Modelos Estocásticos II - Tarea 1

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1

Sea Q la Q-matriz asociada con una cadena de Markov con espacio de estados finito E, de acuerdo a la definición vista en clase. Muestra que Q satisface las condiciones

(i) $0 \leq -Q_{i,i} < \infty$ para todo $i \in E$.
(ii) $Q_{i,j} \geq 0$ para todo $i \neq j$, con $i, j \in E$.
(iii) $\sum_{j \in E} Q_{i,j} = 0$ para todo $i \in E$.

El objetivo de la segunda parte de éste ejercicio es el de mostrar que dichas 3 propiedades inducen naturalmente una familia de matrices que satisfacen propiedades análogas a las matrices de transición de una cadena de Markov. Supongamos que $Q \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|}$ es una matriz que satisface las propiedades (i) $0 \leq -Q_{i,i} < \infty$ para todo $i \in E$, (ii) $Q_{i,j} \geq 0$ para todo $i \neq j$, con $i, j \in E$ y (iii) $\sum_{j \in E} Q_{i,j} = 0$ para todo $i \in E$ (¡Observar que no estamos suponiendo que Q surgió a partir de una cadena de Markov!). Supongamos que $\{P(t) \in \mathbb{R}^{|E| \times |E|} \ ; \ t \geq 0\}$ está dada por

$$P(t) := \exp\{tQ\} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tQ)^k}{k!},$$

donde la justificación de la convergencia de la serie se toma con respecto a la norma de matrices $\|A\| := \max_{i,j \in E} |A_{i,j}|$ para A de la forma $A = [A_{i,j} \ ; \ i, j \in E]$. No es necesario que justifiques la convergencia de dicha serie, pero si tienes curiosidad, puedes consultar el apéndice del libro de Norris de Cadenas de Markov. Muestra que

- Al igual que las matrices de transición de una cadena de Markov, para toda $t \geq 0$, $P(t)$ es una matriz estocástica; es decir, para todo $i \in E$,

$$\sum_{j \in E} P_{i,j}(t) = 1.$$

- Las matrices $P(t)$, análogamente a las matrices de transición de una cadena de Markov, satisfacen

$$\left(\frac{d}{dt} P(t)\right)\bigg|_{t=0} = Q.$$

Nota: por simplicidad, puedes usar el hecho de que

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tQ)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{(tQ)^k}{k!}.$$

Ejercicio 2

El objetivo de éste ejercicio es estudiar la no-explosividad de una cadena de saltos pura. Sean $S_1, S_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias con distribución exponencial, tales que S_k tiene parámtro λ_k, para $k \in E$ (es decir, $\mathbb{E}[S_k] = \frac{1}{\lambda_k}$). Es conveniente pensar en S_k como el tiempo entre saltos de una cadena de Markov, es decir $S_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ (sin embargo, ello no es fundamental para resolver el problema). Muestra lo siguiente

- Si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$, entonces $\mathbb{P}[\sum_{k=1}^{\infty} S_k < \infty] = 1$ (pensar que en el contexto de cadenas de Markov, ello implica la explosión de la cadena). *Hint: verificar que la esperanza es finita.*
- Si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$, entonces $\mathbb{P}[\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \infty] = 1$ (pensar que en el contexto de cadenas de Markov, ello implica la no-explosión de la cadena). *Hint: mostrar que* $E[\exp\{-\sum_{k=1}^{\infty} S_k\}] = 0$.

Ejercicio 3

Éste ejercicio complementa lo visto en clase referente al proceso de Yul de parámetro $\lambda > 0$. En lo sucesivo, $E = \mathbb{N}_+ := \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

(i) Usa el ejercicio anterior para probar que el proceso de Yule, como se introdujo en clase, es no explosivo.

(ii) Determina (y simplifica) la ecuación forward para $\mathbb{P}(t)$.

(iii) Usando el inciso anterior, así como el hecho de que $\mathbb{P}_{x,y}(0) = \delta_{x,y}$ para $x, y \in E$, demuestra que

$$\mathbb{P}_{x,x}(t) = e^{-\lambda x t}, \quad t \geq 0.$$

(iv) Implementa la ecuación forward obtenida en el inciso (ii), y la fórmula explícita para $\mathbb{P}_{x,x}(t)$ obtenida el inciso (iii), para obtener una ecuación diferencial para $\mathbb{P}_{x,x+1}(t)$. Luego resuelve dicha ecuación para deducir que

$$\mathbb{P}_{x,x+1}(t) = xe^{-\lambda x t}(1 - e^{-\lambda t}), \quad t \geq 0$$

(v) Usando un argumento inductivo, deduce que

$$\mathbb{P}_{x,y}(t) = \binom{y-1}{x-1} e^{-\lambda x t}(1 - e^{-\lambda t})^{y-x},$$

para todo $y \geq x$.