MODELOS ESTOCÁSTICOS
TAREA 15 NOVIEMBRE

ARTURO JARAMILLO

Simulación de una Cadena de Nacimiento y Muerte
Supongamos que una población sigue una dinámica de nacimiento y muerte, donde:

- Las tasas de **nacimiento** son $\lambda_n = 0.1/(n+1)$, con n representando el tamaño actual de la población.
- Las tasas de **muerte** son $\mu_n = 0.05/(n+1)$.

El espacio de estados es discreto y está representado por $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Si la población alcanza el estado 0, se considera extinta y el proceso termina.

a) Escriba un programa que simule esta cadena de nacimiento y muerte hasta que la población alcance el estado de extinción (0) o un tiempo máximo $T = 1000$ unidades.
b) Ejecute al menos 10 simulaciones independientes. Determine:
   - El tiempo promedio hasta la extinción.
   - Cómo varía el tiempo hasta la extinción con diferentes estados iniciales ($n = 5, 25, 50$).

Implementación del Algoritmo Metropolis-Hastings en Dimensión 2
Queremos calcular la siguiente integral en dos dimensiones:

$$I = \int_{[0,1]^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{0.001}\right) dx_1\, dx_2.$$

Esta integral es difícil de resolver numéricamente mediante cuadratura uniforme debido a que la función está altamente concentrada en torno al origen.

a) Implementa un método de cuadratura utilizando un mallado uniforme de $n \times n$ puntos sobre el cuadrado $[0, 1]^2$. Evalúa la integral con $n = 50$ y $n = 100$.
b) Usa el algoritmo de Metropolis-Hastings para generar puntos que sigan la densidad de probabilidad proporcional a $\pi(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{0.001}\right)$.
c) Compara los resultados de ambos métodos:
   - Precisión: Calcula el error absoluto respecto al valor conocido $I \approx 0.000314$.
   - Eficiencia: Compara los tiempos de cómputo necesarios para alcanzar un error razonable.
d) Formula conclusiones sobre la comparación de los métodos, justificando heurísticamente la razón por la cual consideras que estás observando los resultados obtenidos.