MODELOS ESTOCÁSTICOS
TAREA 20 SEPTIEMBRE

ARTURO JARAMILLO

(1) Un taxista presta servicio entre el aeropuerto A y dos hoteles B y C, según las siguientes reglas. Si está en el aeropuerto, se dirige a cualquiera de los dos hoteles con igual probabilidad. Si está en un hotel, regresa al aeropuerto con probabilidad $3/4$ y va al otro hotel con probabilidad $1/4$.
   (a) Obtenga la matriz de transición para la cadena.
   (b) Suponga que el taxista comienza en el aeropuerto en el instante 0. Halle la probabilidad de que se encuentre en cada una de las tres posibles ubicaciones en el instante 2 y la probabilidad de que esté en el hotel B en el instante 3.

(2) La cadena de Markov asociada a un proceso de producción se describe a continuación. El proceso de producción de las piezas se inicia en el paso 1. Al concluir el paso 1, 20 por ciento de las piezas manufacturadas deben ser reelaboradas, es decir, regresan al paso 1, 10 por ciento son desechadas y 70 por ciento continúan al paso 2. Al concluir el paso 2, 5 por ciento de las piezas deben regresar al paso 1, 10 por ciento al paso 2, 5 por ciento son desechadas y el 80 por ciento restantes pueden ser vendidas al mercado
   (a) Formule una cadena de Markov con 4 estados donde el estado 3 corresponde a las piezas desechadas y el 4 a las piezas que son vendidas.
   (b) Calcule la probabilidad de que una pieza sea desechada en el proceso.

(3) Demuestre que la propiedad de Markov no implica que para cualesquiera conjuntos A, B y C,
$$P[X_{n+1} \in C \mid X_n \in A, X_{n-1} \in B] = P[X_{n+1} \in C \mid X_n \in A].$$
Este resultado no es cierto en general si A tiene más de un elemento.

(4) Cinco bolas blancas y cinco negras se distribuyen en dos cajas de modo que cada caja contenga cinco bolas. En cada paso sacamos una bola de cada caja y las intercambiamos. Sea X_n el número de bolas blancas en la caja de la izquierda en el instante n. Obtenga la matriz de transición para X_n.

(5) Las variables aleatorias $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ son independientes y tienen función de masas de probabilidad $\mathbb{P}[\xi_k = 0] = 0.1$, $\mathbb{P}[\xi_k = 1] = 0.3$, $\mathbb{P}[\xi_k = 2] = 0.2$, $\mathbb{P}[\xi_k = 3] = 0.4$. Sea $X_0 = 0$ y $X_n := \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ la mayor observación hasta el momento n. Determina la matriz de transición para la cadena de Markov X_n