

Modelos Estocásticos

Primer examen parcial.

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1

Tres personas A , B y C juegan ping pong. En cada juego, dos jugadores compiten contra el otro y el tercero observa. El ganador de la etapa n puede jugar en la etapa $n + 1$. La probabilidad de que x le gane a y en un juego dado es $s_x/(s_x + s_y)$, para $x, y \in \{A, B, C\}$, donde s_A , s_B y s_C son números positivos que modelan las fuerzas de cada jugador.

- Representa este proceso como una cadena de Markov y determina su matriz de transición.
- Si la pareja inicial es A contra B , cuál es la distribución de la cadena de Markov después de dos juegos?

Ejercicio 2

Julia tiene una moneda asimétrica que con probabilidad p cae águila. Ella lanza la moneda hasta obtener un águila y luego lanza una moneda simétrica tantas veces como lanzó la primera moneda. Por cada águila que obtiene con la moneda simétrica lanza un dado balanceado. Determine

- El valor esperado del total de puntos que obtuvo lanzando los dados.
- La esperanza condicional del total de puntos dado el número de intentos para que a la moneda asimétrica le tomó para que saliera un águila.

Ejercicio 3

Considere una cadena de Markov con matriz de transición

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine todas las clases de comunicación. Una clase se dice que es cerrada si empezando en ella, la cadena permanece en ella para todo tiempo posterior. Cuales de las clases de comunicación encontradas en el inciso anterior son cerradas?

Ejercicio 4

Un estado x es absorbente si $P_{x,y} = \delta_{x,y}$.

- Da un ejemplo de una cadena de Markov con al menos dos estados recurrentes no absorbentes.
- Da un ejemplo de una cadena de Markov con al menos dos estados transitorios x, y tales que $P_{x,x}, P_{y,y} \neq 0$.

