MODELOS ESTOCÁSTICOS

21 DE OCTUBRE

ARTURO JARAMILLO

Ejercicio 1

Considera un sistema de colas con capacidad infinita en el que los clientes llegan a la cola y son atendidos de uno en uno. El espacio de estados de la cadena de Markov es el número de clientes en la cola, que puede tomar cualquier valor en los enteros no negativos.

- En cada unidad de tiempo, un cliente llega con probabilidad $\lambda \in (0, 1)$, y un cliente es atendido con probabilidad $\mu \in (0, 1)$, siempre que haya clientes en la cola.
- Si la cola está vacía (0 clientes en la cola), no se puede atender a ningún cliente.

El espacio de estados de la cadena es $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Teniendo esto en consideración,

- Calcule el tiempo esperado de llegada al estado 0 (cuando la cola se vacía) comenzando desde un estado $i > 0$ (es decir, con i clientes en la cola).
- Calcule el tiempo esperado de llegada a un conjunto $A = \{0, 1\}$ (es decir, cuando la cola tiene 0 o 1 cliente).

Ejercicio 2

Imagina un sistema de almacenamiento de inventario en una tienda. El inventario de un producto puede estar en tres estados:

- Estado 0: Bajo inventario (menos de 10 unidades).
- Estado 1: Inventario medio (entre 10 y 50 unidades).
- Estado 2: Inventario alto (más de 50 unidades).

El inventario se revisa cada semana, y según las ventas y el suministro, el inventario puede cambiar. Los cambios de inventario pueden ser modelados mediante una cadena de Markov con la siguiente dinámica:

- Si el inventario está en el estado 0 (bajo), en la próxima semana pasa al estado 1 con probabilidad 0.7, o permanece en el estado 0 con probabilidad 0.3.
- Si el inventario está en el estado 1 (medio), pasa al estado 2 con probabilidad 0.5, baja al estado 0 con probabilidad 0.2, o permanece en el estado 1 con probabilidad 0.3.
- Si el inventario está en el estado 2 (alto), baja al estado 1 con probabilidad 0.8 o permanece en el estado 2 con probabilidad 0.2.

Teniendo esto en consideración,

- Modele este sistema como una cadena de Markov. Defina los estados y escriba la matriz de transición P .
- Calcule la **distribución estacionaria** de la cadena de Markov, es decir, el vector $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ tal que $\pi P = \pi$ y $\sum_{i=0}^2 \pi_i = 1$.

- Interprete los resultados en términos del sistema de inventario. ¿Qué nos dice la distribución estacionaria sobre el comportamiento del inventario a largo plazo?

Ejercicio 3

Un sistema de producción tiene tres estados $\{0, 1, 2\}$, donde:

- El estado 0 significa que la máquina está inactiva.
- El estado 1 significa que la máquina está operando.
- El estado 2 significa que la máquina está en mantenimiento.

La matriz de transición del sistema está dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Preguntas:

- (1) Determine si la cadena es irreducible y si tiene una única distribución estacionaria.
- (2) Calcule la **distribución estacionaria** de la cadena de Markov, es decir, el vector $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ tal que $\pi P = \pi$ y $\sum_{i=0}^2 \pi_i = 1$.
- (3) Interprete el significado de la distribución estacionaria en términos del sistema de producción. ¿Cuál es la probabilidad a largo plazo de que la máquina está inactiva, operando o en mantenimiento?