Modelos Estocásticos II - Tarea 4

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1

Imaginemos a un banco con un solo cajero. Supongamos que los clientes llegan a formarse a la cola para esperar a ser atendidos según un proceso Poisson de parámetro λ, y los tiempos de servicio son independientes y siguen una ley exponencial de parámetro μ. Sea X_t el número de clientes en el banco al tiempo t. Este es un proceso de Markov de saltos puro (puedes suponer cierta dicha afirmación).

- Determinar el generador Q de $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$.
- Obtener un vector invariante para Q.
- ¿Cuál es la condición necesario y suficiente para que el vector invariante obtenido sea un vector de probabilidad?
- Verificar que si $\lambda < \mu$, entonces el vector

$$\pi_x = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x$$

es un vector de probabilidad invariante para Q.

Ejercicio 2

En el contexto del inciso anterior, supongamos que por razones de seguridad en la sala de espera del banco solo puede haber N clientes, incluyendo a aquel que está en la ventanilla. Si llega un cliente este podrá entrar al banco si hay menos de N clientes en la sala de espera, incluyendo al que esta siendo atendido y partirá y no regresará si hay N clientes en la sala de espera, incluyendo al que está siendo atendido.

- Responder a las dos primeras preguntas del ejercicio anterior.
- En el caso en que $\lambda \neq \mu$, obtener un vector de probabilidad invariante para Q.

Ejercicio 3

Suponga que inmigrantes llegan según un proceso Poisson de parámetro ν y que cada individuo inicia una población que evoluciona independientemente de los demás de acuerdo a la siguiente dinámica: vive un tiempo exponencial de parámetro λ, al final del cual muere y es remplazado por dos individuos nuevos idénticos entre si e idénticos a los demás individuos de la población; es decir, la población de cada inmigrante se comporta como un proceso de Yule con tasas lineales. Suponga que desastres aniquilan totalmente a la población, que estos ocurren a los instantes de un proceso de Poisson de parámetro $\delta > 0$, y que los desastres son independientes de la evolución de la población. Sea $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ el tamaño de la población al tiempo t. Determine el generador infinitesimal asociado a este proceso. Suponga que la población inicial es $Y_0 = 0$. Demuestre la siguiente igualdad:

$$\mathbb{E}[Y_t] = \frac{\nu\delta}{\lambda}\int_0^t e^{-\delta x}(e^{\lambda x} - 1)dx + \frac{\nu}{\lambda}e^{-\delta t}(e^{\lambda t} - 1)$$

Nota: Se podrá suponer que al tiempo t el tamaño promedio de una población que inicia con un individuo que sigue un proceso de Yule de tasa λ es $e^{\lambda t}$

Hints:
Definamos L mediante la fórmula

$$L := \begin{cases} t & \text{si} \quad \text{No hay catástrofes} \\ \text{Tiempo desde la última catástrofe} & \text{si} \quad \text{Hay al menos una catástrofe} \end{cases}$$

Prueba que la ley de L está dada por $\mathbb{P}[L = t] = e^{-\delta t}$, mientras que $\mathbb{P}[L \in A] = \int_A \delta e^{-\delta y} dy$, para $A \subset [0, t]$. Para probar esta última igualdad nota que si $x \leq t$, entonces

$$\{L > x\} = \{\text{No hay eventos en } [t - x, t]\}.$$

Después de ello, condiciona sobre el valor de L. Nota que si $u \in (0, t)$, entonces condicional a $L = u$, la variable Y_t, se comporta como un modelo libre de catástrofes que comienza con cero individuos y evoluciona hasta el tiempo remanente a la catástrofe u. En otras palabras: el proceso Y_t condicionado a $L = u$ es igual en ley a

$$\sum_{k=0}^{N_u} Z_k(u - \tau_k),$$

donde los $Z_k(\cdot)$ son procesos de Yule independientes con intensidad λ.

Para calcular expresiones del tipo

$$\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{N_u} Z_k(u - \tau_k)], \tag{0.1}$$

condiciona sobre el valor de N_u y nota que si $N_u = \ell$, entonces los tiempos de ocurrencia $\tau_1, \ldots, \tau_\ell$ están distribuidos como variables uniformes sobre $[0, u]$, independientes y ordenadas (es decir, como los estadísticos de orden). Luego, usando el hecho de que la suma (0.1) es simétrica sobre las variables τ_k, entonces argumenta que las variables τ_k pueden ser reemplazadas por variables independientes y uniformes. El resultado debe ser entonces obtenido mediante calculos elementales.