Un primer acercamiento a la investigación en probabilidad

Arturo Jaramillo Gil

Université du Luxembourg
National University of Singapore

Primer Congreso Mexiquense de la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Objetivos generales

Se discutirá desde un punto de vista personal:

Objetivos generales

Se discutirá desde un punto de vista personal:

- En qué consiste la investigación en matemáticas (con énfasis en la teoría de probabilidad).

Objetivos generales

Se discutirá desde un punto de vista personal:

- En qué consiste la investigación en matemáticas (con énfasis en la teoría de probabilidad).
- ¿Por qué ésta actividad es relevante?

Objetivos generales

Se discutirá desde un punto de vista personal:

- En qué consiste la investigación en matemáticas (con énfasis en la teoría de probabilidad).
- ¿Por qué ésta actividad es relevante?
- Perspectiva personal en el proceso de aprendizaje de matemáticas.

Modelación matemática

¿Qué pasa en un **primer** acercamiento a un problema sencillo de probabilidad?

Modelación matemática

¿Qué pasa en un **primer** acercamiento a un problema sencillo de probabilidad?

$$\text{Problema} \Longleftrightarrow \text{Modelación con matemáticas}$$

Modelación matemática

¿Qué pasa en un **primer** acercamiento a un problema sencillo de probabilidad?

$$\text{Problema} \Longleftrightarrow \text{Modelación con matemáticas}$$

$$\text{Modelación con matemáticas} \Longleftrightarrow \text{Fundamentos teóricos}$$

Modelación matemática

¿Qué pasa en un **primer** acercamiento a un problema sencillo de probabilidad?

$$\text{Problema} \Longleftrightarrow \text{Modelación con matemáticas}$$

$$\text{Modelación con matemáticas} \Longleftrightarrow \text{Fundamentos teóricos}$$

Ejemplo (Primer problema del caballero de la Méré)

- *Lanzar un dado cuatro veces y apostar que sale por lo menos un seis.*

Modelación matemática

¿Qué pasa en un **primer** acercamiento a un problema sencillo de probabilidad?

$$\text{Problema} \Longleftrightarrow \text{Modelación con matemáticas}$$

$$\text{Modelación con matemáticas} \Longleftrightarrow \text{Fundamentos teóricos}$$

Ejemplo (Primer problema del caballero de la Méré)

- *Lanzar un dado cuatro veces y apostar que sale por lo menos un seis.*
- *Lanzar dos dados 24 veces y apostar que la pareja de seis aparece al lo menos una vez.*

Modelación matemática

¿Qué pasa en un **primer** acercamiento a un problema sencillo de probabilidad?

$$\text{Problema} \Longleftrightarrow \text{Modelación con matemáticas}$$

$$\text{Modelación con matemáticas} \Longleftrightarrow \text{Fundamentos teóricos}$$

Ejemplo (Primer problema del caballero de la Méré)

- *Lanzar un dado cuatro veces y apostar que sale por lo menos un seis.*
- *Lanzar dos dados 24 veces y apostar que la pareja de seis aparece al lo menos una vez.*

"¿Apostar por 1 resultado de 6 posibles en 4 lanzamientos...

Modelación matemática

¿Qué pasa en un **primer** acercamiento a un problema sencillo de probabilidad?

$$\text{Problema} \Longleftrightarrow \text{Modelación con matemáticas}$$

$$\text{Modelación con matemáticas} \Longleftrightarrow \text{Fundamentos teóricos}$$

Ejemplo (Primer problema del caballero de la Méré)

- *Lanzar un dado cuatro veces y apostar que sale por lo menos un seis.*
- *Lanzar dos dados 24 veces y apostar que la pareja de seis aparece al lo menos una vez.*

"¿Apostar por 1 resultado de 6 posibles en 4 lanzamientos... será como hacerlo por 1 resultado de $6 \times 6 = 36$ en $4 \times 6 = 24$ lanzamientos?"

Modelación matemática

Ejemplo (Segundo problema del caballero de la Méré)

Luz y Mar apuestan a los volados, con 1 punto a favor de ganancia por cada volado exitoso. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta.

Modelación matemática

Ejemplo (Segundo problema del caballero de la Méré)

Luz y Mar apuestan a los volados, con 1 punto a favor de ganancia por cada volado exitoso. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que Luz tiene 4 puntos y Mar tiene 3 puntos.

Modelación matemática

Ejemplo (Segundo problema del caballero de la Méré)

Luz y Mar apuestan a los volados, con 1 punto a favor de ganancia por cada volado exitoso. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que Luz tiene 4 puntos y Mar tiene 3 puntos. ¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

Modelación matemática

En un programa de concursos...

Ejemplo (Problema de Monty hall)

Modelación matemática

En un programa de concursos...

Ejemplo (Problema de Monty hall)

El concursante escoge una puerta entre tres; su premio consiste en lo que se encuentra detrás.

Modelación matemática

En un programa de concursos...

Ejemplo (Problema de Monty hall)

El concursante escoge una puerta entre tres; su premio consiste en lo que se encuentra detrás.

- *Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra.*

Modelación matemática

En un programa de concursos...

Ejemplo (Problema de Monty hall)

El concursante escoge una puerta entre tres; su premio consiste en lo que se encuentra detrás.

- *Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra.*
- *Antes de abrir la puerta escogida por el concursante, el presentador (que sabe donde esta el premio), abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra.*

Modelación matemática

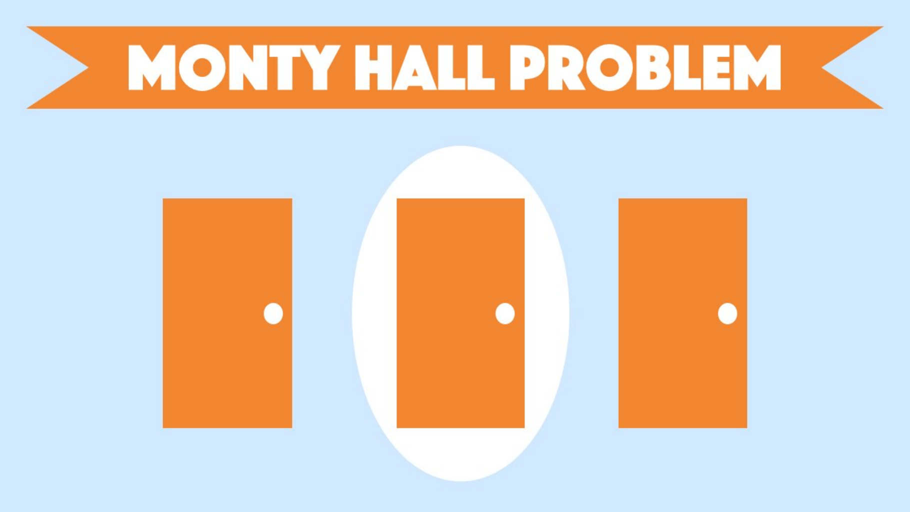
En un programa de concursos...

Ejemplo (Problema de Monty hall)

El concursante escoge una puerta entre tres; su premio consiste en lo que se encuentra detrás.

- *Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra.*
- *Antes de abrir la puerta escogida por el concursante, el presentador (que sabe donde esta el premio), abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra.*
- *Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?*

Estudio de un modelo



¿ Qué destacamos de nuestra solución?

¿ Qué destacamos de nuestra solución?

- A un "**evento**" A, por ejemplo,

$$A = \{\text{Sacar al menos un seis en 4 lanzamientos}\},$$

¿ Qué destacamos de nuestra solución?

- A un "**evento**" A, por ejemplo,

$$A = \{\text{Sacar al menos un seis en 4 lanzamientos}\},$$

le asociamos una **probabilidad** $\mathbb{P}[A]$, que es un número entre cero y uno.

¿ Qué destacamos de nuestra solución?

- El resultado de lanzar un dado no influye en los otros lanzamientos.

¿ Qué destacamos de nuestra solución?

- El resultado de lanzar un dado no influye en los otros lanzamientos. Ésto se conoce como **independencia**.

¿ Qué destacamos de nuestra solución?

- El resultado de lanzar un dado no influye en los otros lanzamientos. Ésto se conoce como **independencia**.
- Si tenemos información parcial de un experimento aleatorio, por ejemplo, si sabemos que el evento

$$B = \{\text{Luz gana los primeros 4 puntos y Mar gana 3}\}$$

ocurrió. Entonces...

¿ Qué destacamos de nuestra solución?

- El resultado de lanzar un dado no influye en los otros lanzamientos. Ésto se conoce como **independencia**.
- Si tenemos información parcial de un experimento aleatorio, por ejemplo, si sabemos que el evento

$$B = \{\text{Luz gana los primeros 4 puntos y Mar gana 3}\}$$

ocurrió. Entonces...la probabilidad de un evento del tipo

$$A = \{\text{Luz gana toda la partida (5 puntos)}\},$$

no es $\mathbb{P}[A]$, sino una nueva probabilidad que ahora incorpora la información de observar a B.

¿ Qué destacamos de nuestra solución?

- El resultado de lanzar un dado no influye en los otros lanzamientos. Ésto se conoce como **independencia**.
- Si tenemos información parcial de un experimento aleatorio, por ejemplo, si sabemos que el evento

$$B = \{\text{Luz gana los primeros 4 puntos y Mar gana 3}\}$$

ocurrió. Entonces...la probabilidad de un evento del tipo

$$A = \{\text{Luz gana toda la partida (5 puntos)}\},$$

no es $\mathbb{P}[A]$, sino una nueva probabilidad que ahora incorpora la información de observar a B. Esto se conoce como **probabilidad condicional**, y se denota por $\mathbb{P}[A|B]$.

Construcción básica: espacio de probabilidad

Construcción básica: espacio de probabilidad

¿Cómo formulamos todo ésto rigurosamente?

- Un conjunto finito Ω de posibles resultados de un experimento.

Construcción básica: espacio de probabilidad

¿Cómo formulamos todo ésto rigurosamente?

- Un conjunto finito Ω de posibles resultados de un experimento.
- Una colección de "eventos" $\mathcal{F}$, formada por subconjuntos de Ω.

Construcción básica: espacio de probabilidad

¿Cómo formulamos todo ésto rigurosamente?

- Un conjunto finito Ω de posibles resultados de un experimento.
- Una colección de "eventos" $\mathcal{F}$, formada por subconjuntos de Ω.
- Una función $\mathbb{P}$, que asocia a cada evento A en $\mathcal{F}$, su probabilidad $\mathbb{P}[A]$.

Construcción básica: espacio de probabilidad

¿Cómo formulamos todo ésto rigurosamente?

- Un conjunto finito Ω de posibles resultados de un experimento.
- Una colección de "eventos" $\mathcal{F}$, formada por subconjuntos de Ω.
- Una función $\mathbb{P}$, que asocia a cada evento A en $\mathcal{F}$, su probabilidad $\mathbb{P}[A]$.

Se necesitan propiedades matemáticas especiales para que un espacio de probabilidad nos sea de utilidad.

Construcción básica: espacio de probabilidad

¿Cómo formulamos todo ésto rigurosamente?

- Un conjunto finito Ω de posibles resultados de un experimento.
- Una colección de "eventos" $\mathcal{F}$, formada por subconjuntos de Ω.
- Una función $\mathbb{P}$, que asocia a cada evento A en $\mathcal{F}$, su probabilidad $\mathbb{P}[A]$.

Se necesitan propiedades matemáticas especiales para que un espacio de probabilidad nos sea de utilidad.

Herramienta de modelación $\Longleftrightarrow$ Fundamento teórico

¿Qué pasa cuando tenemos una herramienta desarrollada?

¿Qué pasa cuando tenemos una herramienta desarrollada?

Nuevos problemas:

¿Qué pasa cuando tenemos una herramienta desarrollada?

Nuevos problemas:

- Supongamos que tenemos un mazo de n cartas. ¿Cuántas barajeadas se necesitan para que las cartas queden más o menos "bien revueltas"?

¿Qué pasa cuando tenemos una herramienta desarrollada?

Nuevos problemas:

- Supongamos que tenemos un mazo de n cartas. ¿Cuántas barajeadas se necesitan para que las cartas queden más o menos "bien revueltas"?

- Escogemos uniformemente en $1, \ldots, n$, un entero J_n, y denotamos por $\omega(J_n)$ el número de primos distintos que dividen a J_n

¿Qué pasa cuando tenemos una herramienta desarrollada?

Nuevos problemas:

- Supongamos que tenemos un mazo de n cartas. ¿Cuántas barajeadas se necesitan para que las cartas queden más o menos "bien revueltas"?

- Escogemos uniformemente en $1, \ldots, n$, un entero J_n, y denotamos por $\omega(J_n)$ el número de primos distintos que dividen a J_n (describir la probabilidad exacta de que $\omega(J_n)$ se encuentre entre dos números a y b es muy difícil).

¿Qué pasa cuando tenemos una herramienta desarrollada?

Nuevos problemas:

- Supongamos que tenemos un mazo de n cartas. ¿Cuántas barajeadas se necesitan para que las cartas queden más o menos “bien revueltas”?

- Escogemos uniformemente en $1, \ldots, n$, un entero J_n, y denotamos por $\omega(J_n)$ el número de primos distintos que dividen a J_n (describir la probabilidad exacta de que $\omega(J_n)$ se encuentre entre dos números a y b es muy difícil). ¿Cómo aproximamos dicha probabilidad, cuando n es grande?

¿Qué pasa cuando tenemos una herramienta desarrollada?

Nuevos problemas:

- Supongamos que tenemos un mazo de n cartas. ¿Cuántas barajeadas se necesitan para que las cartas queden más o menos "bien revueltas"?

- Escogemos uniformemente en $1, \ldots, n$, un entero J_n, y denotamos por $\omega(J_n)$ el número de primos distintos que dividen a J_n (describir la probabilidad exacta de que $\omega(J_n)$ se encuentre entre dos números a y b es muy difícil). ¿Cómo aproximamos dicha probabilidad, cuando n es grande?

Éstos problemas están relacionados mediante el fundamento teórico con que se resuelven.

¿Qué pasa cuando tenemos una herramienta desarrollada?

Nuevos problemas:

- Supongamos que tenemos un mazo de n cartas. ¿Cuántas barajeadas se necesitan para que las cartas queden más o menos "bien revueltas"?

- Escogemos uniformemente en $1, \ldots, n$, un entero J_n, y denotamos por $\omega(J_n)$ el número de primos distintos que dividen a J_n (describir la probabilidad exacta de que $\omega(J_n)$ se encuentre entre dos números a y b es muy difícil). ¿Cómo aproximamos dicha probabilidad, cuando n es grande?

Éstos problemas están relacionados mediante el fundamento teórico con que se resuelven.

Fundamento teórico $\Longrightarrow$ Modelación matemática