MODELOS ESTOCÁSTICOS

TAREA 29 NOVIEMBRE

ARTURO JARAMILLO

Implementación del Algoritmo Metropolis-Hastings en Dimensión 2

Queremos calcular la siguiente integral en dos dimensiones:

$$I = \int_{[0, \varepsilon]^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{0.01}\right) dx_1 dx_2,$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro dado.

Caso $\varepsilon = 1$.

- Implementa un método de cuadratura utilizando un mallado uniforme de $n \times n$ puntos sobre el cuadrado $[0, 1]^2$. Evalúa la integral con $n = 50$ y $n = 100$.
- Usa el algoritmo de Metropolis-Hastings para generar puntos que sigan la densidad de probabilidad proporcional a $\pi(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{0.01}\right)$.
- Compara los resultados de ambos métodos:
 - Precisión: Calcula el error absoluto respecto al valor conocido $I \approx 0.000314$.
 - Eficiencia: Compara los tiempos de cómputo necesarios para alcanzar un error razonable.
- Formula conclusiones sobre la comparación de los métodos, justificando heurísticamente la razón por la cual consideras que estás observando los resultados obtenidos.

Caso $\varepsilon \approx 0$.

Toma ahora el valor de ε más cercano a cero (puedes intentar con $\varepsilon = 0.1$) y repite el procedimiento previo.

Propiedad fuerte de Markov

Un jugador comienza con un capital $X_0 = x$ y juega un juego de azar con las siguientes reglas:

- En cada turno, el jugador gana $+1$ con probabilidad p y pierde -1 con probabilidad $1 - p$.
- El jugador se retira del juego si su capital llega a 0 (ruina) o alcanza un objetivo N .

(1) Demuestra que la probabilidad de alcanzar N antes de 0 , comenzando en x , satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x = N, \\ pu(x+1) + (1-p)u(x-1), & \text{si } 0 < x < N. \end{cases}$$

(2) Utilizando la propiedad fuerte de Markov, verifica que si el proceso alcanza un capital k con $0 < k < N$, la probabilidad de alcanzar N desde x puede expresarse como:

$$u(x) = u(k) \cdot u_k(x),$$

donde $u_k(x)$ es la probabilidad de llegar a k antes de 0 , comenzando en x .