Rough Paths:

- Motivación original $\leftarrow$ estudiar "ecuaciones diferenciales" que incluyen perturbaciones aleatorias.

- Motivación reciente $\leftarrow$ Realizar aprendizaje de máquina interpretando datos como trayectorias de funciones continuas.

Motivación clásica:

$Y_t = f(t)$ $\leftarrow$ Función del tiempo.

$$\frac{dY_t}{dt} = V(Y_t) \quad \text{con} \quad Y_0 = y_0 \qquad V: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

$$\downarrow$$

$$dY_t = V(Y_t)\,dt \quad \text{con} \quad Y_0 = y_0$$

$$\Updownarrow$$

$$Y_t - Y_s = \int_s^t V(Y_r)\,dr$$

Siguiente paso de generalidad:

$$dY_t = V(Y_t)\,dX_t$$

$X_t \leftarrow$ otra función del tiempo que satisface ciertas condiciones.

$$\Updownarrow$$

$$Y_t - Y_s = \int_s^t V(Y_r)\,dX_r$$

$$dY_t = V(Y_t)\,dX_t$$

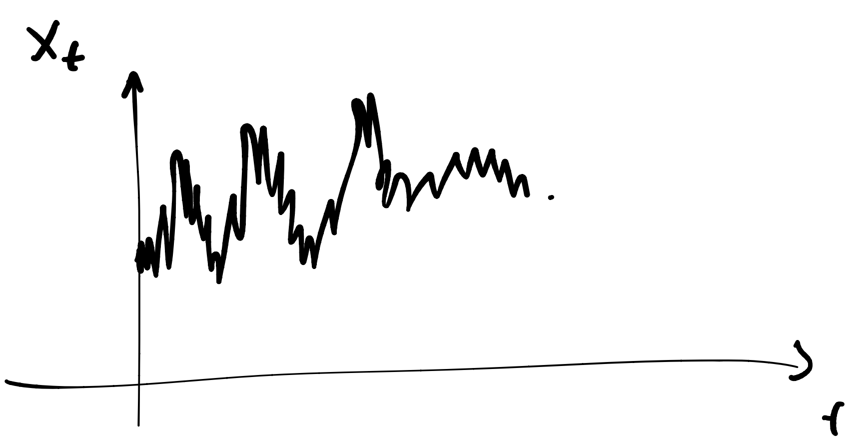
Output (↑ dY_t) input. (↑ dX_t)

¿Aplicación? X_t = precio en pesos del dolar.

Y_t = Cartera de inversión de divisas.

Lado negativo:

Si vemos el mercado en tiempo real:



$\leftarrow$ Podría ser un problema.

Análisis detallado del problema:

$$dY_r = V(Y_r)\,dX_r \iff Y_{r+\varepsilon} - Y_r \approx V(Y_r)\,(X_{r+\varepsilon} - X_r).$$

Samplear X en $[0,1]$ en tiempos

$$t_1 = \frac{1}{n}, \quad t_2 = \frac{2}{n}, \ldots, \quad t_n = 1 = \frac{n}{n}.$$

Si $\quad X_i = X_{t_i} \qquad Y_i = Y_{t_i}$

$$Y_{i+1} = Y_i + V(Y_i)\,\Delta_i X \qquad \Delta X_t \approx \Delta t + \text{error}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + V(Y_i)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_i\right).$$

modelo

$\{\xi_i\} \leftarrow$ v.a.i.id. $\qquad \xi_i \sim \mathcal{N}(0,1).$

Cuando tomamos límite obtenemos

$$dY_t = V(Y_t)\,(dt + dB_t).$$

$$Y_t - Y_s = \int_s^t V(Y_r)\,dr + \underbrace{\int_s^t V(Y_r)\,dB_r}_{\text{es "sutil" de definir.}}$$

Esto motiva a formular ecuaciones del tipo

$$dY_t = V(Y_t)\, dX_t .$$

$X_t \leftarrow$ Potencialmente tiene trayectorias muy erráticas.

¿Cómo depende el output en función del input?

$\updownarrow$

¿continuamente? $\times$

$dY_t = V(Y_t)\, dX_t .$

Proposición (Lyons et. al).
No existe un espacio de Banach $\mathcal{B}$ t.q. las trayectorias de un mov. Browniano pertenezcan a $\mathcal{B}$ casi seguramente y t.q. el mapeo

$$(f, g) \longmapsto \int_0^{(\cdot)} f(t)\dot{g}(t)\, dt,$$

definido primero sobre f, g diferenciables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se extiende a $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ de manera continua.

Como esquivar esquivar esta restricción:

$$Y_t - Y_s = \int_s^t V(Y_r)\, dX_r \quad *$$

Framework. general:

$$Y_t = (Y_t^1, \dots, Y_t^e) \qquad e \in \mathbb{N}.$$

$$X_s = (Y_s^1, \dots, Y_s^d). \qquad d \in \mathbb{N}.$$

$$V \in \mathbb{R}^{e \times d} \qquad V = (V_{i,k} \;;\; 1 \le i \le e, \quad 1 \le k \le d).$$

$$Y_t^i - Y_s^i = \sum_{k=1}^{d} \int_s^t V_{i,k}(Y_r)\, dX_r^k \quad \leftarrow \text{nuestra ecuación}$$

se suponer que tengo acceso a Y_s, X_s.

$$Y_t^i - Y_s^i = \sum_{k=1}^{d} \int_s^t \Big(V_{i,k}(Y_s) + \big(V_{i,k}(Y_r) - V_{i,k}(Y_s) \big) \Big)\, dX_r^k$$

$$= \sum_{k=1}^{d} \underbrace{V_{i,k}(Y_s)}_{\smile} \underbrace{\int_s^t dX_r^k}_{\text{Importante}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{d} \int_s^t \sum_{i_2=1}^{e} \int_s^r \frac{\partial V_{i,k}}{\partial y_{i_2}}(Y_{r_2})\, dY_{r_2}^{i_2}\, dX_r^k$$

$$\int_s^t \int_s^r \frac{\partial V_{i,r}}{\partial y_{i_2}}(Y_{r_2})\, dY_{r_2}^{i_2}\, dX_r^{K}$$

$$= \int_s^t \int_s^r \frac{\partial V_{i,r}}{\partial y_{i_2}}(Y_{r_2}) \sum_{k_2=1}^{d} \frac{\partial V_{i_2,k_2}}{\partial y_{i_2}}(Y_{r_2})\, dX_{r_2}^{K_2}\, dX_r^{K}$$

$$= \int_s^t \int_s^r \frac{\partial V_{i,r}}{\partial y_{i_2}}(Y_s) \sum_{k_2=1}^{d} \frac{\partial V_{i_2,k_2}}{\partial y_{i_2}}(Y_s)\, dX_{r_2}^{K_2}\, dX_r^{K}$$

$$+ \text{ Terminos similares.}$$

$$= \sum \text{Coeficientes}(s) \int_s^t \int_s^{r_1} \cdots \int_s^{r_l} dX_{r_{l+1}}^{K_{l+1}} \cdots dX_{r_1}^{K_1}$$

Definimos

$$S_{s,t}^{K_1,\dots,K_l}[X] := \int_s^t \cdots \int_s^{r_{l-1}} dX_{r_l}^{K_l} \cdots dX_{r_1}^{K_1}$$

Ahora, en lugar de tomar el mapeo:

$$\{X_t\}_{t\geq 0} \xrightarrow[\text{continuo}]{\text{No es}} \{Y_t\}_{t\geq 0}$$

$$\{X_t\}_{t\geq 0} \xrightarrow[\text{agregar info}]{\text{medible}} \left(\{X_t\}_{t\geq 0},\ \text{todas las } S^{k_1,\dots,k_\ell}_{s,t}[X] \text{ hasta } \ell \leq q.\right)$$

si es continuo. $\downarrow$ si q es suficientemente grande (depende de la Hölder continuidad de X

si X es α-Hölder continuo.

$$q = \lfloor \tfrac{1}{\alpha} \rfloor$$

$$\{Y_t\}_{t\geq 0}.$$

Aplicaciones en machine learning:

Objeto de interés:

Signaturas $\rightarrow \left\{ S^{k_1,\dots,k_q}_{s,t}[X] \right\}$. suponer $s=0,\ t=1$

Remark: Signaturas son "características" especiales de $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Problema práctico:

- $Y_t^1 = \alpha + \beta_1^1 Y_{t-1}^1 + \beta_1^2 Y_{t-2}^2 + \varepsilon_t^1 \leftarrow$ clasif. 1

- $Y_t = \alpha + \beta_2^1 Y_{t-1}^1 + \beta_1^2 Y_{t-2}^2 + \varepsilon_t^2 \leftarrow$ clasif. 2.

Problemas de clasificación que se pueden resolver con técnicas de rough path.

Analogía con regresión:

$Y \leftarrow$ respuesta (score crediticio).

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j X_j$$

$X_i \leftarrow$ características.

$X_i \in \mathbb{R}$.

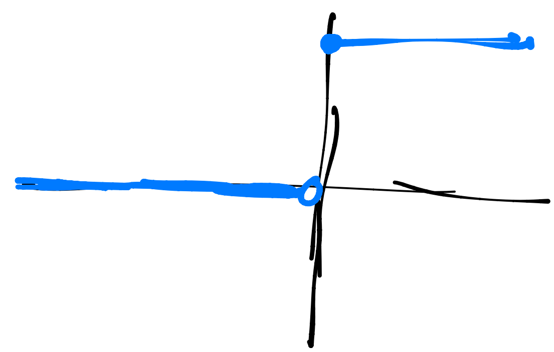
$$\left\{ \begin{array}{l} Y^1, \ldots, Y^n \\ (X_1^1, \ldots, X_d^1), \ldots, (X_1^n, \ldots, X_d^n) \end{array} \right. \leftarrow \text{observaciones}$$

$\beta_0, \ldots, \beta_d \leftarrow$ tienen una fórmula para calcularse.

Pasamos ahora de regresión a clasificación

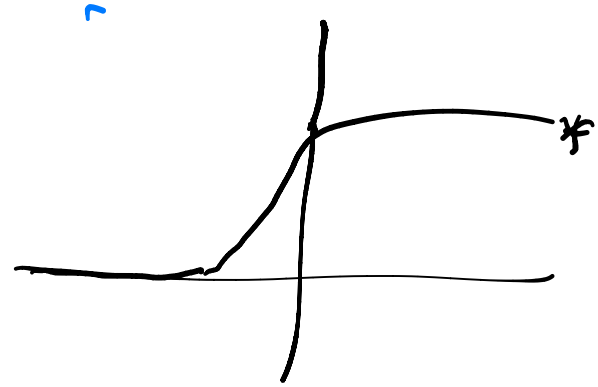
Me gustaría:

$$Y = \phi\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j X_j\right)$$



$\phi(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$

$$Y = \varphi\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j X_j\right)$$



$\phi(x) =$ sigmoide como en

Nos da un aprox. de la clasificación.

Nota:

Si queremos reducir

$$\sum_{\ell=1}^{n} \mathcal{E}\left(Y^\ell - \varphi\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j X_j^\ell\right)\right) + \sum_{j=1}^{d} w_j \tilde{\mathcal{E}}(\beta_j)$$

$\mathcal{E} \leftarrow$ cuantificación del error $\qquad \tilde{\mathcal{E}} \leftarrow$ penaliz.

De vuelta al problema de clasificación de series de tiempo:

- $X_t^1 = \alpha + \beta_1^1 X_{t-1}^1 + \beta_1^2 X_{t-2}^2 + \varepsilon_t^1 \leftarrow$ clasif. 1 #

- $X_t = \alpha + \beta_2^1 X_{t-1}^1 + \beta_1^2 X_{t-2}^2 + \varepsilon_t^2 \leftarrow$ clasif. 2. ##

Queremos:

- $Y \leftarrow$ respuesta: eres # o ## ✓

Valores de $Y \leftarrow \{0, 1\}$. ✓

Ahora vamos a observar:

Voy a ver algo como:

Input $\leftarrow$ la trayectoria de la serie

Problema: como aplico lo que tengo en slides anteriore ?

$\downarrow$ traducción:

Obtener "características" extraídas de la trayectoria de la serie de tiempo?

$$X \xmapsto{\tilde{S}} \underbrace{(\tilde{S}_1(X), \ldots, \tilde{S}_{40}(X))}_{\text{características}}.$$

Ahora: puedo proponer números $\beta_0, \ldots, \beta_4$ t.q.

$$Y = \varphi\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^{40} \beta_i \tilde{S}_i(X)\right) + \text{error de medición.}$$

Ésta es "toda" la metodología, siempre y cuando $\tilde{S}_i$ ya estén elegidas,

Conexión con Rough paths:

Comentario:

Hay info. que me gustaría que no influyera en la variable de respuesta.

- Reconocimiento de acciones ← Marcos de referencia no importan

- Reconocimento de caractéres chinos. ← invarianza bajo "dibujar más rápido".

Caracteristicas: $X \in \mathbb{R}^d$

$$\left(\tilde{S}_1(X), \dots, \tilde{S}_{40}(X)\right)$$

$$= \left(S_{i_1,\dots,i_q}(X) ; \quad 1 \leq q \leq Q \quad i_j \in \{1,\dots,d\} \right)$$

Justificación de que $S_{\underset{\sim}{i}}$ son "buenos candidatos" ← depende.

- Ventaja: 1 $S_{i_1,\dots,i_q}(X)$ son invariantes bajo reparametrizaciones.

- Ventaja 2:

$$\left(S_{i_1,\dots,i_q} \; ; \; q \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\; i_j \in \{1,\dots,d\} \right).$$

$$\Big\downarrow$$

$$\tilde{T} := \bigoplus_{q=1}^{\infty} (\mathbb{R}^d)^{\otimes q} \longleftarrow = \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_q=1}^{d} a_{i_1,\dots,i_q}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q} \right\}$$

Para encajar a las $S_{i_1,\dots,i_q}$ en $\tilde{T}$ escogemos $a_{i_1,\dots,i_q} = S_{i_1,\dots,i_q}$.

Ventaja:

Si consideramos

$$\int_s^t \int_s^{t_1} \int_s^{t_2} \cdots \int_s^{t_q} 1 \, dX_{t_q} \otimes dX_{t_{q-1}} \otimes \cdots \otimes dX_1 \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes q}$$

$$\Big\downarrow$$

$$:= \sum_{i_1,\dots,i_q} \left(\int_s^t \int_s^{t_1} \int_s^{t_2} \cdots \int_s^{t_q} 1 \, dX_{t_q}^{i_q} \, dX_{t_{q-1}}^{i_{q-1}} \cdots dX_1^{i_{q-1}} \right) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q}$$

Nota:

El "espacio de Fock" $\tilde{F} = \bigoplus_{q=1}^{\infty} (\mathbb{R}^d)^{\otimes q}$

tiene un producto que le llamamos "$\otimes$"

$$\underbrace{(e_{i_1} \otimes e_{i_2})}_{\tilde{F}} \text{"}\otimes\text{"} \underbrace{(e_{i_3})}_{\tilde{F}} = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}$$

Ventaja 2 :)

Por inv. bajo reparametrización:

puedo pensar que X_t solo se considera

para $t \in [0,1]$.

$Y_t \leftarrow$ otra "trayectoria" $t \in [1,2]$ t.q. $Y_1 = X_1$

Tenemos un producto en las trayectorias.

$$\underbrace{(X \odot Y)_t}_{\text{producto en las trayectorias.}} = \begin{cases} X_t & \text{si } t \in 1 \\ Y_t & \text{si } t \in [1,2] \end{cases} \qquad t \in [0,2]$$

$S(X \odot Y) = S(X) \otimes S(Y)$. $\leftarrow$ Signaturas pueden calcularse en sub-intervalos y luego "pegarse"

Ventaja 2.2.)

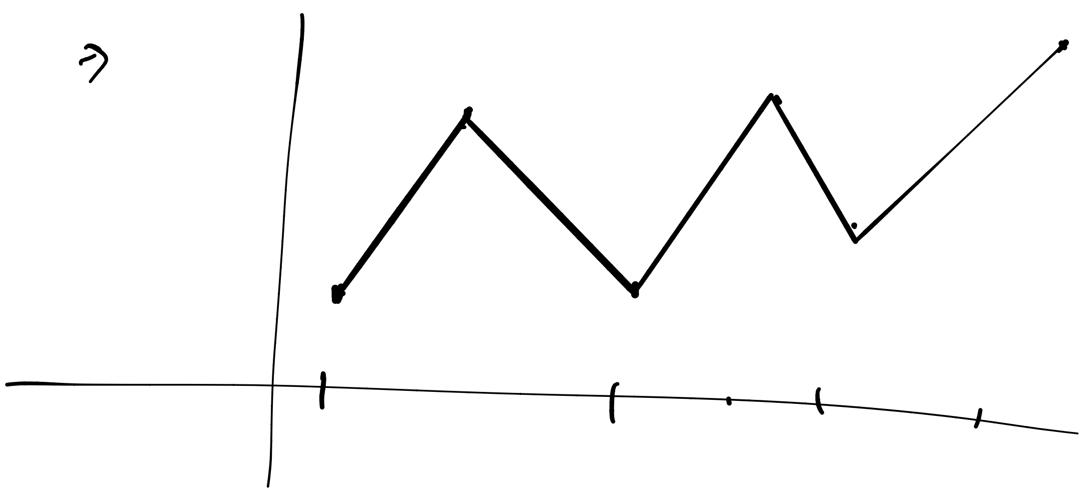
$X_t = t\,v \qquad v \in \mathbb{R}^d$

Entonces

$$1 + \int_0^1 dX_v + \int_0^1\int_0^{t_1} dX_{t_2}\otimes dX_{t_1} + \dots$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{M} \frac{v^{\otimes k}}{k!} = \exp\{v\}.$$

$\Rightarrow$



$X_t \leftarrow$ diferenciable.

$$\int_0^1 X_t \, dX_t$$

$$S_{i_1,\dots,i_{q_1}} S_{j_1,\dots,j_{q_2}} = \sum_{(w_1,\dots,w_{q_1+q_2}) \in I} \boxed{}\, S_{w_1,\dots,w_{q_1+q_2}}$$

c_q = q'ésimo coef de $\log(\mathbb{E}[\exp\{\lambda x\}])$.

Definiciones básicas:

Objetivo:

$X_{(\cdot)} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\qquad X_t \leftarrow$ un proceso estocástico.

Para definir la solución de

$$dY_t = V(Y_t)\, dX_t \iff Y_t - Y_s = \int_s^t V(Y_u)\, dY_u$$

¿Qué es?

Comentario:

Es muy difícil:

$\int_s^t Z_s\, dX_s$ de definir para todo Z. ⊛

Nota:

No necesitamos ⊛ bien definido para todo Z.

Si estamos considerando el problema

$$Y_t - Y_s = \int_s^t \underbrace{V(Y_u)}_{} \, dY_u$$

No es cualquier proceso $Z_t = V(Y_t)$.

Claim: será suficiente dar un candidato para $\int_s^t (X_v - X_s)\, dX_v$

Heurísticamente, la info que necesitamos para resolver ecuaciones.

$$\left(X_s, \underset{\text{para}}{\text{Candidato}} \left(\int_s^t (X_v - X_s) dX_v \right) \right) = \mathbb{X}$$

Al final del seminario, $\mathbb{X}$ va a dar el sentido para la ecuación

$$Y_t - Y_s = \int_s^t V(Y_v)\, dX_v$$

siempre y cuando X no sea muy "rugoso".

Definición:

La rugosidad de una trayectoria la mediremos mediante la Hölder continuidad.

Voy a suponer que $X = \{X_v\}_{v \in [0,T]}$. tiene Hölder continuidad $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

i.e. $\exists$ $c > 0$ t.q $\forall$ $s < t < T$, $|X_t - X_s| \leq C|t-s|^{\alpha}$

Spoiler:

Si $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, podemos definir

$$\int_0^t Y_u \, dX_u \quad (\#) \longleftarrow \text{"integral de Young"}$$

si Y y X son α-Hölder continuos.

Spoiler extendido:

Para que $(\#)$ exista ocupamos

Y sea p-Hölder continua

X sea q-Hölder continua

y $p+q>1$. En particular, si $p=q=\alpha$.

Definición:

Si V es un espacio de Banach. $(V = \mathbb{R}^d)$.

decimos que

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{trayect. orig.}}}{X_{(\cdot)}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{signatura.}}}{\mathbb{X}_{(\cdot,\cdot)}}) : \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \to V \times (V \otimes V).$$

es un rogh path si

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}. \qquad \left(\text{Identidad de Chen}\right)$$

donde $X_{s,t} := X_t - X_s$.

Motivación:

Lo que queríamos era $\mathbb{X}_{s,t}$ fuera "el" candidato para $\int_s^t X_{s,r}\, dX_r$

Ejemplo particular del problema:

Si $s \mapsto X_s$ es diferenciable.

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t}$$

$$\int_s^t X_{s,r}\, dX_r - \int_s^u X_{s,r}\, dX_r - \int_u^t X_{u,r}\, dX_r$$

$$= \int_u^t X_{s,r}\, dX_r - \int_u^t X_{u,r}\, dX_r$$

$$= \int_u^t (X_{s,r} - X_{u,r})\, dX_r = \#\#$$

$$(\#) = \int_u^t (X_r - X_s - \underbrace{X_r + X_u}_{X_{r,u}})\, dX_r$$

$$= X_{s,u} \int_u^t dX_r = X_{s,u}\, X_{u,t}$$

En el caso $V = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

$$\mathbb{X}_{s,t} \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes 2} \approx \text{span}\{ e_i \otimes e_j \quad 1 \leq i,j \leq d \}$$

$$\approx \mathbb{R}^{d \times d} =: \text{Matrices de } d \times d.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{X}_{s,t} = (\mathbb{X}_{s,t}^{i,j} \; ; \; 1 \leq i,j \leq d).$$

Candidato para $\mathbb{X}_{s,t}^{i,j}$.

$$\mathbb{X}_{s,t}^{i,j} = \int_s^t X_{s,r}^i \, dX_r^j$$

Donde $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$.

$\Rightarrow$ si defino

$$\int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r := \left(\int_s^t X_{s,r}^i \, dX_r^j \; ; \quad 1 \leq i,j \leq d \right).$$

Rough path $= (X, \mathbb{X})$, f.g.

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}.$$ (Identidad de Chen)

$\mathbb{X}_{s,t} \leftarrow$ necesita 2 parámetros.

No es suficiente conocer

$\mathbb{X}_{0,t} \quad \forall \ t > 0$ $\qquad X$

para conocer a $\mathbb{X}_{s,t}$.

Lo que sí es cierto, es que

$(X_t, \mathbb{X}_{0,t})$ determina por completo a

$(X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})$

Razón:

$X_{s,t} = X_t - X_s \quad \checkmark$

$$\mathbb{X}_{0,t} - \mathbb{X}_{0,s} - \mathbb{X}_{s,t} = X_{0,s} \otimes X_{s,t}$$

$\Rightarrow \mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{0,t} - \mathbb{X}_{0,s} - X_{0,s} \otimes X_{s,t} \leftarrow$ determinado por $(X_t, \mathbb{X}_{0,t})$.

Supongamos que $(X, \mathbb{X})$ es un rogh path.

Estoy interpretando $\int_s^t X_{s,r}\, dX_r = \mathbb{X}_{s,r}$

Claim:

Si $\mathbb{Y}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + F_t - F_s$,

Para $F_{(\cdot)} : \mathbb{R}_+ \to V \otimes V$, entonces

$(X, \mathbb{Y})$ satisface la identidad de Chen.

Efectivamente, si:

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}.$$

Entonces,

$$\mathbb{Y}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + F_t - F_s$$

$$\mathbb{Y}_{s,u} = \mathbb{X}_{s,u} + F_u - F_s$$

$$\mathbb{Y}_{u,t} = \mathbb{X}_{u,t} + F_t - F_u$$

$$\Rightarrow \mathbb{Y}_{s,t} - \mathbb{Y}_{s,u} - \mathbb{Y}_{u,t} = \mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}.$$

$$+ F_t - F_s - (F_u - F_s + F_t - F_u)$$

Paso 2:)

Definición:

$\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Definimos el espacio de

α- Hölder rough-paths, escrito como $\mathcal{C}^{\alpha}([0,T], V)$

Como

$(X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,T], V)$ si

i) Identidad de Chen se cumple.

Y

ii). $\|X\|_{\alpha} := \sup\limits_{s<t} \dfrac{|X_t - X_s|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty$.

. $\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} := \sup\limits_{s<t} \dfrac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty$.

$|X_{s,t}| \lesssim |t-s|^{\alpha}$

$\|\mathbb{X}_{s,t}\| \lesssim |t-s|$

$$\left| \int_s^t X_{s,r}\, dX_r \right| \leq \int_s^t \underbrace{|X_{s,r}|}_{\lesssim |t-s|^{\alpha}} |dX_r| \quad |t-s|^{\alpha}$$

Heurística

Si se prueba que

$$\left\| \int_s^t B_{s,t}\, dB_r \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C |t-s|^{1+\beta} \qquad t \in [0,T],$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{s\le t} \frac{\left| \int_s^t B_{s,t}\, dB_1 \right|}{|t-s|^{\gamma}} < \infty \quad \forall \quad \alpha < \frac{\beta}{p}.$$

Pregunta muy difícil de resolver:

$X = \{ X_t \}_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^d$ t.q. en $[0,T]$ X tiene trayectorias Hölder continuas de orden $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

Pregunta:

Puedo garantizar la existencia de $\mathbb{X}$?

Sí, y un mapeo $X \to \mathbb{X}$ que satisfaga

$(X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,T], \mathbb{R}^d)$ se llama levantamiento de Lyons.

En $d = 1$

. $\mathbb{X}_{s,t} = \dfrac{(X_t - X_s)^2}{2}$

Identidad de Chen:

$$(\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t})$$

$$= \frac{1}{2} \left| (X_t - X_s)^2 - (X_u - X_s)^2 - (X_t - X_u)^2 \right|$$

$$= -\cancel{X_t} X_s - \cancel{X_u^2} + X_s X_u + \cancel{X_t} X_u$$

$$= X_{s,u} \cdot X_{u,t} = (X_u - X_s)(X_t - X_u)$$

Basta ver que para nuestro proceso

X, se vale

- $\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} := \sup_{s<t} \dfrac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty.$

$\uparrow$

depende del contexto, pero se vale para

mov. Browniano.

$$\int_0^t B_r \, dB_r \neq \frac{B_t^2}{2}$$

Espacio de Rough paths geométricos:

$(X, \mathbb{X})$ ← suponer que es un rough path.

- Identidad de Chen

$$\mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}$$

- Hölder continuidad de orden $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

$$\sup_{s<t} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^{\alpha}} + \sup_{s<t} \frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty .$$

(*)

Elección particular:

Usando intuición de cálculo real:

$$\mathbb{X}_{s,t} \in V^{\otimes 2} \underset{\uparrow}{\simeq} \mathbb{R}^{d \times d}$$

$V = \mathbb{R}^d$

Si pensamos para e_i, e_j ← elementos de una base para V,

$$\mathbb{X}^{i,j}_{s,t} = \langle \mathbb{X}_{s,t}, e_i \otimes e_j \rangle$$ ← extraer la (i,j) componente de la matriz.

En cálculo I:

$$\mathbb{X}^{i,j}_{s,t} + \mathbb{X}^{j,i}_{s,t} \ \text{“}\!\!=\!\!\text{”}\ \int_s^t X^i_{s,r}\, dX^j_r + \int_s^t X^j_{s,r}\, dX^i_r$$

intuición

$$= \int_s^t (X^i_r - X^i_s)\, dX^j_r + \int_s^t (X^j_r - X^j_s)\, dX^i_r$$

$$= \underbrace{\int_s^t X^i_r\, dX^j_r - \int_s^t X^j_s\, dX^i_r}_{d(X^i X^j)_r} - X^i_s X^j_{s,t} - X^j_s X^i_{s,t}$$

$$= \dots = X^i_{s,t}\, X^j_{s,t}$$

#

Conclusión:

Cálculo 1 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}$

integ. por partes

2 maneras de construir rough paths que se comporten como en cálculo I:

- Rough path geométricos débiles:

$(X, \mathbb{X}) \leftarrow \alpha$-Rough path (pedimos $\mathbb{X}$).

& además pedimos:

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}$$

- Rough path geométrico fuerte:

Si $(X, \mathbb{X})$ pertenece a $\mathcal{C}_g^{\alpha}([0,T], V)$.

Completamos las trayectorias

$t \longmapsto Y_t$ suaves, con

$$\mathbb{Y}_{s,t} := \int_s^t Y_{s,r}\, dY_r \Rightarrow \text{(\#)}$$

integral de Lebesgue.

con la métrica

$$\sup_{s<t} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^{\alpha}} + \sup_{s<t} \frac{|\mathbb{Y}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}}$$

y obtenemos un espacio

$\mathcal{C}_g^{\alpha}([0,T],V)$.

$\uparrow$

geométrico (reglas de cálculo I).

Si $\mathcal{C}_g^{0,\alpha}$ son los rough paths geométricos débiles, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

$$\mathcal{C}_g^{0,\alpha} \subset \mathcal{C}_g^{\alpha} \quad C_g^{0,\beta}$$

$\forall \quad \beta > \alpha$

Libro de Victoir:

Rough paths $\left((X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})_{s<t} \right)$

vistos como trayectorias en un espacio ligeramente extendido.

$X : [0,T] \to V$

$\mathbb{X} : [0,T] \to V^{\otimes 2}$

definir

$$\mathbf{X}_{s,t} := (\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cup}{1}}, \underset{V}{\overset{\cup}{X_{s,t}}}, \underset{V^{\otimes 2}}{\overset{\cup}{\mathbb{X}_{s,t}}}) \approx \mathbb{R} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} =: T^{(2)}(V).$$

$$\tilde{\approx} \ 1 + X_{s,t} + \mathbb{X}_{s,t}$$

$T^{(2)}(V)$ = espació de Fock truncado en 2.

$\uparrow$

tiene una estructura de álgebra.

Si: $A = (a,b,c) \in T^{(2)}(V) \quad (a \in \mathbb{R},\ b \in V,\ c \in V^{\otimes 2})$

(pensar en $(a,b,c) = a+b+c$

y $B = (a', b', c') \in T^{(2)}(V)$.

$\Rightarrow$

$A \otimes B$ "=" $(a+b+c) \otimes (a'+b'+c')$ } distribuir y truncar.

$:= (aa', ab' + a'b, ac' + a'c + b \otimes b')$.

La identidad de Chen se ve como

$$\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u} \otimes \mathbf{X}_{u,t}$$

$\uparrow$

$$= (1 + X_{s,u} + \mathbb{X}_{s,u}) \otimes (1 + X_{u,t} + \mathbb{X}_{u,t}).$$

Nota:

$$\mathbf{X} = 1 + \text{Algo} \in T_1^{(2)}$$

Definimos

$$T_a^{(2)} = a + b + c \quad , \quad \text{con } b \in V \quad y \quad c \in V^{\otimes 2}.$$

Nota:

$T_1^{(2)}$ es un grupo (tiene inverso la operación $\otimes$)

Intuición:

$$(1+\varepsilon)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (-1)^k$$

$$(1 + (a+b))^{-1} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (a+b)^{\otimes k}$$

$$= 1 - (a+b) + (a+b) \otimes (a+b).$$

Esto implica que

$$(1+b+c)^{-1} = 1 - b - c + b \otimes b \qquad b \in V, \quad c \in V^{\otimes 2}$$

$T_1^{(2)} \leftarrow$ es un grupo. $\Rightarrow$ grupo de Lie.
(tiene la topología inducida por $\mathbb{R} \oplus V \oplus V^{\otimes 2}$)

Podemos ver que

$$\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{0,s}^{-1} \mathbf{X}_{0,t}$$

Esto establece una correspondencia entre

$$t \mapsto \mathbf{X}_{0,t} \equiv \mathbf{X}_t \quad y \quad (s,t) \mapsto \mathbf{X}_{s,t}.$$

Quisiera pensar que

$t \mapsto \mathbf{X}_t$ va a representar a mi rough path. $(X, \mathbb{X})$.

Pregunta:

Ahora tomo otra trayectaria:

$t \longmapsto \Theta_t \in T_1^{(2)}$

Es cierto que Θ viene de un rough path?

No:

Pero entonces

¿Cual es exáctamente el espacio en el que viven todos los rough paths.

Paso I:

definir una métrica en $T_1^{(2)}$:

para $\mathbf{x} = (1 + b + c) \in T_1^{(2)}$

$$|||\mathbf{x}||| := \frac{1}{2} \left(N(x) + N(\mathbf{x}^{-1}) \right).$$

con

$$N(\mathbf{x}) = \max \{ |b|, \sqrt{2|c|} \}$$

$|||\cdot|||$ satsface

- $\delta_\lambda : (a, b, c) \longmapsto (a, \lambda b, \lambda^2 c)$. es t.q.

$$|||\delta_\lambda \mathbf{x}||| = |\lambda| \, |||\mathbf{x}|||$$

- $|||\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}'||| \leq |||\mathbf{x}||| + |||\mathbf{x}'|||$ $\leftarrow$

Definir $d : (T_1^{(2)})^2 \to \mathbb{R}_+$.

$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := |||\mathbf{x}^{-1} \otimes \mathbf{x}'|||$

es una métrica ← ésto es teorema.

definimos, para

$t \longmapsto \mathbf{X}_t \in T_1^{(2)}$

$$|||\mathbf{X}|||_\alpha := \sup_{s<t\leq T} \frac{d(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_t)}{|s-t|^\alpha}$$

Proposición:

a) Si $(X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha$. Entonces

$t \longmapsto \mathbf{X}_t := (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t})$ es α-Hölder continua:

$|||\mathbf{X}|||_\alpha < \infty$. (en el espacio $T_1^{(2)}$).

b) Si $t \longmapsto \mathbf{X}_t \in T_1^{(2)}$ y es α-Hölder continua, entonces

$(X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha$, y $(X, \mathbb{X})$ se recupera

mediante

$(1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = \mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t$.

La relevancia de la formulación de

$(X, \mathbb{X})$ como $\mathbf{X} = 1 + X_{0,t} + \mathbb{X}_{0,t}$.

Recordar que $(X, \mathbb{X})$ es geométrico si es rough path y

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}.$$

Preliminares para análogo de la último prop. de la sesión pasada.

Definimos; para un elemento

$$T_1^{(2)} = \{1 + V + V^{\otimes 2}\}. \ni 1 + \underset{V}{\underset{\cap}{b}} + \underset{V^{\otimes 2}}{\underset{\cap}{c}}.$$

definimos

$$\cdot \log(1+b+c) := b + c - \frac{1}{2} b \otimes b$$

Análogamente, si $b+c \in T_0^{(2)}$

$$\cdot \exp(b+c) := 1 + b + c + \frac{1}{2} b \otimes b.$$

Entonces

$$T_0^{(2)} \xrightarrow{\exp} T_1^{(2)} \xrightarrow{\log} T_0^{(2)}$$

ii) Nota: $T_0^{(2)}$ es un álgebra de Lie.

$$[b+c, b'+c'] = b \otimes b' - b' \otimes b'$$

$$T_0^{(2)} = V \oplus V^{\otimes 2}$$

$\mathfrak{g}^{(2)} :=$ Alg. de Lie generada por V:

$$V \oplus [V, V]$$

Finalmente,

$$G^{(2)} := \exp(\mathcal{A}^{(2)}).$$

Proposición:

a) $(X, \mathbb{X}) \in C_g^{\alpha}([0,T], V)$ Entonces

Rough path geométrico. $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

$t \rightsquigarrow \mathbf{X}_t = 1 + X_t + \mathbb{X}_t \in G^{(2)}$ y es

α-Hölder continuo.

b) Si $t \longmapsto \mathbf{X}_t$ es una trayectoria

α-Hölder continua en $G^{(2)}$, entonces

el $(X, \mathbb{X})$ asociado es un

rough path geométrico.

Observación:

$$\exp\{a+b\} \otimes \exp\{a'+b'\}$$

$$= \exp\{a+a' + b+b' + \tfrac{1}{2}[a,a']\}.$$

Relevancia:

Sección 2.4 Geometric rough paths of low regularity.

Browniano como un rough path

$X = B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un Browniano d-dimensional

$V = \mathbb{R}^d$

Opciones:

i) $\mathbb{X}_{s,t} := \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r = \left\{ \int_s^t B_{s,r}^i \, \overset{\text{Itô}}{dB_r^j} \right\} = \mathbb{X}_{s,t}^{\text{Itô}}$

Necesitamos $\sup\limits_{s<t} \dfrac{\mathbb{X}_{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty$. $\circledast$

Se puede probar la existencia de una modificación de $\int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r$ que llamamos $\mathbb{X}_{s,t}$ y satisface

Reformulación del tma de continuidad de Kolmogorov que se adapta a rough paths:

Ingredientes

- $\mathbb{E}\left[|X_{s,t}|^q \right]^{1/q} \leq C|t-s|^\beta$
- $\mathbb{E}\left[|\mathbb{X}_{s,t}|^{\frac{q}{2}} \right]^{2/q} \leq C|t-s|^{2\beta}$

$\beta > 2.$

$\Rightarrow$ puedes escoger $\alpha \in \left[0, \beta - \frac{1}{q}\right]$

ii)

$$\mathbb{X}^{i,j}_{s,t} = \int_s^t B^i_{s,r} \circ dB^j_r$$

integ. de Stratonovich

es t.q.

$(B, \mathbb{X})$ es un rough path.

iii) Nota:

$$\mathbb{Y}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + F_t - F_s \qquad F_t \in VOV$$

con prop. de 2α regularidad para F funciona igual.

Nota: hay elecciones de F que son relevantes.

Integración respecto a un rough paths:

Operación: integración:

$$(Y, X) \longmapsto \int Y_s \, dX_s$$

Si X y Y son tan irregulares como el browniano, no es posible integrar de manera "continua".

Nota:

No es necesario integrar todos los posibles procesos Y.

Para ec. diferenciales.

Intuición:

Quisieramos

$$\int_0^1 Y_t \, dX_t = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[s,t]\in \mathcal{P}} Y_s X_{s,t}.$$

← No siempre funciona, pero ya casi.

Modificación:

Aclaraciones: pensar que $V = \mathbb{R}^d$. $W = \mathbb{R}^m$

$t \mapsto Y_t \in \mathcal{L}(V, W)$

$X_t \in V$.

i) Considerar $Y = F(X_t)$,

con $F: V \to \mathcal{L}(V, W)$ que sea 2 veces diferenciable con derivadas continuas.

(en caso $\dim(V) = \infty$ consideramos diferenciabilidad de frechet).

$DF \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W)) \cong \mathcal{L}(V \otimes V, W)$.

Intuición:

$Y_t = F(X_t) = F(X_s) + DF(X_s) X_{s,t}$

$\Rightarrow$ Podría ser que funcione definir

$$\int_0^1 F(X_s) \, dX_s \overset{|\mathcal{P}|\to 0}{\approx} \sum_{[s,t]\in\mathcal{P}} \left(F(X_s) X_{s,t} + DF(X_s) \mathbb{X}_{s,t} \right).$$

Lemma:

$F: V \to \mathcal{L}(V, W)$ es 2 veces dif. con derivadas acotadas. $(X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha$ $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

$Y_s = F(X_s)$, $Y_s' = DF(X_s)$ y $R_{s,t} = Y_{s,t} - Y_s' X_{s,t}$

Entonces,

- $\|Y\|_\alpha \leq \|DF\|_\infty \|X\|_\alpha$
- $\|Y'\|_\alpha \leq \|D^2F\|_\infty \|X\|_\alpha$
- $\|R^Y\|_{2\alpha} \leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \|X\|_\alpha^2$

Regresar por un segundo a integración con regularidad $> \frac{1}{2}$ (integ. de Young).

Integrar consiste en considerar

$\Xi_{s,t}$ ← colección indexada por $s \leq t$.

$\Xi_{s,t}$ representa la "regla de integración", es decir es, el objeto que usamos para sacar

$\Xi_{s,t} := Y_s X_{s,t}$.

$$\sum_{[s,t]\in \mathcal{P}} \Xi_{s,t} \xrightarrow{\text{Young}} \int_a^b Y_s \, dX_s = \mathcal{I}[\Xi]_{a,b}.$$

Inclusive en el caso de integ. de Young donde

$\Xi_{s,t} = Y_s X_{s,t}$ ← No satisface $\Xi_{s,t} = \Xi_{s,u} + \Xi_{u,t}$.

Lema (Sewing lema).

Sean α, β tq. $0 < \alpha \leq 1 < \beta$.

Definir:

$\Xi_{s,t}$ ← colección indexada por $s < t$,

Suponemos que

$$\|\Xi\|_\alpha := \sup_{s<t} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} < \infty$$

$\|\delta \boxed{H}\|_\beta < \infty$, con

donde

$$(\delta \boxed{H})_{s,u,t} := \boxed{H}_{s,t} - \boxed{H}_{s,u} - \boxed{H}_{u,t}.$$

$s<u<t$

$$\|\delta \boxed{H}\|_\beta := \sup_{s<u<t} \frac{|\delta \boxed{H}_{s,u,t}|}{|t-s|^\beta}$$

Entonces existe un mapeo

$\mathcal{I} : \{\boxed{H}$ como arriba$\} : C_2^{\alpha,\beta} \to C^\alpha$

t.q. $\mathcal{I}$ es continua, $\mathcal{I}[\boxed{H}]_0 = 0$

$$|\mathcal{I}[\boxed{H}]_{s,t} - \boxed{H}_{s,t}| \le C|t-s|^\beta.$$

Con C que depende sólo de β y $\|\delta \boxed{H}\|_\beta$.