Ayudantía 13/09/224

Ejercicio 1. Consideremos a la caminata aleatoria S_n simple (es decir, da un paso a -1 con probabilidad q o un paso a 1 con probabilidad p) y definamos los procesos

$$X_n = S_{2n}, \quad Y_n = S_{2n+1}, \quad Z_n = e^{S_n}, \quad n \geq 0.$$

i) Muestre que cada uno de estos procesos son cadenas de Markov e identifique sus espacios de estados.

ii) Calcule sus probabilidades de transición.

Ejercicio 2. Sea $\xi_0, \xi_1, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Bernoulli de parámetro p. Determina si el proceso $\{X_n : n \geq 1\}$ definido a continuación es una cadena de Markov. En caso afirmativo determine el espacio de estados y la matriz de trancisión

1. $X_n = \xi_n + \xi_{n-1}$
2. $X_n = X_{n-1} + \xi_n$

Ejercicio 3. Se lanza un dado equilibrado repetidas veces. Sea X_n el número de lanzamientos realizados al tiempo n desde la última vez que apareció un 6. Demuestre que $\{X_n : n \geq 1\}$ es una cadena de Markov y encuentre las probabilidades de trancisión

Ejercicio 4. Sea $(S_n, n \geq 0)$ una caminata aleatoria simple. Definamos

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i, \quad n \geq 0.$$

Calcule $E[Z_n]$ y $\mathrm{Var}[Z_n]$, para $n \geq 1$.