Mediciones estadísticas de enteros suaves, y su relación con método de Stein

Arturo Jaramillo Gil (colaboración con Xiaochuan Yang)

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)

Motivación

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de primos positivos y $[n] := \{1, \ldots, n\}$.

Motivación

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de primos positivos y $[n] := \{1, \dots, n\}$. Sea $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la función definida por

$$\psi(k) := \max\{p \in \mathcal{P} \ ; \ p \text{ divide } k\}.$$

Motivación

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de primos positivos y $[n] := \{1, \ldots, n\}$. Sea $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la función definida por

$$\psi(k) := \max\{p \in \mathcal{P} \ ; \ p \text{ divide } k\}.$$

Objetivo:

Estimar la magnitud/contenido de

$$\{k \in \mathbb{N} \ ; \ \psi(k) \leq n\}$$

Cantidades de interés

Definition
Decimos que un entero $k \in \mathbb{N}$ es m-suave si $\psi(k) \leq m$. En lo sucesivo, denotaremos por $\mathcal{Z}[n, m]$ a los enteros m-suaves acotados por n.

Cantidades de interés

Definition

Decimos que un entero $k \in \mathbb{N}$ es m-suave si $\psi(k) \leq m$. En lo sucesivo, denotaremos por $\mathcal{Z}[n, m]$ a los enteros m-suaves acotados por n.

Relevancia

La magnitud de $\mathcal{Z}[n, m]$,

$$\Psi(n, m) := |\mathcal{Z}[n, m]|,$$

tiene una importante relación con la hipótesis de Riemann

La aproximación de Dickman

Definition
Sea $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la solución a

$$u\rho'(u) = -\rho(u-1) \qquad \text{y} \qquad \rho(u) = 1 \ \text{ para } u \in [0,1].$$

Theorem
Dickman (1930) muestra que para todo $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Psi(n, n^{1/x}) = \rho(x).$$

La aproximación de Dickman

Definition
Sea $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la solución a

$$u\rho'(u) = -\rho(u-1) \qquad \text{y} \qquad \rho(u) = 1 \ \text{ para } u \in [0,1].$$

Theorem
Dickman (1930) muestra que para todo $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Psi(n, n^{1/x}) = \rho(x).$$

Ramaswami (1949) prueba el refinamiento

$$|\frac{1}{n}\Psi(n, n^{1/x}) - \rho(x)| \leq \frac{C_x}{\log(n)}.$$

Uniformidad en la aproximación de Dickman

Definimos, para un nivel de suavidad m, dado,

$$\Upsilon(n, m) := \frac{\log(n)}{\log(m)}.$$

Theorem (De Bruijn, 1951)
Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$\mathcal{S}_\varepsilon = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \Upsilon(n, m) \leq \log(m)^{3/5-\varepsilon}\}.$$

Entonces

$$\Psi(n, m) = n\rho \circ \Upsilon(n, m) \left(1 + O\left(\frac{\log(\Upsilon(n, m) + 1)}{\log(m)}\right)\right)$$

Aproximaciones de Hildebrand

Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid m \neq 1 \text{ and } \Upsilon(n, m) \leq \log(n) \log\log(n)^{-5/3-\varepsilon}\}$$
$$\hat{\mathcal{S}}_\varepsilon := \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid m \neq 1 \text{ and } \Upsilon(n, m) \leq m^{1/2-\varepsilon}\}.$$

Theorem
En 1986, Hildebrand demuestra que la aproximación de De Bruijn se cumple para $(n, m) \in \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon$.

Aproximaciones de Hildebrand

Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid m \neq 1 \text{ and } \Upsilon(n,m) \leq \log(n) \log\log(n)^{-5/3-\varepsilon}\}$$
$$\hat{\mathcal{S}}_\varepsilon := \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid m \neq 1 \text{ and } \Upsilon(n,m) \leq m^{1/2-\varepsilon}\}.$$

Theorem
En 1986, Hildebrand demuestra que la aproximación de De Bruijn se cumple para $(n,m) \in \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon$*. Más aún, si la aproximación se cumple para* $(n,m) \in \hat{\mathcal{S}}_\varepsilon$*, entonces la hipótesis de Riemann hypothesis es cierta.*

Otras medidas de contenido para $\mathcal{Z}[n, m]$

La función $\Psi(n, m)$ puede escribirse como

$$\Psi(n, m) = n\mathbb{P}[J_n \in \mathcal{Z}[n, m]],$$

donde J_n son variables con ley uniforme en $[n]$.

Otras medidas de contenido para $\mathcal{Z}[n, m]$

La función $\Psi(n, m)$ puede escribirse como

$$\Psi(n, m) = n\mathbb{P}[J_n \in \mathcal{Z}[n, m]],$$

donde J_n son variables con ley uniforme en $[n]$. Se puede considerar la modificación

$$\Psi_H(n, m) := n\mathbb{P}[H_n \in \mathcal{Z}[n, m]],$$

donde H_n es una variable tal que $\mathbb{P}[H_n = k] = k^{-1}/L_n$ y

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$$

Otras medidas de contenido para $\mathcal{Z}[n, m]$

La función $\Psi(n, m)$ puede escribirse como

$$\Psi(n, m) = n\mathbb{P}[J_n \in \mathcal{Z}[n, m]],$$

donde J_n son variables con ley uniforme en $[n]$. Se puede considerar la modificación

$$\Psi_H(n, m) := n\mathbb{P}[H_n \in \mathcal{Z}[n, m]],$$

donde H_n es una variable tal que $\mathbb{P}[H_n = k] = k^{-1}/L_n$ y

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$$

Encontrar un principio de transferencia de estimaciones de Ψ_H a Ψ es un **problema abierto**

Otras medidas de contenido para $\mathcal{Z}[n, m]$

La función $\Psi(n, m)$ puede escribirse como

$$\Psi(n, m) = n\mathbb{P}[J_n \in \mathcal{Z}[n, m]],$$

donde J_n son variables con ley uniforme en $[n]$. Se puede considerar la modificación

$$\Psi_H(n, m) := n\mathbb{P}[H_n \in \mathcal{Z}[n, m]],$$

donde H_n es una variable tal que $\mathbb{P}[H_n = k] = k^{-1}/L_n$ y

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$$

Encontrar un principio de transferencia de estimaciones de Ψ_H a Ψ es un **problema abierto**, pero...

Relación entre $\Psi(n,m)$ y $\Psi_H(n,m)$: preliminares

Sean $\{\xi_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ variables geométricas con éxito $1/p$.

Relación entre $\Psi(n, m)$ y $\Psi_H(n, m)$: preliminares

Sean $\{\xi_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ variables geométricas con éxito $1/p$.

Proposition (Chen, Jaramillo, Yang)
La ley de H_n satisface

$$\mathcal{L}((\alpha_p(H_n) \ : \ p \in \mathcal{P}_n)) = \mathcal{L}((\xi_p \ : \ p \in \mathcal{P} \cap [n]) \mid A_n),$$

con

$$A_n := \{ \prod_{p \in \mathcal{P} \cap [n]} p^{\xi_p} \leq n \}. \tag{1}$$

Observación

Introdujimos variables independientes!

Relación entre $\Psi(n, m)$ y $\Psi_H(n, m)$

Sean $\{Q_n\}_n$ variables tales que, condicionales a H_n, son uniformes en $\{1\} \cup (\mathcal{P} \cap [n/H_n])$.

Relación entre $\Psi(n, m)$ y $\Psi_H(n, m)$

Sean $\{Q_n\}_n$ variables tales que, condicionales a H_n, son uniformes en $\{1\} \cup (\mathcal{P} \cap [n/H_n])$.

Proposition (Chen, Jaramillo, Yang)
Existe $C > 0$, independiente de n, tal que

$$d_{TV}(J_n, Q_n H_n) \leq C \log(n)^{-1} \log\log(n).$$

Relación entre $\Psi(n, m)$ y $\Psi_H(n, m)$

Encontrar un principio de transferencia de estimaciones de Ψ_H a Ψ es un problema abierto.

Relación entre $\Psi(n, m)$ y $\Psi_H(n, m)$

Encontrar un principio de transferencia de estimaciones de Ψ_H a Ψ es un problema abierto.
Sea $\pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la función cuenta primos

$$\pi(x) := |\mathcal{P} \cap [1, x]|.$$

Relación entre $\Psi(n, m)$ y $\Psi_H(n, m)$

Encontrar un principio de transferencia de estimaciones de Ψ_H a Ψ es un problema abierto.
Sea $\pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la función cuenta primos

$$\pi(x) := |\mathcal{P} \cap [1, x]|.$$

Relación entre $\Psi(n, m)$ y $\Psi_H(n, m)$

Encontrar un principio de transferencia de estimaciones de Ψ_H a Ψ es un problema abierto.
Sea $\pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la función cuenta primos

$$\pi(x) := |\mathcal{P} \cap [1, x]|.$$

Por condicionamientos elementales,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\psi(H_n Q_n) \leq m] \\
&\quad = \mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m] - \mathbb{P}[\psi(H_n) \leq (n/m) \wedge m] \\
&\quad + \mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m \wedge (n/m)] \mathbb{E}\left[\frac{\pi(m) + 1}{\pi(n/H_n) + 1} \mid \psi(H_n) \leq m \wedge (n/m)\right].
\end{aligned}$$

Problemas fundamentales en el principio de transferencia

El manejo de los términos en azul, requieren de la resolución de

Problema I

Estimar con precisión

$$\mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m]$$

Problemas fundamentales en el principio de transferencia

El manejo de los términos en azul, requieren de la resolución de

Problema I

Estimar con precisión

$$\mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m]$$

Problema II

Mediante estimaciones clásicas de π, el manejo del término en rojo, requiere de estimaciones de

$$\mathbb{E}\left[g(H_n/n) \mid \psi(H_n) \leq \kappa(n,m)\right],$$

con $\kappa(n,m) := m \wedge (n/m)$ y $g(x) = ((\log(1/x) + \log(1/x)^2)/x + 1)$.

Estimación de $\mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m]$: simplificación clave

Podemos escribir

$$\mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m] = \left(\frac{1}{L_n} \prod_{p \in \mathcal{P}_m} (1 - 1/p)^{-1} \right) \mathbb{P}\left[S_m \leq \frac{\log(n)}{\mathbb{E}[Z_m]} \right],$$

donde $S_m := Z_n/\lambda_n$, con $\lambda_n := \mathbb{E}[Z_n]$ y

$$Z_m := \sum_{p \in \mathcal{P} \cap [m]} \log(p) \xi_p,$$

Estimación de $\mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m]$: simplificación clave

Podemos escribir

$$\mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m] = \left(\frac{1}{L_n} \prod_{p \in \mathcal{P}_m} (1 - 1/p)^{-1} \right) \mathbb{P}\left[S_m \leq \frac{\log(n)}{\mathbb{E}[Z_m]} \right],$$

donde $S_m := Z_n/\lambda_n$, con $\lambda_n := \mathbb{E}[Z_n]$ y

$$Z_m := \sum_{p \in \mathcal{P} \cap [m]} \log(p) \xi_p,$$

Estimar la parte azul es un problema bien conocido en teoría de números (fórmula de Mertens) y es aproximadamente e^{γ}, donde $\gamma =$ constante de Euler.

Estimación de $\mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m]$: simplificación clave

Podemos escribir

$$\mathbb{P}[\psi(H_n) \leq m] = \left(\frac{1}{L_n} \prod_{p \in \mathcal{P}_m} (1 - 1/p)^{-1} \right) \mathbb{P}\left[S_m \leq \frac{\log(n)}{\mathbb{E}[Z_m]} \right],$$

donde $S_m := Z_n/\lambda_n$, con $\lambda_n := \mathbb{E}[Z_n]$ y

$$Z_m := \sum_{p \in \mathcal{P} \cap [m]} \log(p) \xi_p,$$

Estimar la parte azul es un problema bien conocido en teoría de números (fórmula de Mertens) y es aproximadamente e^{γ}, donde $\gamma =$ constante de Euler. La parte roja es completamente probabilista

Problema simplificado

Entender la ley asintótica de S_n.

Formulación probabilista de $\mathbb{P}[S_n \leq m] \approx e^{-\gamma}\rho \circ \Upsilon(n, m)$

Se sabe que $e^{-\gamma}\rho(u) = 1$ es una distribución.

Formulación probabilista de $\mathbb{P}[S_n \leq m] \approx e^{-\gamma}\rho \circ \Upsilon(n, m)$

Se sabe que $e^{-\gamma}\rho(u) = 1$ es una distribución.

Definition
Una variable D tiene ley Dickman si su distribucuión acumulada es $\rho(x)$, para $x \geq 0$.

Formulación probabilista de $\mathbb{P}[S_n \leq m] \approx e^{-\gamma}\rho \circ \Upsilon(n, m)$

Se sabe que $e^{-\gamma}\rho(u) = 1$ es una distribución.

Definition
Una variable D tiene ley Dickman si su distribucuión acumulada es $\rho(x)$, para $x \geq 0$.

Lemma (Pinsky)
D tiene ley Dickman si para toda función de prueba $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[Dg(D)] - \int_0^1 \mathbb{E}[g(D+t)]dt = 0. \tag{2}$$

Formulación probabilista de $\mathbb{P}[S_n \leq m] \approx e^{-\gamma}\rho \circ \Upsilon(n, m)$

Se sabe que $e^{-\gamma}\rho(u) = 1$ es una distribución.

Definition
Una variable D tiene ley Dickman si su distribucuión acumulada es $\rho(x)$, para $x \geq 0$.

Lemma (Pinsky)
D tiene ley Dickman si para toda función de prueba $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[Dg(D)] - \int_0^1 \mathbb{E}[g(D+t)]dt = 0. \tag{2}$$

Alternativamente, si $f = g'$,

$$\mathbb{E}[Df'(D)] + f(D) - f(D+1) = 0. \tag{3}$$

Heurística de Stein

Si la izquierda de (2) es approximadamente cero, D es aproximadamente Dickman

Método de Stein para leyes Dickman

La heurística se formaliza considerando la ecuación de Stein

$$xf_z'(x) + f_z(x) - f_z(x+1) = h_z(x) - \mathbb{E}[h_z(D)], \tag{4}$$

donde $h_z(x) := 1_{[0,z]}(x)$.

Método de Stein para leyes Dickman

La heurística se formaliza considerando la ecuación de Stein

$$xf_z'(x) + f_z(x) - f_z(x+1) = h_z(x) - \mathbb{E}[h_z(D)], \tag{4}$$

donde $h_z(x) := 1_{[0,z]}(x)$. Por cálculos elementales, para toda variable X con valores en $\mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}[X \leq u] - \mathbb{P}[D \leq u] = \mathbb{E}[Xf_z'(X) + f_z(X) - f_z(X+1)],$$

Moraleja

Estimar proximidad entre X y D se reduce a estimar

$$\mathbb{E}[Xf_z'(X) + f_z(X) - f_z(X+1)].$$

Implementación técnica I

Sean $\{\tilde{\xi}_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ copias independientes de las ξ_p.

Implementación técnica I

Sean $\{\tilde{\xi}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ copias independientes de las ξ_p. Cálculos explícitos dan

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[S_m \le z] - \mathbb{P}[D \le z]\\ =& \frac{1}{\lambda_m}\sum_{q\in\mathcal{P}\cap[m]} \frac{\log(q)}{q}(1-1/q)^{-1}\mathbb{E}[f'(S_m+\frac{\log(q)}{\lambda_m}\tilde{\xi}_q+\frac{\log(q)}{\lambda_m})]-\mathbb{E}[f'(S_m+U)].\end{aligned}$$

Implementación técnica I

Sean $\{\tilde{\xi}_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ copias independientes de las ξ_p. Cálculos explícitos dan

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[S_m \leq z] - \mathbb{P}[D \leq z]\\ &= \frac{1}{\lambda_m}\sum_{q\in\mathcal{P}\cap[m]}\frac{\log(q)}{q}(1-1/q)^{-1}\mathbb{E}[f'(S_m+\frac{\log(q)}{\lambda_m}\tilde{\xi}_q+\frac{\log(q)}{\lambda_m})]-\mathbb{E}[f'(S_m+U)].\end{aligned}$$

La izquierda se escribe como suma de dos términos T_1, T_2 compuestos de sumandos que involucran ponderaciones de

$$\mathbb{E}[f'(S_m + \frac{\log(q)}{\lambda_m})] - \mathbb{E}[f'(S_m + U)]$$

y

$$\mathbb{E}[f'(S_m + \frac{\log(q)}{\lambda_m}\tilde{\xi}_q + \frac{\log(q)}{\lambda_m}) \mid \tilde{\xi}_q \geq 1].$$

Implementación técnica II

Para manejar el término T_1, tomamos V_m independiente de las ξ_p's, con

$$\mathbb{P}[V_m = \log(q)/\lambda_m] = \frac{\log(q)}{q\lambda_m},$$

Implementación técnica II

Para manejar el término T_1, tomamos V_m independiente de las ξ_p's, con

$$\mathbb{P}[V_m = \log(q)/\lambda_m] = \frac{\log(q)}{q\lambda_m},$$

Podemos escribir

$$T_1 = \mathbb{E}[f'(S_m + V_m)] - \mathbb{E}[f'(S_m + U)].$$

Implementación técnica II

Para manejar el término T_1, tomamos V_m independiente de las ξ_p's, con

$$\mathbb{P}[V_m = \log(q)/\lambda_m] = \frac{\log(q)}{q\lambda_m},$$

Podemos escribir

$$T_1 = \mathbb{E}[f'(S_m + V_m)] - \mathbb{E}[f'(S_m + U)].$$

El resto de la prueba se reduce a implementar la aproximación en ley $V_n \approx U$.

Implementación técnica II

Para manejar el término T_1, tomamos V_m independiente de las ξ_p's, con

$$\mathbb{P}[V_m = \log(q)/\lambda_m] = \frac{\log(q)}{q\lambda_m},$$

Podemos escribir

$$T_1 = \mathbb{E}[f'(S_m + V_m)] - \mathbb{E}[f'(S_m + U)].$$

El resto de la prueba se reduce a implementar la aproximación en ley $V_n \approx U$. La tarea requiere conocimiento muy fino de las propiedades de f.

Resultado principal

Theorem (Jaramillo, Yang)
Se tiene que

$$\Psi_H(n,m) = n\Upsilon(n,m)\left(\rho \circ \Upsilon(n,m) + O(\Upsilon(n,m)\log\log(m)/\log(m))\right),$$

uniformemente sobre $16 \leq m \leq n$.

References

- Jaramillo Yang (por publicarse en Arxiv). Approximation of smooth numbers for Harmonic samples.
- A. Hildebrand. Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis. Mathematika (1984).
- A. Hildebrand. On the number of positive integers x and free of prime factors greater than or equal to y. J. Number Theory (1986).
- A Natural Probabilistic Model on the Integers and its Relation to Dickman-Type Distributions and Buchstab's Function Ross G. Pinsky (2016).
- Dickman Approximation of weighted random sums in the Kolmogorov distance. Chinmoy Bhattacharjee, Matthias Schulte (2022).