Modelos Estocásticos II - Tarea 2

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1

Supongamos que X es una cadena de Markov de saltos puros en un espacio de estados finito, y sea Q su Q-matriz asociada. Recordemos que la ecuación forward de Kolmogorov nos dice que $\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(t)Q$ con condición inicial $\mathbb{P}_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$. De resultados de álgebra lineal, se sabe que dicha ecuación diferencial tiene por solución

$$\mathbb{P}_{i,j}(t) := \exp\{Qt\} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tQ)^k}{k!}. \tag{0.1}$$

Nota: no es necesario que pruebes dicha aseveración. Como consecuencia, cuando el espacio de estados de X es finito, las probabilidades de transición $\mathbb{P}_{i,j}(t)$ pueden calcularse mediante la fórmula (0.1). El presente ejercicio tiene como objetivo aplicar dicha perspectiva para calcular probabilidades de transición.

Supongamos que

$$Q := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) Diagonaliza la matriz Q, es decir, encuentra matrices P y D tales que $Q = PDP^{-1}$. Puedes ayudarte de un software para encontrar dicha descomposición, o hacer el cálculo a mano; como tú prefieras.

(ii) Usando (0.1), así como el inciso (i), calcula la matriz $\mathbb{P}(t)$.

Ejercicio 2

El presente ejercicio tiene como objetivo repasar lo visto el semestre pasado en lo referente a procesos Poisson. Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Apelando al conocimiento obtenido por ustedes previamente, asumiremos (sin demostrar) que $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Markov. Si tienen dudas sobre cómo probar esto, les sugiero ver el video de la clase referente al proceso de Yule; la prueba de la propiedad de Markov para X es completamente análoga.

(i) ¿Cuál es la Q-matriz asociada a X?

(ii) Suponga que los autobuses ruta "Valenciana" pasan por la parada de la facultad de Filosofía y letras de acuerdo a un proceso Poisson de parámetro λ_1, mientras que los autobuses "Cristo Rey" pasan de acuerdo a un proceso Poisson independiente de parámetro λ_2. He observado que el tiempo promedio entre autobuses ruta "Valenciana" es de 25 minutos, mientras que el promedio entre autobuses ruta "Cristo Rey" es de 50 minutos. Basado en lo anterior, responda las siguientes preguntas

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen exactamente 3 autobuses por la parada en una hora?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen exactamente 3 autobuses ruta Valenciana mientras espero el autobús de Cristo Rey?

(iii) Suponga que el número de goles anotados por el equipo de Toluca en un partido de futbol sigue un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$, donde $\frac{1}{\lambda}$ representa el tiempo promedio entre goles, medido en minutos. Cada que Toluca anota, mi esposa vitorea "¡goool!" desde la sala. Yo me encuentro en una mesa en el jardin, y solo escucho cada vitoreo de manera independiente con probabilidad $p \in (0,1)$. ¿Cual es la distribución del número de vitoreos que escucho durante un partido del Toluca de 90 minutos?

Ejercicio 3

Una rana salta sobre 4 hojas de lirio (que denotaremos por H_1, H_2, H_3, H_4) de acuerdo a una cadena de Markov de saltos puros. Quiero tomarle una foto parada sobre la hoja H_2 (que es de color rojo). Sé que la hoja H_4 es muy frágil para soportar el peso de la rana y esta se hundiría si salta ahí (supondremos por practicidad que H_4 es un estado absorbente). Supongamos que la Q-matriz de los saltos de la rana está dada por

$$Q = \begin{array}{c} \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si la rana está inicialmente parada en la hoja H_1,

(i) Calcula la matriz de saltos Π asociada al modelo.

(ii) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga oportunidad de tomar la foto?

(iii) ¿Cuál es el tiempo promedio que veré saltar a la rana antes de que se hunda?