# Modelos Estocásticos II - Tarea 5

Arturo Jaramillo Gil

A lo largo de esta tarea, $B = \{B_t \mid t \geq 0\}$ denotará a un movimiento Browniano estándar que empieza en cero.

**Ejercicio 1**
Da un ejemplo de dos variables aleatorias $X, Y$ idénticamente distribuídas, con distribución gaussiana estándar tales que el vector $(X, Y)$ no es un vector Gaussiano. Prueba que, por otro lado, si imponemos la condición $X$ independiente de $Y$, entonces si podemos garantizar que el vector $(X, Y)$ es un vector Gaussiano.

**Ejercicio 2**
Sean $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ números reales positivos. Determina la matriz de covarianzas del vector $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$.

**Ejercicio 3**
Determina la ley de a variable aleatoria $\int_a^b g(B_s)ds$, donde $a < b$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función lineal.

**Ejercicio 4**
Prueba que los procesos estocásticos $X_s := B_s$, $Y_s := B_s^2 - s$ y $Z_s := \exp\{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s\}$ son martingalas con respecto a la filtración $\mathcal{F}_s := \sigma(B_u \ ; \ u \leq s)$ asociada a $B$.

**Ejercicio 5**
Prueba que el tempo aleatorio $T := \inf\{s > 0 \ ; \ B_s = a\}$, con $a \in \mathbb{R}$, es un tiempo de paro.