Modelos Estocásticos II - Tarea 2

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1
Mediante el uso de técnicas de cadenas de Markov, modele, en formato libre, la disponibilidad de camiones repartidores para el problema descrito en la clase del 3 de Febrero. Escoge los parámetros de acuerdo a la información recabada en la entrevista. Si necesitas datos adicionales para tu modelo, solicítalos en el archivo de drive

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1P6vMsaxzXFg4LT2lgKcgn7yeCXDZ-rcc0P8wBlozHKc/edit#gid=0.

Procediendo como en el Ejercicio 1 de la Tarea 2 (es decir, mediante el uso de la exponencial de las dilataciones de la Q-matriz asociada a la cadena), usa R para calcular numéricamente la distribución del número de autobuses disponibles. Encuentra explícitamente un vector invariante para Q y de ser posible, escógelo de manera que sus entradas formen una distribución de probabilidad (de manera que dicho vector sea realmente una distribución invariante). Compara las entradas de dicho vector con los cálculos numéricos que realizaste previamente y saca conclusiones.

Ejercicio 2
Clientes llegan a una fila de espera con un sólo servidor de acuerdo a un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$. El servidor puede estar en dos posibles estados: $A =$"en funcionamiento" y $B =$"ocupado". El servidor fluctúa entre los estados A y B de acuerdo a una cadena de Markov a tiempo continuo con Q matriz

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

El tiempo total de servicio para cada cliente es independiente del tiempo de los demás clientes e independiente de la cadena asociada a la disponibilidad del servidor, y tiene distribución exponencial de parámetro $\mu > 0$. Describe el sistema como una cadena de Markov X con espacio de estados

$$\{A_0, A_1, \dots\} \cup \{B_0, B_1, \dots\},$$

donde A_n significa que el servido está en el estado A y que hay n personas en la cola y B_n significa que el servidor está en el estado B y hay n personas en la cola.

Explica por qué, para algún θ en $(0, 1]$ y $k = 0, 1, 2, \dots,$

$$\mathbb{P}[X \text{ llega a } \ A_0 \mid X_0 = A_k] = \theta^k.$$

Puedes usar, sin demostración, el hecho de que X satisface la propiedad de Markov fuerte. Dicho resultado puede encontrarse enunciado al final de la tarea. También puedes usar el hecho de que, debido al hecho de que el tiempo de espera de los tiempos de atención de los clientes $k, k+1\dots$ son variables i.i.d. iguales en ley a la de los clientes $1, 2, 3, \dots,$ entonces $\mathbb{P}[X \text{ llega a } \ A_{k-1} \mid X_0 = A_k] = \mathbb{P}[X \text{ llega a } \ A_{k-2} \mid X_0 = A_{k-1}]$.

Muestra que $(\theta - 1)f(\theta) = 0$, donde

$$f(\theta) = \lambda^2\theta^2 - \lambda(\lambda + \mu + \alpha + \beta)\theta + (\lambda + \beta)\mu.$$

Hint: muestra que $\mathbb{P}[X \text{ toca a } A_k \mid X_0 = B_{k+1}] = \frac{\beta\theta}{\lambda+\beta-\lambda\theta}$. Para ello muestra que si E_m es el evento en el que exactamente m clientes llegan mientras el servidor está ocupado, entonces

$$\mathbb{P}_{B_{k+1}}[X \text{ llega a } A_k] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_{B_{k+1}}[X \text{ llega a } A_k, E_m].$$

Las probabilidades de la derecha se pueden calcular y la suma debe darte una serie geoméetrica. Haciendo análisis del primer paso puedes llegar a la ecuación deseada para θ.

El análisis del primer paso que realizaste te da una pieza de información adicional: sabes que la probabilidad buscada debe ser la solución **mínima**. Por ende, si la función f tiene una raíz en $(0, 1)$, dicha solución sería menor a la solución trivial $\theta = 1$ a la ecuación $(\theta - 1)f(\theta) = 0$. Mediante un argumento del teorema del valor intermedio, prueba que X es transitorio si $\mu\beta < \lambda(\alpha + \beta)$.

Puedes utilizar, sin demostración el siguiente resultado, que es un caso particular de Teorema 2.8.1. en el libro de Norris.

Theorem 0.1 (Propiedad de Markov fuerte (versión simplificada))**.** *Sea X la cadena de Markov de saltos puros del Ejercicio 2 (recordar que Q denota la Q-matriz asociada). Sea $T > 0$ el tiempo de llegada a un subconjunto del espacio de estados $A \subset E$. Entonces, condicional a $T < \infty$ y $X_T = i$, el proceso $\{X_{T+t}\}_{t\geq 0}$ es una cadena de Markov que inicia en i, con Q-matriz Q, independiente de $\{X_s\}_{s\leq T}$.*