_{k\geq}$ sea gaussiana y centrada $\mathbb{E}[\xi_k \xi_j] = R(k,j)$ ← función de covarianza (no trivial.

$$= \varrho(k-j)$$

donde $\varrho : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ t.q. $\sum \varrho(k)^2 < \infty$.

2.-) ξ_j son intercambiabes.

Mi approach: considerar $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

(se puede hacer con método de Stein ver libro de Chen-Goldstein)

tratar de ver la convergencia de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ hacia un vector Gaussiano

Propiedades del movimiento browniano

Eventos naturales:

$B_0 = 0.$

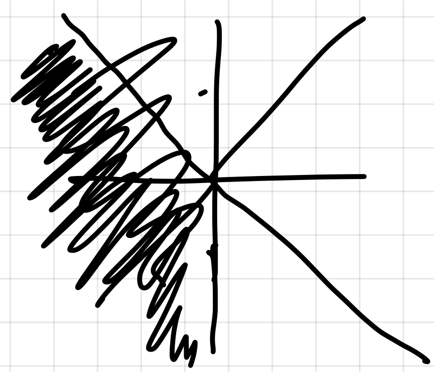
- $\mathbb{P}[B_2 \leq 0 = \mathbb{P}[N(0,2) \leq 0] = \frac{1}{2}$

  $B_2 = B_2 - B_0 \sim N(0,2)$ por la propiedad ii)

- $\mathbb{P}[B_1 \leq 0, B_2 \leq 0]$

$$= \mathbb{P}[B_1 \leq 0, (B_2 - B_1) + B_1 \leq 0]$$

$$= \mathbb{P}[N_1 \leq 0, N_1 + N_2 \leq 0] = \circledast$$

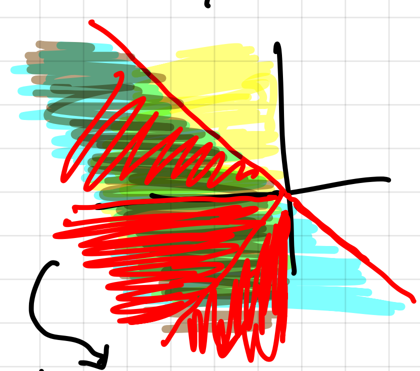


$$\begin{cases} (B_1, B_2 - B_1) = (B_1 - B_0, B_2 - B_1) \overset{\text{ley}}{=} (N_1, N_2) \\ N_1 \sim N(0,1) \qquad N_1 \text{ y } N_2 \text{ indep.} \\ N_2 \sim N(0,1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}[B_1 \leq 0, B_2 \leq 0] \overset{N_1 = x}{=} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \mathbb{P}[N_1 \leq 0, N_1 + N_2 \leq 0 \mid N_1 = x]\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \mathbb{P}[x \leq 0, x + N_2 \leq 0 \mid N_1 = x]\, dx \qquad y \leq -x$$



$$= \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\, \mathbb{P}[x + N_2 \leq 0 \mid N_1 = x]\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\, \mathbb{P}[N_2 \leq -x]\, dx = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{-x} \phi(y)\, \phi(x)\, dy\, dx = \frac{3}{8}$$

Generalización:

Probabilidades de transición:

La función cumulativa de transición como

$$P(y,t,x,s) := \mathbb{P}[B_{t+s} \leq y \mid B_s = x]$$

$$= \mathbb{P}[(B_{t+s} - B_s) + B_s \leq y \mid B_s = x]$$

$$= \mathbb{P}[B_{t+s} - B_s \leq y - x \mid B_s = x]$$

incrementos indep.

$$= \mathbb{P}[B_{t+s} - B_s \leq y - x]$$

Gaussianidad de los incrementos

$$= \mathbb{P}[B_t \leq y - x] = \mathbb{P}[B_t \leq y \mid B_0 = x]$$

$$= \int_{-\infty}^{y-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}u^2} du$$

La densidad (viendo a $P(y,t,x,s)$ como función cumulativa sobre y) está dada por:

$$P(y,t,x,s) = \int_{-\infty}^{y} p(u,t,x,s)\, du,$$ donde

$$p(u,t,x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(y-x)^2}$$ ← no depende de s.

$$p(u,t,x,s) = p_t(x,u)$$

notación

(transito de x a u en tiempo t)

Calculo de "leyes finito dimensionales":

Consideremos $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$

y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}[B_{t_1} \le x_1, B_{t_2} \le x_2, \dots B_{t_n} \le x_n \mid B_0 = x]$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{1}{2t_1}(u-x)^2} \mathbb{P}[B_{t_2} \le x_2, \dots, B_{t_n} \le x_n \mid B_{t_1} = u, B_0 = x] \, du$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x,u) \, \mathbb{P}[B_{t_2} \le x_2, \dots, B_{t_n} \le x_n \mid B_{t_1} = u, B_0 = x] \, du$$

igual que antes:

$$(B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$$

$$= ((B_{t_2} - B_{t_1}) + B_{t_1}, (B_{t_3} - B_{t_1}) + B_{t_1}, \dots, (B_{t_n} - B_{t_1}) + B_{t_1})$$

Entonces, condicional a $B_{t_1} = u$

$$(B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$$

$$= ((B_{t_2} - B_{t_1}) + u, (B_{t_3} - B_{t_1}) + u, \dots, (B_{t_n} - B_{t_1}) + u)$$

independiente de B_{t_1} & B_0 y tiene ley

$$\overset{\text{ley}}{=} (B_{t_2 - t_1} + u, B_{t_3 - t_1} + u, \dots, B_{t_n - t_1} + u) \overset{\text{ley}}{=} (B_{t_2 - t_1}, \dots, B_{t_n - t_1} \mid B_0 = u)$$

checar

hint: Expresar a $(B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_1})$ en términos de $(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$.

De aquí se sigue que

$$\mathbb{P}[B_{t_1} \leq x_1, B_{t_2} \leq x_2, \dots B_{t_n} \leq x_n \mid B_0 = x]$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x,u)\, \mathbb{P}[B_{t_2} \leq \underset{-u}{x_2}, \dots, B_{t_n} \leq \underset{-u}{x_n} \mid B_{t_1} = u, B_0 = x]\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x,u)\, \mathbb{P}[B_{t_2-t_1} \leq x_2, \dots, B_{t_n-t_1} \leq x_n \mid B_0 = u]\, du$$

$$\underset{\text{inducción}}{=} \int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x,u_1) \int_{-\infty}^{x_2} p_{t_2-t_1}(u_1, u_2)\, \mathbb{P}[B_{t_3-t_2} \leq x_3, \dots, B_{t_n-t_2} \leq x_n \mid B_0 = u_2]\, du_2\, du_1$$

$$\vdots$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_{t_1}(x,u_1)\, p_{t_2-t_1}(u_1,u_2) \cdots p_{t_n-t_{n-1}}(u_{n-1},u_n)\, du_n \dots du_1$$

Moraleja:

tengo una fórmula para la ley de

$$(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) \quad \forall \quad t_1 < \dots < t_n$$

Perspectiva 2:

Ver a $\{B_t ; t \geq 0\}$ como un proceso Gaussiano con una covarianza dada.

Definición:

Un proceso estocástico $X = \{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso Gaussiano si

$X_t = \tilde{X}_t + \mu_t$, donde μ_t es determinista

y

- $(\tilde{X}_{t_1}, \ldots, \tilde{X}_{t_n})$ es un vector CONJUNTAMENTE gaussiano (i.e. vector Gaussiano multivariado) con media cero.

Nota: un vector $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es Gaussiano centrado si:

Definición:

Decimos que $X = \{X_t ; t \geq 0\}$ es un proceso Gaussiano centrado si:

i) $\mathbb{E}[X_t] = 0 \quad \forall\ t \geq 0$

ii) $\forall\ 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es un vector conjuntamente Gaussiano,

Pregunta: ¿Qué es un vector Gaussiano?

$V = (V_1, \ldots, V_m)$ es un vector Gaussiano si

Caracterización 1:

i) Cualquier combinación lineal

$\lambda_1 V_1 + \cdots \lambda_m V_m$ es una v.a. gaussiana

Caracterización 2:

ii) $\exists\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ no negativa definida

y $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ t.q.

$$f_V(\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{:= \vec{x}}) = (2\pi^m \det(\Sigma))^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^* \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\right\}$$

Pregunta: si $A \sim N(0,1)$ y $B \sim N(0,1)$.

Entonces ¿ (A,B) es un vector Gaussiano?

¡No necesariamente!

Contraejemplo: $A \sim N(0,1)$ y $B = \xi \cdot A$, donde $\mathbb{P}[\xi = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi = -1] = \frac{1}{2}$.

Detalle:

ley de (A,B) no se puede "siempre" reconstruir a partir de la ley de A y la ley de B.

Hecho / lemma:

Suponer que $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ es un vector con entradas independientes y Gaussianas.

Entonces para toda $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ← matriz $m \times m$.

CZ es un vector Gaussiano.

Teorema: Suponer que $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz positiva definida no degenerada $(\ker(\Sigma) = \{0\})$

$V = (V_1, \dots, V_m)$ es un vector Gaussiano con covarianza Σ, si alguna de las siguientes caracterizaciones se cumple

Caracterización 1:

i) Cualquier combinación lineal

$\lambda_1 V_1 + \dots \lambda_m V_m$ es una v.a. gaussiana $(\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R})$.

Caracterización 2:

ii) $\exists$ $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ no negativa definida

y $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ t.q.

$$f_V(\underbrace{x_1, \dots, x_m}_{:= \vec{x}}) = ((2\pi)^m \det(\Sigma))^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^* \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\right\} \quad *$$

Bosquejo de prueba:

Caract 2 $\Rightarrow$ Caract. 1 :

si V satisface caract 2: $\Rightarrow$ w $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} V$

también satisface caract. 2

(consecuencia del tma de cambio de variable.

Más aún, $(1, \dots, 1) \cdot w = \underset{\mathbb{R}^{1 \times m}}{(1, \dots, 1)} \underset{\mathbb{R}^{m \times m}}{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}} \underset{\mathbb{R}^{m \times 1}}{V} \in \mathbb{R}$

es también una v.a. con densidad $* \Rightarrow$ Gaussianidad.

Caracterización 1 $\Rightarrow$ Caracterización 2:

$V = (V_1, \ldots, V_m)$.

satisface $\quad W := \lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_m V_m \sim N(\mu, \sigma)$

$$\mathbb{E}[e^{1 \cdot W}] = \exp\left\{\frac{1}{2} 1^2 \cdot \mathrm{Var}[W]\right\} \exp\{1 \cdot \mu\}$$

$$\mathrm{Var}[W] = \mathrm{Var}[\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_m V_m] =$$

$$= \mathbb{E}[(\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_m V_m)^2] - \mathbb{E}[\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_m V_m]^2$$

$$= \mathbb{E}[(\lambda_1 V_1)^2] + \cdots + \mathbb{E}[(\lambda_m V_m)^2] + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}[(\lambda_i V_i)(\lambda_j V_j)] - \mathbb{E}[\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_m V_m]^2$$

Denotando por Σ a la covarianza

$$\Sigma = \{\Sigma_{i,j} \;;\, 1 \leq i,j \leq m\}, \qquad \Sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}[V_i, V_j],$$

entonces, si $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ y $\mu := (\mathbb{E}[V_1], \ldots, \mathbb{E}[V_m])$,

$$\mathrm{Var}[W] = (\vec{\lambda} - \vec{\mu})^* \Sigma (\vec{\lambda} - \vec{\mu})$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[e^{1 \cdot W}] = \exp\left\{\frac{1}{2} (\vec{\lambda} - \vec{\mu})^* \Sigma (\vec{\lambda} - \vec{\mu})\right\} \exp\{1 \cdot \mu\}$$

función generadora de momentos de la densidad

$$f_V(x_1, \ldots, x_m) = ((2\pi)^m \det(\Sigma))^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^* \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\right\}$$

Corolario del cálculo anterior

Las leyes finito-dimensionales de un proceso Gaussiano centrado X, es decir, las leyes de los vectores del tipo $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ están determinados por la función de covarianzas:

$$R: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(s,t) \longmapsto \mathbb{E}[X_s X_t] = \mathrm{Cov}[X_s, X_t]$$

Caracterización 2 del mov. Browniano:

$B = \{B_t ; t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano empezado en cero si

i) B es un proceso Gaussiano centrado

ii) su función de covarianzas está dada por

$$R(s,t) = s \wedge t$$

iii) B tiene trayectorias continuas

¿Qué debo poner en $\boxed{}$?

$$R(s,t) = \mathbb{E}[B_s B_t]$$

$$= \begin{cases} \mathbb{E}[B_s(B_s + (B_t - B_s))] = \mathbb{E}[B_s^2] = s & \text{si } s \leq t \\ \\ \mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[(B_t + (B_s - B_t)) B_t] = t & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

Para próxima tarea:

como deduzco propiedades de incrementos y estacionarios Gaussianos a partir de la formulación del m.B. como un proceso gaussiano centrado con covarianza

$$R(s,t) = \mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t$$

Aplicación directa:

$$Z = \int_0^1 B_u \, du \quad \leftarrow \text{¿Cuál es la ley?}$$

$$\int_0^1 B_u \, du = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_{t_k} \quad \text{donde} \quad t_k = \frac{k}{n}$$

Ahora, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_{t_k}$ es una v.a. Gaussiana centrada.

$\Rightarrow$ Sólo necesito la covarianza:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_{t_k}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k_1, k_2} B_{t_{k_1}} B_{t_{k_2}} \frac{1}{n} \frac{1}{n}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{checar}]{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 B_u B_v \, du \, dv\right]$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}[B_u B_v] \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^1 u \wedge v \, du \, dv = \cdots = \frac{1}{3}$$

checar

hecho:

si $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión de v.a Gaussianas, con $\mathbb{E}[\xi_k] = \mu_k$ y $Var[\xi_k] = \sigma_k^2$, entonces

$$\xi_k \xrightarrow{ley} \xi \sim N(\mu, \sigma^2),$$ donde

$$\mu = \lim_k \mu_k \quad y \quad \sigma^2 = \lim_k \sigma_k^2,$$

siempre y cuando $\lim_k \mu_k$ y $\lim_k \sigma_k^2$ existen.

prueba:

Para ver que $\xi_k \xrightarrow{ley} \xi$ basta ver que

$$\mathbb{E}[e^{\lambda \xi_k}] \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{E}[e^{\lambda \xi}] \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda \xi_k}] = e^{\lambda \mu_k} \mathbb{E}[e^{\lambda(\xi_k - \mu_k)}]$$

$$= e^{\lambda \mu_k} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \sigma_k^2} \xrightarrow{k\to\infty} e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2} = \mathbb{E}[e^{\lambda \xi}]$$

Propiedad Fundamental (autosimilitud):

Si $B = \{B_t \,;\, t \geq 0\}$ es un m.B. (mov. Browniano),

entonces, el proceso $\tilde{B} = \{\tilde{B}_t \,;\, t \geq 0\}$ con

$\tilde{B}_t := \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ para $a > 0$.

es también un mov. Browniano.

prueba:

· $\tilde{B}$ tiene trayect. continuas.

· $\tilde{B}$ es un proceso Gaussiano centrado:

$$(\tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_m}) = \frac{1}{\sqrt{a}} (B_{at_1}, \dots, B_{at_m}) \leftarrow \text{vector Gaussiano.}$$

· $$\mathbb{E}[\tilde{B}_s \tilde{B}_t] = \frac{1}{a} \mathbb{E}[B_{as} B_{at}] = \frac{(as) \wedge (at)}{a} = s \wedge t \qquad \blacksquare$$

Variación cuadrática:

Comercial:

Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

¿Cuando $\int_0^1 f\, dg$ tiene sentido?

Una manera de darle sentido a ésto es tomar

$$\int_0^1 f\, dg \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_{i-1}) \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) \circledast \quad 0 < t_0 < \dots < t_n$$

Una manera de asegurarnos que $\circledast$ tenga un límite es:

i) Pedir condiciones "sencillas" sobre f

ii) $\sum_{k=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|$ converge cuando el tamaño de la partición $0 < t_0 < \dots < t_n$ converge a cero.

(el límite se conoce como variación de g)

Hecho importante: las trayectorias de B no tienen variación finita.

Ecuaciones parcial

$Af = 0$ ⊛ $\quad A$ ∈ operador diferencial

Ejmp. $\quad A = \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Si pongo ciertas condiciones de frontera:

i) A veces podemos resolver explícitamente ⊛

ii) Sólo se tienen representaciones de ⊛
hay varias representaciones probabilísticas:

- Representación de Feynmac-Kac
- Representaciones del tipo $\mathbb{E}[g(X_\tau) \mid X_0 = x]$
  τ ∈ un tiempo de paro
  X ∈ un m.B.

¿Cuales son las propiedades de la solución f?

Como ver suavidad de orden alto para f?

Variación cuadrática.

Para un intervalo $[0,t]$, $t>0$, consideramos una partición $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$.

Definimos

$$\langle B\rangle_t := \langle B,B\rangle_t := \lim \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i}-B_{t_{i-1}}|^2$$

cuando la partición se hace "muy fina"

$$\Leftrightarrow \quad \max_i |t_{i+1}-t_i| \to 0$$

(siempre y cuando dicho límite existe).

Comentario importante:

Estamos considerando "propiedades de la trayectoria" (i.e. del mapeo $t \longmapsto B_t$)

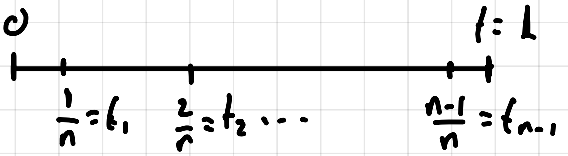
Nota: la trayectoria de B es "especial".

Consideremos el mapeo:

$$t \longmapsto t =: \varphi(t)$$

$$t \longmapsto t^3 =: \psi(t)$$

Lo "tradicional" en cálculo I es



$t_0 = 0$

Variación cuadrática de φ:

por definición:

Variación cuadrática de la función φ $= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|^2$

2 "pedazos del cuad"

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|t_i - t_{i-1}|}_{\text{telescópico}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{pequeño}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(t_n - t_0) = 0$$

Variación cuadrática de la función ψ $= \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})|^2$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |t_i^3 - t_{i-1}^3|^2$$

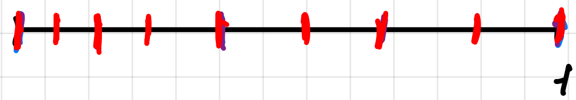
un punto entre $[t_{i-1}, t_i]$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^2 \underbrace{\psi'(\xi_i)^2}_{|\cdot|^2 \le 3^2}$$

$$\le 9 \limsup_{n} \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^2 \le 9 \limsup_{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|t_i - t_{i-1}|}_{\text{telescópico}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{pequeño}}$$

Teorema: Si $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ es una partición de $[0,t]$ cuya norma $\max\limits_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$, entonces,

si las particiones se "refinan", entonces



$$\langle B \rangle_t = \lim \sum_i |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 = t. \quad \text{con probabilidad } 1$$

Prueba:

Solo veremos que $\mathbb{E}\left[\left|\sum_i |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - t\right|^2\right] \to 0$

- Observación 1:

$$\mathbb{E}\left[\sum_i |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2\right] = \sum_i \overbrace{\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right]}^{\text{incrementos normales}}$$

$$= \sum_i |t_i - t_{i-1}| = \underbrace{t_n}_{t} - \underbrace{t_0}_{0} = t.$$

- Observacion 2:

Por obs 1,

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_i |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - t\right|^2\right] = \mathrm{Var}\left[\sum_i |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2\right]$$

$$\underset{\text{por inc. indep,}}{=} \sum_i \mathrm{Var}\left[|\underbrace{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}}_{\sim N(0,\, t_i - t_{i-1})}|^2\right] \leq \sum_i \mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4\right] = \sum_i 3\,(t_i - t_{i-1})^2$$

$$\leq \sum_i 3\,|t_i - t_{i-1}| \left(\max_i |t_i - t_{i-1}|\right) = 3\,\underbrace{(t_n - t_0)}_{=t} \cdot \left(\max_i |t_i - t_{i-1}|\right) \to 0 \quad \blacksquare$$

Sutileza: No es tan fácil probar que la suma $\sum_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ converge con probabilidad 1.

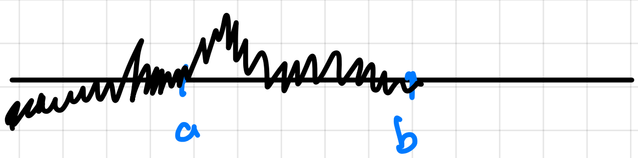
Más propiedades sobre las trayectorias de B:

Teorema:

Las trayectorias $t \longmapsto B_t$ satisfacen que con probabilidad uno,

i) Son trayectorias continuas

ii) No son monótonas en ningún intervalo:



iii) No son diferenciables en ningún punto.

iv) Tienen variación infinita:

$$\lim_{i} \sum |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| = \infty$$

v) Tienen variación cuadrática igual a t.

heurísticamente

$$|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 \approx t_i - t_{i-1} \iff |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| \approx \sqrt{t_i - t_{i-1}}$$

Comentario sobre la propiedad

iii) No son diferenciables en ningún punto.

prueba heurística:

Teorema:

Para cada $t>0$, existe $\Omega_t \in \mathcal{F}$, con $\mathbb{P}[\Omega_t]=1$, t.q. $\forall\ \omega \in \Omega_t$,

$$\frac{B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)}{h} \quad \text{no converge.}$$

cuando h tiende a cero.

Justificación: suponer $h>0$:

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} \overset{\text{ley}}{=} \frac{N(0,h)}{h} \overset{\text{ley}}{=} \frac{\sqrt{h}\, N(0,1)}{h} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{h}}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left[\left| \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \right| > K \right] = \mathbb{P}\left[|N(0,1)| > hK \right]$$

$$\rightarrow \mathbb{P}\left[|N(0,1)| > 0 \right] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|B_{t+h} - B_t|}{h} \xrightarrow{h\to 0} \infty$$

$\therefore$ B no es diferenciable en t.

Nota: se requiere más detalle para verificar que $\exists\ \Omega \in \mathcal{F}$ t.q. $\forall\ t>0$, $\forall\ \omega \in \Omega$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \quad \text{no existe.}$$

Martingalas asociadas al movimiento Browniano:

Definición:

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala si la familia de σ-álgebras

$\tilde{\mathcal{F}}_t$ = información generada por X_s, con $s\leq t$

$= \sigma(X_s ; s\leq t)$.

satisface:

$$\mathbb{E}[X_{s+t} \mid \tilde{\mathcal{F}}_t] = X_t \qquad \text{c.s.}$$

$\uparrow$

una variable aleatoria

=: el valor esperado de X_{s+t}, condicional

a toda la información disponible en $\mathcal{F}_t$

= " " " generada por X_s, $s\leq t$.

En otras parabras: si X_t = resultado de una "apuesta" al tiempo t.

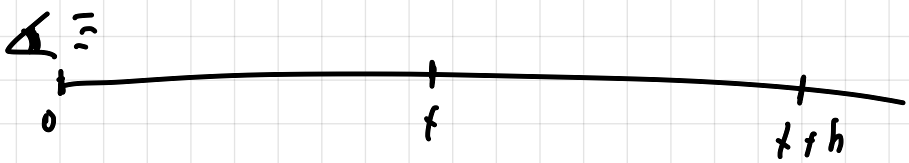
$$\mathbb{E}[X_{t+h} \mid \mathcal{F}_t] = X_t$$

Mi saldo esperado al tiempo $t+h$, condicional a que conozco los resultados de las apuestas hasta el timpo t

la apuesta va a ser justa

Saldo al tiempo t.

(Piensen en $t \in \mathbb{N}$, y X_t = caminata aleatoria simple



Comercial:

Teorema:

- $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala respecto a $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s ; s \leq t)$
- $\{B_t^2 - t\}_{t \geq 0}$ es una martingala respecto a $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s ; s \leq t)$
- $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\left\{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}\right\}_{t \geq 0}$ es una martingala: respecto a $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s ; s \leq t)$

Nota:

Es distinto decir

$\forall\ t \geq 0 \quad X_t$ cumple la propiedad "P" c.s.

$$\not\Updownarrow$$

Casi seguramente, $\forall\ t \geq 0$, X_t cumple la propiedad "P".

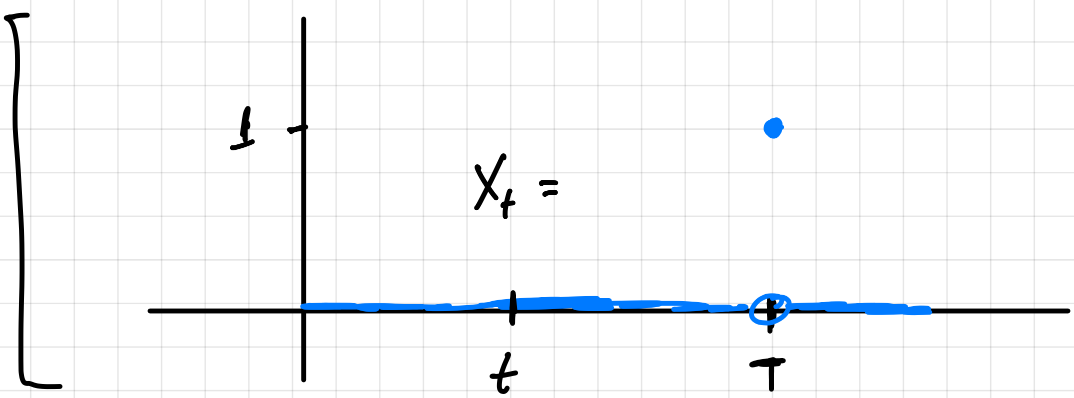
Ejemplo:

$T \sim \exp(1)$.

Definir

$$X_t := \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq T \\ 1 & \text{si } t = T \end{cases}$$

Trayectorias de $\{X_t\}_{t \geq 0}$:



X es continua en ?

$\downarrow$

Claim:

- $\forall\ t > 0$, $X_t = 0$ c.s. y $\lim_{h \to 0} X_{t+h} = X_t = 0$
- c.s. las trayectorias de X son discontinuas.

Definición general de martingala aplicada al movimiento Browniano

Sea $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s ; s \leq t)$ ← $B = \{B_s\}_{s \geq 0}$ ← es un mov Browniano

Decimos que un proceso $X = \{X_s\}_{s \geq 0}$ es una martingala si:

i) $\forall \; s > 0 \quad \mathbb{E}[|X_s|] < \infty$

ii) $\mathbb{E}[X_{s+h} \mid \mathcal{F}_s] = X_s$

"Saldo esperado" de una apuesta en $s+h$

Saldo en s.

Observación:

Contras

- En principio hay mejores maneras de determinar si un juego de apuestas es justo.

Pros

- La definición es muy flexible.

Teorema:

Sea $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s \; s \leq t)$. Entonces, los siguientes procesos son martingalas respecto a $\mathcal{F}$:

i) $X_s = B_s$

ii) $X_s = B_s^2 - s$

iii) $\exp\{\lambda B_s - \frac{s\lambda^2}{2}\}$

Parametrizados por $s \geq 0$.

prueba: Tarea.

prueba de ii)

Ver que $X_s = B_s^2 - s$ es martingala.

Primero: vemos que $\forall s \geq 0$ $X_s = B_s^2 - s$ es integrable (si, de hecho, $\mathbb{E}[B_s^2] = s < \infty$).

Para ver la propiedad de martingala:

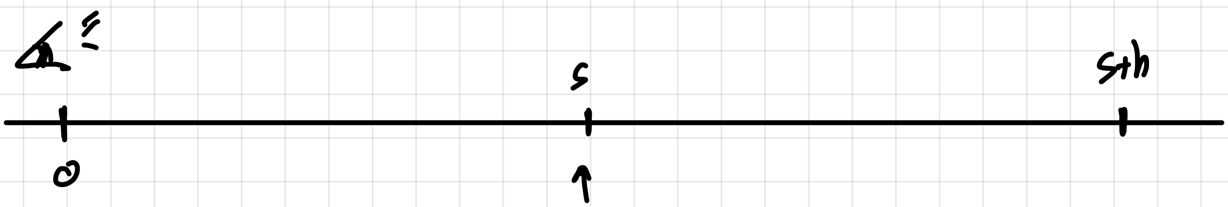
$$\mathbb{E}[X_{s+h} \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_{s+h}^2 - (s+h) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[(B_{s+h} - B_s + B_s)^2 - (s+h) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[(B_{s+h} - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + 2\,\mathbb{E}[(B_{s+h} - B_s) B_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] - (s+h)$$

Recordemos que B tiene incrementos indep.

$\Rightarrow$ $B_{s+h} - B_s$ es indep. de $\mathcal{F}_s = \{B_u ; u \leq s\}$



¿Qué pasaría en el tiempo s?

Si conocemos toda la info de $\mathcal{F}_s$, entonces conocemos a B_s, por lo que vemos a B_s como una constante, condicionando por $\mathcal{F}_s$.

Se sigue que

$$\mathbb{E}[X_{s+h} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[(B_{s+h}-B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + 2\,\mathbb{E}[(B_{s+h}-B_s)B_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] - (s+h)$$

$$= \mathbb{E}[(B_{s+h}-B_s)^2] + 2\,\mathbb{E}[\cancel{(B_{s+h}-B_s)}]^{0} B_s + B_s^2 - (s+h)$$

$$= h + B_s^2 - (s+h) = B_s^2 - s = X_s$$ ← propiedad de martingala

Procedimiento similar para las otras 2 martingalas.

Tiempos de paro:

Definición:

Como antes, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s ; s \leq t\}$. Decimos que un tiempo aleatorio $T \geq 0$ es un **tiempo de paro** (respecto a $\mathcal{F}_t$). si

"Decidir si $T \leq t$ se puede determinar con la información disponible hasta t"

$\updownarrow$

"Decidir si $T \leq t$ se puede determinar sin mirar al futuro".

$\updownarrow$ Formalmente

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Ejemplos:

- Si T es determinista: $\leftarrow$ T es tiempo de paro.

- Si $T = \inf_{s \geq 0} \{ B_s = 1 \}$. $\leftarrow$ ¿T es tiempo de paro?

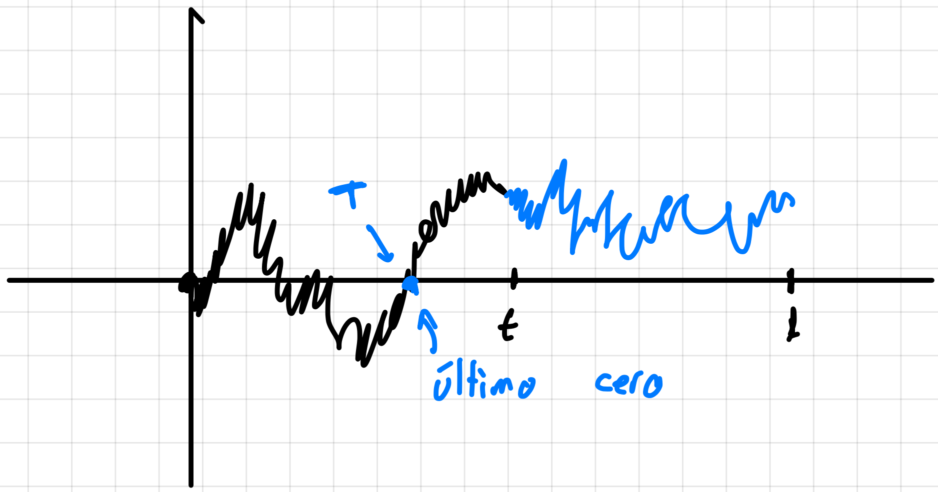
determinar si $\{T \leq t\} = \{$la llegada a 1 ocurre antes de $t\}$

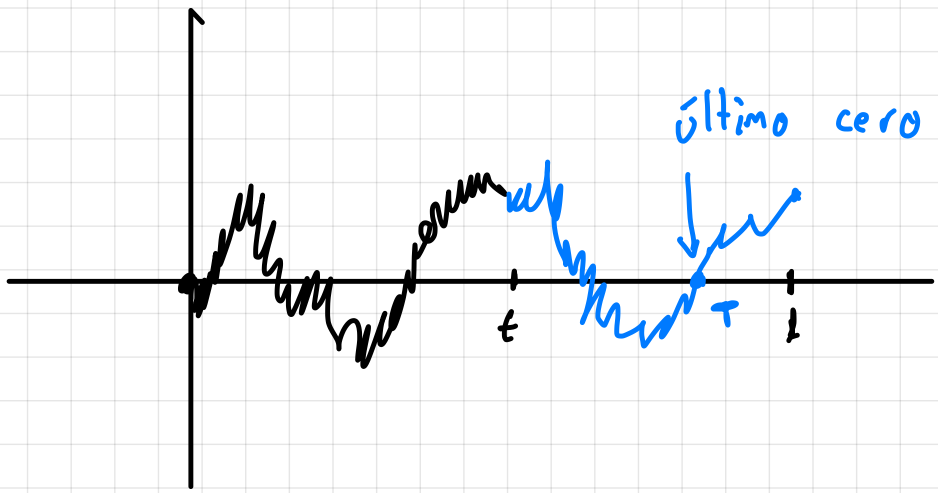
¿Se puede determinar con info disponible hasta t.? ✓ si

Formalmente: $\{T \leq t\} = \{B_s = 1 \text{ p.a. } s \leq t\} \in \mathcal{F}_s$.

• Si $T=$ último cero de B en $[0,1]$:

¿Podemos determinar $\{T\leq t\}$ con la info disponible en $[0,t]$?





Nota: Para determinar $\{T\leq t\}$ necesito información de B_s, con $s\in(t,1]$.

$\Rightarrow \{T\leq t\}\notin \tilde{\mathcal{F}}_t$.

Teorema: (Propiedad fuerte de Markov).

Misma notación que antes: . $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\{B_s ; s \leq t\}$

. $T \leftarrow$ tiempo de paro.

Entonces, si definimos

$\tilde{\mathcal{F}}_T$ = los eventos "A" en $\tilde{\mathcal{F}}$ que satisfacen $A \cap \{T \leq s\} \in \tilde{\mathcal{F}}_s$

$\uparrow$ interpretar como "condicionar sobre $T \leq s$"

"heurísticamente" = la información generada por $\tilde{\mathcal{F}}_t$, cuando pensamos que $t = T$

Entonces,

$$\mathbb{P}[B_{T+t} \leq y \mid \tilde{\mathcal{F}}_T] = \mathbb{P}[B_{T+s} \leq y \mid B_T] \leftarrow \text{Propiedad fuerte de Markov.}$$

$\uparrow$ "el pasado" $\leftrightarrow$ info en $[0, T]$

Corolario:

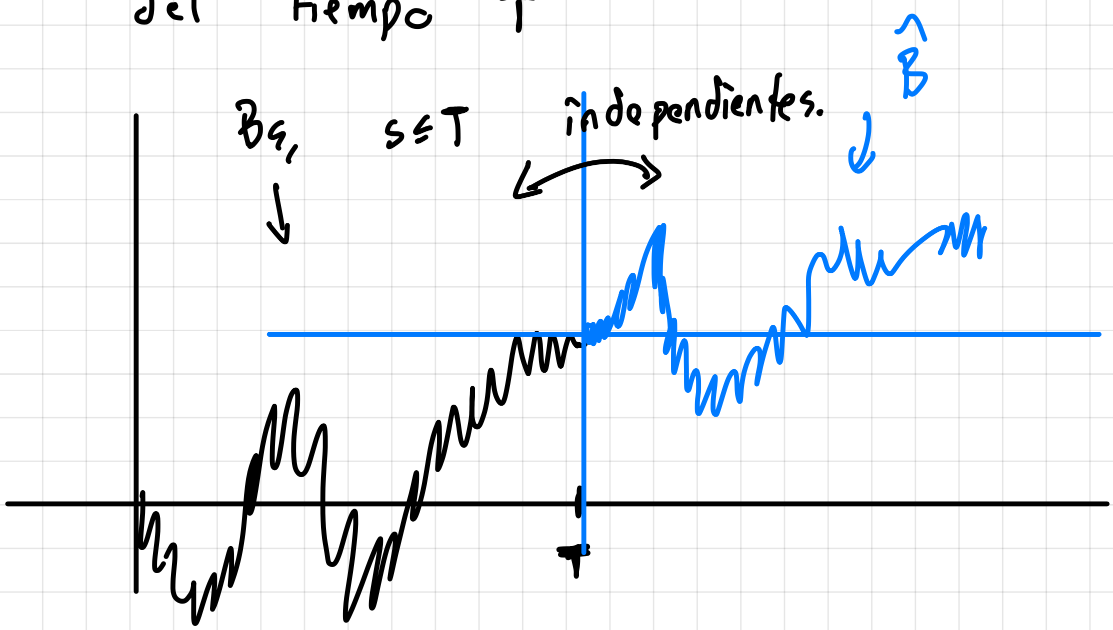
Si $T \geq 0$ es un tiempo de paro finito casi seguramente, entonces el proceso

$\hat{B}_s := B_{T+s} - B_T$ • es un movimiento Browniano

• $\{\hat{B}_s\}_{s \geq 0}$ es independiente de $\tilde{\mathcal{F}}_T$.

Moraleja:

$\mathcal{F}_T$ = información disponible ($\tilde{\mathcal{F}}_t$ cuand $t = T$) antes del tiempo T



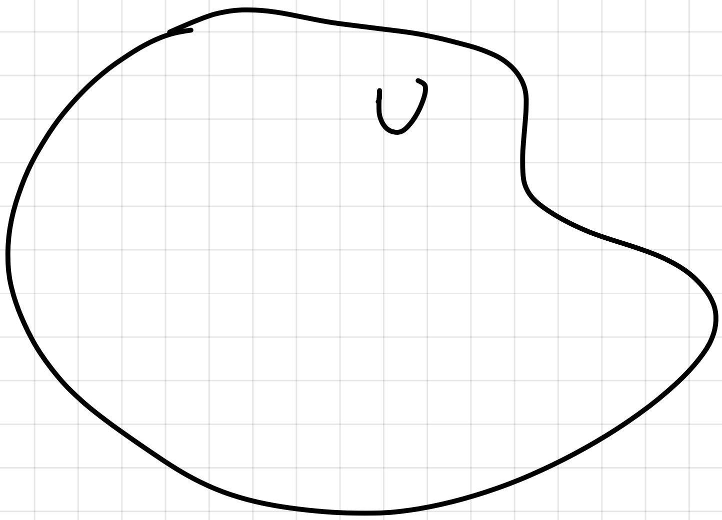
Temario resumido de calculo estocástico:

- Probar lo que no probé en modelos sobre MB.
- Construcción de $\int_0^t X_s \, dB_s$

en principio es complicado.

- Teoremas de caracterización de martingalas.
  (teorema de Levy, tma de Dubins-Scwartz).
- Generalización estocástica de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dX}{dt} = f(X_s) + \boxed{\text{ruido}}$$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Delta f = 0$ ⊕

f en ∂U dada

la solución ⊕ se puede expresar en términos de

$$\mathbb{E}[f(B_T) \mid X_0 = x]$$

$T \leftarrow$ tiempo de llegada a la frontera ∂U

En la ayudantía:

$$M_t = \max_{0\le s\le t} B_s \qquad y \qquad m(t) = \min_{0\le s\le t} B_s.$$

Supondremos que B comienza en cero,

Teorema:

$$\mathbb{P}[M(t) \geq x] = 2\,\mathbb{P}[B(t) \geq x].$$

prueba:

vista en la ayudantía

Nota: hacer una comparación con caminatas aleatorias simples.

Aplicaciones:

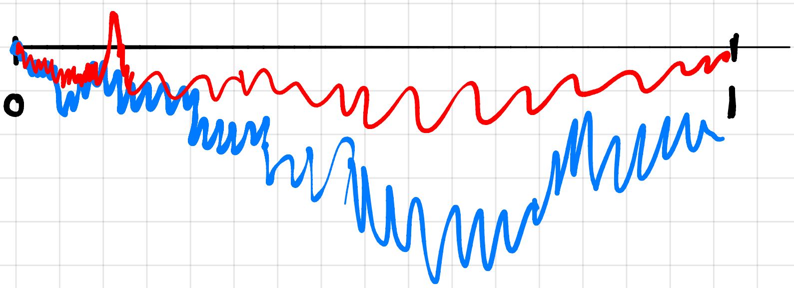
$$\mathbb{P}[B(t)\leq 0 \ \ \forall \ t\in[0,1]] = \mathbb{P}\Big[\max_{0\le t\le 1} B_t \leq 0\Big]$$

resultado con Jesús

$$= 1 - \mathbb{P}[M_1 > 0] \overset{\downarrow}{=} 1 - 2\,\mathbb{P}[B_1 > 0]$$

$$= 1 - 2\,\mathbb{P}[N(0,1) > 0]$$

$$= 1 - 2\cdot\tfrac{1}{2} = 0$$



Por lo tanto,

$$\mathbb{P}[B_s \leq 0 \ \ \forall \ \ 0\le s\le 1] = 0$$

Justificación heurística de Imanol:

B no puede ser monótona en ningún intervalo.

$\mathbb{P}[B_s \leq 0 \quad \forall \quad 0 \leq s \leq 1] = 0$ $\circledast$

Recordar la autosimilitud de B:

Si $\hat{B}_t := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{\varepsilon t}$, para $\varepsilon > 0$ entonces

$\{\hat{B}_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano

Por $\circledast$, esto implica.

$\mathbb{P}[\hat{B}_s \leq 0 \quad \forall \quad 0 \leq s \leq 1] = 0$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{\varepsilon t} \leq 0 \ \forall \ 0 \leq s \leq 1] = 0$

$\mathbb{P}[B_{\varepsilon t} \leq 0 \ \forall \ 0 \leq s \leq 1] = 0$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}[B_{\tilde{s}} \leq 0 \ \forall \ 0 \leq \tilde{s} \leq \varepsilon] = 0 \leftarrow$ Comentario de Rodolfo.

Analogamente, se puede probar que

$\mathbb{P}[B_s \geq 0 \ \forall \ 0 \leq s \leq \varepsilon] = 0$

Consecuencia:

El Browniano siempre toma valores tanto positivos como negativos en cualquier intervalo $[0, \varepsilon)$, $\forall \ \varepsilon > 0$.

Tarea: probar que B pasó infinitas veces por cero en $]0,\varepsilon]$

Comentario de Rodolfo: (se verá más adelante)

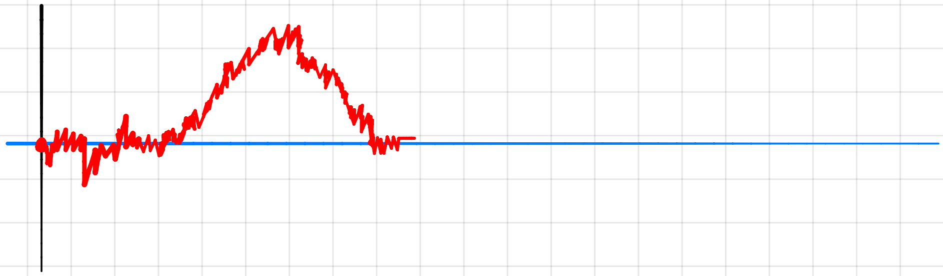
$$\mathbb{P}_0[B_s \geq 0 \text{ en } [a,b]] = ?$$

$\updownarrow$ relacionado: tarea para Arturo: ver como se relacionan

$$\mathbb{P}[B_s \neq 0 \ \forall\ s \in [a,b]] = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

De vuelta a nuestra discusión:

Tarea: probar que B pasó infinitas veces por cero en $]0,\varepsilon]$



Con Jesús: Si $T_x = \inf\{t \geq 0;\ B_t = x\}$,

entonces $\mathbb{P}[T_x < \infty] = 1$.

Teorema:

T_x es una v.a. con densidad. dada por

$$f_{T_x}(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \qquad \text{para} \quad t \geq 0$$

$$f_{T_x}(t) = 0 \qquad \text{para} \quad t \leq 0$$

prueba: (hint: usar propiedades del máximo).

suponer que $x > 0$:

$$\mathbb{P}[T_x \leq t] = \mathbb{P}[\overbrace{\sup_{s \leq t} B_s}^{M_t} \geq x]$$

resultado de la ayudantía

$$= 2\,\mathbb{P}[\underbrace{B_t}_{\sim N(0,t)} \geq x] = 2\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}}\, du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2t}}\, du \qquad v = \frac{u}{\sqrt{t}}$$

$$dv = \frac{1}{\sqrt{t}}\, du$$

$$\mathbb{P}[T_x \leq t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$$

Tomo derivada,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}[T_x \leq t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(- e^{-\frac{v^2}{2}} \Big|_{v=\frac{x}{\sqrt{t}}}\right) \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2t}}\right)\left(x\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-3/2}\right) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Falta probar el caso $x<0$, pero es análogo, sólo cambian los roles de B y $-B$

Nota:

$$\mathbb{E}_0[T_x] = \int_0^\infty t \cdot f_{T_x}(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \cdot t \cdot t^{-\frac{3}{2}}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

Comportamiento de

$\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$ cuando t es grande:

$\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \approx \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$ $\leftarrow$ no es integrable en $[0,\infty)$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}_0[T_x] = \int_0^\infty t\, f_{T_x}(t)\,dt = \infty.$$

Conclusión:

- $\mathbb{P}_0[T_x < \infty] = 1$
- $\mathbb{E}_0[T_x] = \infty$