Teorema de Erdös-Kac cuantitativo

Trabajo conjunto con X. Yang y L. Chen

Arturo Jaramillo Gil

Université du Luxembourg
National University of Singapore

Objetivo

Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos.

Objetivo

Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos. Sea $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función

$$\omega(n) := |\{p \in \mathcal{P};\ p \text{ divide } n\}|.$$

Objetivo

Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos. Sea $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función

$$\omega(n) := |\{p \in \mathcal{P};\ p \text{ divide } n\}|.$$

Por ejemplo, $\omega(54) = \omega(2 \times 3^2) = 2$.

Objetivo

Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos. Sea $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función

$$\omega(n) := |\{p \in \mathcal{P};\ p \text{ divide } n\}|.$$

Por ejemplo, $\omega(54) = \omega(2 \times 3^2) = 2$. Sea J_n una variable aleatoria con distribución uniforme en $\{1, \dots, n\}$.

Objetivo

Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos. Sea $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función

$$\omega(n) := |\{p \in \mathcal{P};\ p \text{ divide } n\}|.$$

Por ejemplo, $\omega(54) = \omega(2 \times 3^2) = 2$. Sea J_n una variable aleatoria con distribución uniforme en $\{1, \ldots, n\}$.

Objetivos

- Estudiar el comportamiento de la ley de $\omega(J_n)$, cuando n es grande.

Objetivo

Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos. Sea $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función

$$\omega(n) := |\{p \in \mathcal{P};\ p \text{ divide } n\}|.$$

Por ejemplo, $\omega(54) = \omega(2 \times 3^2) = 2$. Sea J_n una variable aleatoria con distribución uniforme en $\{1, \dots, n\}$.

Objetivos

- Estudiar el comportamiento de la ley de $\omega(J_n)$, cuando n es grande.
- ¿Generalizar al caso en que ω es reemplazada por una función general $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que únicamente satisfaga $\psi(ab) = \psi(a) + \psi(b)$ para $a, b \in \mathbb{N}$ coprimos?

Plan

1. Contexto histórico
2. Resultados principales
3. Ideas de las pruebas
   - Simplificación del modelo
   - Método de Stein

Contexto histórico

Teorema de Erdös-Kac clásico (1940)

Punto de inicio: Paul Erdös y Mark Kac probaron que

$$Z_n := \frac{\omega(J_n) - \log\log(n)}{\sqrt{\log\log(n)}} \tag{1}$$

converge en distribución hacia una variable gaussiana estándar $\mathcal{N}$.

Teorema de Erdös-Kac clásico (1940)

Punto de inicio: Paul Erdös y Mark Kac probaron que

$$Z_n := \frac{\omega(J_n) - \log\log(n)}{\sqrt{\log\log(n)}} \tag{1}$$

converge en distribución hacia una variable gaussiana estándar $\mathcal{N}$.

Intuición: Definamos $\mathcal{P}_n := \mathcal{P} \cap [1, n]$.

Teorema de Erdös-Kac clásico (1940)

Punto de inicio: Paul Erdös y Mark Kac probaron que

$$Z_n := \frac{\omega(J_n) - \log\log(n)}{\sqrt{\log\log(n)}} \tag{1}$$

converge en distribución hacia una variable gaussiana estándar $\mathcal{N}$.

Intuición: Definamos $\mathcal{P}_n := \mathcal{P} \cap [1, n]$. La convergencia en (1) se intuye de la descomposición

$$\omega(J_n) = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \mathbb{1}_{\{p \text{ divide } J_n\}}. \tag{2}$$

Pregunta

Podemos estimar el error de la aproximación gaussiana con respecto a una métrica adecuada? como la distancia definida por

$$d_{\mathrm{K}}(X, Y) = \sup_{z \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}[X \leq z] - \mathbb{P}[Y \leq z]|$$

Pregunta

Podemos estimar el error de la aproximación gaussiana con respecto a una métrica adecuada? como la distancia definida por

$$d_{\mathrm{K}}(X, Y) = \sup_{z \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}[X \leq z] - \mathbb{P}[Y \leq z]|$$

o

$$d_1(X, Y) = \sup_{h \in \mathrm{Lip}_1} |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(Y)]|,$$

donde Lip_1 es la familia de funciones Lipschitz con constante de Lipschitz menor o igual a uno.

Pregunta

Podemos estimar el error de la aproximación gaussiana con respecto a una métrica adecuada? como la distancia definida por

$$d_{\mathrm{K}}(X,Y) = \sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}[X \le z] - \mathbb{P}[Y \le z]|$$

o

$$d_1(X,Y) = \sup_{h\in\mathrm{Lip}_1} |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(Y)]|,$$

donde Lip_1 es la familia de funciones Lipschitz con constante de Lipschitz menor o igual a uno. Definimos adicionalmente

$$d_{TV}(X,Y) = \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A]|.$$

Conjetura de LeVeque (1949)

LeVeque mostró que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \frac{\log \log \log(n)}{\log \log(n)^{\frac{1}{4}}},$$

para una constante $C > 0$ independiente de n.

Conjetura de LeVeque (1949)

LeVeque mostró que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \frac{\log \log \log(n)}{\log \log(n)^{\frac{1}{4}}},$$

para una constante $C > 0$ independiente de n. También conjeturó que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \log \log(n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Conjetura de LeVeque (1949)

LeVeque mostró que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \frac{\log \log \log(n)}{\log \log(n)^{\frac{1}{4}}},$$

para una constante $C > 0$ independiente de n. También conjeturó que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \log \log(n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ésto fue demostrado posteriormente por Rényi y Turán (1958).

Conjetura de LeVeque (1949)

LeVeque mostró que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \frac{\log\log\log(n)}{\log\log(n)^{\frac{1}{4}}},$$

para una constante $C > 0$ independiente de n. También conjeturó que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \log\log(n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ésto fue demostrado posteriormente por Rényi y Turán (1958). La idea central consiste en aproximar $\mathbb{E}[e^{\mathbf{i}\lambda\omega(J_n)}]$.

Conjetura de LeVeque (1949)

LeVeque mostró que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \frac{\log\log\log(n)}{\log\log(n)^{\frac{1}{4}}},$$

para una constante $C > 0$ independiente de n. También conjeturó que

$$d_{\mathrm{K}}(Z_n, \mathcal{N}) \leq C \log\log(n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ésto fue demostrado posteriormente por Rényi y Turán (1958). La idea central consiste en aproximar $\mathbb{E}[e^{\mathbf{i}\lambda\omega(J_n)}]$.

Ingredientes principales: fórmula de Perron, series de Dirichlet y algunas estimaciones de la función zeta de Riemann ζ alrededor de la banda $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \Re(z) = 1\}$.

Un enfoque probabilista

Para $p \in \mathcal{P}$ dado, definimos $\alpha_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ como

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(k)}.$$

Un enfoque probabilista

Para $p \in \mathcal{P}$ dado, definimos $\alpha_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ como

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(k)}.$$

Ejemplo: si $k = 54 = 2 * 3^2$, entonces...

Un enfoque probabilista

Para $p \in \mathcal{P}$ dado, definimos $\alpha_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ como

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(k)}.$$

Ejemplo: si $k = 54 = 2 * 3^2$, entonces...

- $\alpha_2(54) =$

Un enfoque probabilista

Para $p \in \mathcal{P}$ dado, definimos $\alpha_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ como

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(k)}.$$

Ejemplo: si $k = 54 = 2 * 3^2$, entonces...

- $\alpha_2(54) = 1$,

Un enfoque probabilista

Para $p \in \mathcal{P}$ dado, definimos $\alpha_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ como

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(k)}.$$

Ejemplo: si $k = 54 = 2 * 3^2$, entonces...

- $\alpha_2(54) = 1$,
- $\alpha_3(54) = 2$,

Un enfoque probabilista

Para $p \in \mathcal{P}$ dado, definimos $\alpha_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ como

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(k)}.$$

Ejemplo: si $k = 54 = 2 * 3^2$, entonces...

- $\alpha_2(54) = 1$,
- $\alpha_3(54) = 2$,
- $\alpha_5(54) = 0$.

Un enfoque probabilista

Para $p \in \mathcal{P}$ dado, definimos $\alpha_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ como

$$k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(k)}.$$

Ejemplo: si $k = 54 = 2 * 3^2$, entonces...

- $\alpha_2(54) = 1$,
- $\alpha_3(54) = 2$,
- $\alpha_5(54) = 0$.

¿Cual es el comportamiento de $\alpha_p(J_n)$?

Aproximación para $\alpha_p(J_n)$

Sea $\{\xi_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ una familia de variables geométricas independientes con ley

$$\mathbb{P}[\xi_p = k] = p^{-k}(1 - p^{-1}),$$

para $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aproximación para $\alpha_p(J_n)$

Sea $\{\xi_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ una familia de variables geométricas independientes con ley

$$\mathbb{P}[\xi_p = k] = p^{-k}(1-p^{-1}),$$

para $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nuestra heurística se basa en la bien conocida aproximación

$$(\alpha_{p_1}(J_n), \ldots, \alpha_{p_m}(J_n)) \overset{Ley}{\approx} (\xi_{p_1}, \ldots, \xi_{p_m}),$$

valida para $m \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_m$ distintos.

Resultados principales

Teorema del límite central para funciones aditivas

Sea $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(ab) = \psi(a) + \psi(b)$ para a, b co-primos. Supondremos que

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} |\psi(p)| < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 2} \frac{\psi(p^k)^2}{p^k} < \infty.$$

Teorema del límite central para funciones aditivas

Sea $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(ab) = \psi(a) + \psi(b)$ para a, b co-primos. Supondremos que

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} |\psi(p)| < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k \geq 2} \frac{\psi(p^k)^2}{p^k} < \infty.$$

Definamos

$$\mu_n = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p) p^{-1} (1 - p^{-1})^{-1}$$

$$\sigma_n^2 = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p)^2 p^{-1} (1 - p^{-1})^{-2}.$$

Resultado principal para la distancia de Kolmogorov

Theorem (Chen, Jaramillo, Yang)

Bajo las condiciones anteriores,

$$d_{\mathrm{K}}\left(\frac{\psi(J_n)-\mu_n}{\sigma_n},\mathcal{N}\right)\leq\frac{\kappa_1}{\sigma_n}+\frac{\kappa_2}{\sigma_n^2}+\frac{\kappa_3\log\log(n)}{\log(n)}$$
$$d_1\left(\frac{\psi(J_n)-\mu_n}{\sigma_n},\mathcal{N}\right)\leq\frac{\kappa_4}{\sigma_n}+\frac{\kappa_5}{\sigma_n^2}+\kappa_6\frac{\log\log(n)^{\frac{1}{2}}}{\log(n)^{\frac{1}{2}}},$$

donde $\kappa_1,\ldots,\kappa_6$ son explícitas en función de ψ.

Ideas de las pruebas

Modelo simplificado: la distribución harmónica H_n

Sea H_n una v.a. con $\mathbb{P}[H_n = k] = \frac{1}{L_n k}$ para $k \leq n$, donde $L_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Modelo simplificado: la distribución harmónica H_n

Sea H_n una v.a. con $\mathbb{P}[H_n = k] = \frac{1}{L_n k}$ para $k \leq n$, donde $L_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Notemos que

$$H_n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\alpha_p(H_n)}.$$

Sea H_n una v.a. con $\mathbb{P}[H_n = k] = \frac{1}{L_n k}$ para $k \leq n$, donde $L_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Notemos que

$$H_n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\alpha_p(H_n)}.$$

Proposition

Supongamos que $n \geq 21$. Definamos el evento

$$A_n := \Big\{ \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\xi_p} \leq n \Big\}. \tag{3}$$

Modelo simplificado: la distribución harmónica H_n

Sea H_n una v.a. con $\mathbb{P}[H_n = k] = \frac{1}{L_n k}$ para $k \leq n$, donde $L_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Notemos que

$$H_n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\alpha_p(H_n)}.$$

Proposition

Supongamos que $n \geq 21$. Definamos el evento

$$A_n := \Big\{ \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\xi_p} \leq n \Big\}. \tag{3}$$

Se tiene que

$$\mathcal{L}(\psi(H(n))) = \mathcal{L}(\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p^{\alpha_p(H_n)})) = \mathcal{L}(\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p^{\xi_p}) | A_n). \tag{4}$$

Relación con la distribución harmónica

Sea $\{Q(k)\}_{k\geq 1}$ una sucesión de variables independientes entre si e independientes de (J_n, H_n), donde $Q(k)$ se distribuye uniforme sobre

$$\mathcal{P}_k^* := \{1\} \cup \mathcal{P}_k.$$

Relación con la distribución harmónica

Sea $\{Q(k)\}_{k\geq 1}$ una sucesión de variables independientes entre si e independientes de (J_n, H_n), donde $Q(k)$ se distribuye uniforme sobre

$$\mathcal{P}_k^* := \{1\} \cup \mathcal{P}_k.$$

Lemma (Chen, Jaramillo y Yang)

Para $n \geq 21$,

$$d_{\mathrm{TV}}(J_n, H_n Q(n/H_n)) \leq 61 \frac{\log \log n}{\log n}$$

Relación con la distribución harmónica

Sea $\{Q(k)\}_{k\geq 1}$ una sucesión de variables independientes entre si e independientes de (J_n, H_n), donde $Q(k)$ se distribuye uniforme sobre

$$\mathcal{P}_k^* := \{1\} \cup \mathcal{P}_k.$$

Lemma (Chen, Jaramillo y Yang)

Para $n \geq 21$,

$$d_{\mathrm{TV}}(J_n, H_n Q(n/H_n)) \leq 61 \frac{\log\log n}{\log n}$$
$$\mathbb{P}[Q(n/H_n) \textit{ divide } H_n] \leq 6.4 \frac{\log\log n}{\log n}.$$

Relación entre $\psi(J_n)$ y $\psi(H_n)$

Ya que H_n y $Q(n/H_n)$ son primos relativos con alta probabilidad,

Relación entre $\psi(J_n)$ y $\psi(H_n)$

Ya que H_n y $Q(n/H_n)$ son primos relativos con alta probabilidad,

$$\frac{\psi(J_n)}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n Q(n/H_n))}{\sigma_n}$$

Relación entre $\psi(J_n)$ y $\psi(H_n)$

Ya que H_n y $Q(n/H_n)$ son primos relativos con alta probabilidad,

$$\frac{\psi(J_n)}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n Q(n/H_n))}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n) + \psi(Q(n/H_n))}{\sigma_n}$$

Relación entre $\psi(J_n)$ y $\psi(H_n)$

Ya que H_n y $Q(n/H_n)$ son primos relativos con alta probabilidad,

$$\frac{\psi(J_n)}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n Q(n/H_n))}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n) + \psi(Q(n/H_n))}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n)}{\sigma_n}$$

Relación entre $\psi(J_n)$ y $\psi(H_n)$

Ya que H_n y $Q(n/H_n)$ son primos relativos con alta probabilidad,

$$\frac{\psi(J_n)}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n Q(n/H_n))}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n) + \psi(Q(n/H_n))}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n)}{\sigma_n}$$

Relación entre $\psi(J_n)$ y $\psi(H_n)$

Ya que H_n y $Q(n/H_n)$ son primos relativos con alta probabilidad,

$$\frac{\psi(J_n)}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n Q(n/H_n))}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n) + \psi(Q(n/H_n))}{\sigma_n} \overset{d_1}{\approx} \frac{\psi(H_n)}{\sigma_n}$$

Recordemos que condicional sobre $A_n := \left\{ \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\xi_p} \leq n \right\}$,

$$\psi(H_n) \overset{Law}{=} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p^{\xi_p}).$$

Linearización para $\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

Linearización para $\sum_{p\in\mathcal{P}_n} \psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

- Toma el valor cero con probabilidad $1 - p^{-1}$

Linearización para $\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

- Toma el valor cero con probabilidad $1 - p^{-1}$
- Toma el valor $\psi(p)$ con probabilidad $p^{-1}(1 - p^{-1})$

Linearización para $\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

- Toma el valor cero con probabilidad $1-p^{-1}$
- Toma el valor $\psi(p)$ con probabilidad $p^{-1}(1-p^{-1})$
- Toma un valor distinto a cero o $\psi(p)$ con probabilidad a lo más p^{-2}

Linearización para $\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

- Toma el valor cero con probabilidad $1 - p^{-1}$
- Toma el valor $\psi(p)$ con probabilidad $p^{-1}(1 - p^{-1})$
- Toma un valor distinto a cero o $\psi(p)$ con probabilidad a lo más p^{-2}

Obaservación: $\psi(p)\xi_p$ satisface las mismas condiciones.

Linearización para $\sum_{p\in\mathcal{P}_n} \psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

- Toma el valor cero con probabilidad $1 - p^{-1}$
- Toma el valor $\psi(p)$ con probabilidad $p^{-1}(1 - p^{-1})$
- Toma un valor distinto a cero o $\psi(p)$ con probabilidad a lo más p^{-2}

Obaservación: $\psi(p)\xi_p$ satisface las mismas condiciones. Se puede probar que condicional a A_n, $\sum_{p\in\mathcal{P}_n} \psi(p^{\xi_p}) \overset{d_1}{\approx} \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \psi(p)\xi_p$.

Linearización para $\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

- Toma el valor cero con probabilidad $1-p^{-1}$
- Toma el valor $\psi(p)$ con probabilidad $p^{-1}(1-p^{-1})$
- Toma un valor distinto a cero o $\psi(p)$ con probabilidad a lo más p^{-2}

Obaservación: $\psi(p)\xi_p$ satisface las mismas condiciones. Se puede probar que condicional a A_n, $\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p^{\xi_p}) \overset{d_1}{\approx} \sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p)\xi_p$.

Linearización para $\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

- Toma el valor cero con probabilidad $1-p^{-1}$
- Toma el valor $\psi(p)$ con probabilidad $p^{-1}(1-p^{-1})$
- Toma un valor distinto a cero o $\psi(p)$ con probabilidad a lo más p^{-2}

Obaservación: $\psi(p)\xi_p$ satisface las mismas condiciones. Se puede probar que condicional a A_n, $\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p^{\xi_p}) \overset{d_1}{\approx} \sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p)\xi_p$.

El problema se reduce a estimar

$$d_1\left(Ley\left(\frac{\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p)\xi_p-\mu_n}{\sigma_n}\mid A_n\right),\mathcal{N}\right).$$

Linearización para $\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p^{\xi_p})$

Finalmente, observamos que $\psi(p^{\xi_p})$ satisface

- Toma el valor cero con probabilidad $1-p^{-1}$
- Toma el valor $\psi(p)$ con probabilidad $p^{-1}(1-p^{-1})$
- Toma un valor distinto a cero o $\psi(p)$ con probabilidad a lo más p^{-2}

Obaservación: $\psi(p)\xi_p$ satisface las mismas condiciones. Se puede probar que condicional a A_n, $\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p^{\xi_p}) \overset{d_1}{\approx} \sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p)\xi_p$.

El problema se reduce a estimar

$$d_1\left(Ley\left(\frac{\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\psi(p)\xi_p-\mu_n}{\sigma_n}\mid A_n\right),\mathcal{N}\right).$$

Usaremos método de Stein.

Método de Stein

Lemma (Lema de Stein)
Para toda función suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[f'(\mathcal{N})] = \mathbb{E}[\mathcal{N} f(\mathcal{N})]$$

Método de Stein

Lemma (Lema de Stein)
Para toda función suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[f'(\mathcal{N})] = \mathbb{E}[\mathcal{N} f(\mathcal{N})]$$

Heurística de Stein: si X es un avariable $\mathbb{R}$-valuada, tal que

$$\mathbb{E}[f'(X)] \approx \mathbb{E}[X f(X)],$$

para una clase suficientemente extensa de funciones f, entonces Z se aproxima a $\mathcal{N}$.

Método de Stein

Lemma
Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* 1*-Lipchitz, entonces la ecuación*

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(\mathcal{N})]$$

tiene una solución única $f = f_h$*,*

Método de Stein

Lemma
Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* 1*-Lipchitz, entonces la ecuación*

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(\mathcal{N})]$$

tiene una solución única $f = f_h$*, que satisface*

$$\sup_{w\in\mathbb{R}} |f_h(w)| \leq 2 \qquad \sup_{w\in\mathbb{R}} |f_h'(w)| \leq \sqrt{2/\pi} \qquad \sup_{w\in\mathbb{R}} |f_h'(w)| \leq 2. \tag{5}$$

Lemma
Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 1-Lipchitz, entonces la ecuación

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(\mathcal{N})]$$

tiene una solución única $f = f_h$, que satisface

$$\sup_{w\in\mathbb{R}} |f_h(w)| \leq 2 \qquad \sup_{w\in\mathbb{R}} |f_h'(w)| \leq \sqrt{2/\pi} \qquad \sup_{w\in\mathbb{R}} |f_h'(w)| \leq 2. \qquad (5)$$

Por lo tanto, si X es una variable aleatoria,

$$d_K(X, \mathcal{N}) \leq \sup_f |\mathbb{E}[f'(X) - Xf(X)]|$$

donde f pertenece a la familia de funciones que satisfacen (5).

Representación en el espacio Poisson

Definamos

$$W_n := \frac{\sum_{p\in\mathcal{P}_n} \psi(p)\xi_p - \mu_n}{\sigma_n}$$

y $I_n := \mathbb{1}_{A_n}$.

Representación en el espacio Poisson

Definamos

$$W_n := \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p)\xi_p - \mu_n}{\sigma_n}$$

y $I_n := \mathbb{1}_{A_n}$. Se puede verificar que

$$|\mathbb{E}[Z_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| = \mathbb{P}[A_n]^{-1}|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]|$$

.

Representación en el espacio Poisson

Definamos

$$W_n := \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p)\xi_p - \mu_n}{\sigma_n}$$

y $I_n := \mathbb{1}_{A_n}$. Se puede verificar que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Z_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| &= \mathbb{P}[A_n]^{-1} |\mathbb{E}[f(W_n) W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n) I_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n) {\color{red}W_n} I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n) I_n]|. \end{aligned}$$

Representación en el espacio Poisson

Definamos

$$W_n := \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p)\xi_p - \mu_n}{\sigma_n}$$

y $I_n := \mathbb{1}_{A_n}$. Se puede verificar que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Z_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| &= \mathbb{P}[A_n]^{-1} |\mathbb{E}[f(W_n) W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n) I_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n) W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n) I_n]|. \end{aligned}$$

Representación en el espacio Poisson

Definamos

$$W_n := \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p)\xi_p - \mu_n}{\sigma_n}$$

y $I_n := \mathbb{1}_{A_n}$. Se puede verificar que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Z_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| &= \mathbb{P}[A_n]^{-1}|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n){\color{red}W_n}I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]|. \end{aligned}$$

Para estimar el lado derecho, representaremos W_n como un funcional de un proceso Poisson.

Representación en el espacio Poisson

Definamos

$$W_n := \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p)\xi_p - \mu_n}{\sigma_n}$$

y $I_n := \mathbb{1}_{A_n}$. Se puede verificar que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Z_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| &= \mathbb{P}[A_n]^{-1}|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]|. \end{aligned}$$

Para estimar el lado derecho, representaremos W_n como un funcional de un proceso Poisson. Consideremos el espacio

$$\mathbb{X} := \{(p, k) : p \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Representación en el espacio Poisson

Definamos

$$W_n := \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \psi(p)\xi_p - \mu_n}{\sigma_n}$$

y $I_n := \mathbb{1}_{A_n}$. Se puede verificar que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Z_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| &= \mathbb{P}[A_n]^{-1}|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]|. \end{aligned}$$

Para estimar el lado derecho, representaremos W_n como un funcional de un proceso Poisson. Consideremos el espacio

$$\mathbb{X} := \{(p,k) : p \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Sea η un proceso posobre $\mathbb{X}$, con intensidad $\lambda : \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$\lambda(p,k) = \frac{1}{kp^k}, \quad \textit{para } p \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{N}.$$

Método de Stein

Usando funciones características, se puede ver que

$$W_n \overset{Ley}{=} \tilde{\eta}(\rho_n), \tag{6}$$

donde $\tilde{\eta} = \eta(p,k) - \mathbb{E}[\eta(p,k)]$ es la compensación de $\eta(p,k)$ y

$$\rho_n(k,p) := \sigma_n^{-1} k\psi(p)\mathbb{1}_{\{p\in\mathcal{P}_n\}}. \tag{7}$$

Usando funciones características, se puede ver que

$$W_n \overset{Ley}{=} \tilde{\eta}(\rho_n), \tag{6}$$

donde $\tilde{\eta} = \eta(p,k) - \mathbb{E}[\eta(p,k)]$ es la compensación de $\eta(p,k)$ y

$$\rho_n(k,p) := \sigma_n^{-1} k \psi(p) \mathbb{1}_{\{p \in \mathcal{P}_n\}}. \tag{7}$$

Supondremos que la identidad se cumple puntualmente.

Método de Stein

Usando funciones características, se puede ver que

$$W_n \stackrel{Ley}{=} \tilde{\eta}(\rho_n), \tag{6}$$

donde $\tilde{\eta} = \eta(p,k) - \mathbb{E}[\eta(p,k)]$ es la compensación de $\eta(p,k)$ y

$$\rho_n(k,p) := \sigma_n^{-1} k\psi(p)\mathbb{1}_{\{p\in\mathcal{P}_n\}}. \tag{7}$$

Supondremos que la identidad se cumple puntualmente. Como consecuencia, si $G_n(\eta)$, para cierta función G_n,

Método de Stein

Usando funciones características, se puede ver que

$$W_n \overset{Ley}{=} \tilde{\eta}(\rho_n), \tag{6}$$

donde $\tilde{\eta} = \eta(p,k) - \mathbb{E}[\eta(p,k)]$ es la compensación de $\eta(p,k)$ y

$$\rho_n(k,p) := \sigma_n^{-1} k \psi(p) \mathbb{1}_{\{p \in \mathcal{P}_n\}}. \tag{7}$$

Supondremos que la identidad se cumple puntualmente. Como consecuencia, si $G_n(\eta)$, para cierta función G_n,

$$\mathbb{E}[\tilde{\eta}(\rho_n) G_n(\eta)] = \int_{\mathbb{X}} \rho_n(x) \mathbb{E}[D_x G_n(\eta)] \lambda(dx), \tag{8}$$

donde $D_x G_n(\eta) := G_n(\eta + \delta_x) - G_n(\eta)$.

Método de Stein

Por la fórmula anterior,

$$\mathbb{E}[W_n f(W_n)] = \int_{\mathbb{X}} \rho_n(x) \mathbb{E}[D_x G_n(\eta)] \lambda(dx).$$

Para el caso en que $G_n = f(W_n) I_n$, se puede verificar la aproximación $D_x(f(W_n)I_n) \approx f'(W_n)\rho_n(x) I_n$, de manera que

$$\mathbb{E}[W_n f(W_n) I_n] \approx \int_{\mathbb{X}} \rho_n(x)^2 \mathbb{E}[f'(W_n) I_n] \lambda(dx) = \mathbb{E}[f'(W_n) I_n].$$

Método de Stein

Del anterior análisis se sigue que

$$d_1(Z_n, \mathcal{N})$$

Método de Stein

Del anterior análisis se sigue que

$$d_1(Z_n, \mathcal{N}) \approx d_1(Ley(W_n \mid A_n), \mathcal{N})$$

Método de Stein

Del anterior análisis se sigue que

$$\begin{aligned} d_1(Z_n, \mathcal{N}) &\approx d_1(Ley(W_n \mid A_n), \mathcal{N}) \\ &\leq |\mathbb{E}[W_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| \end{aligned}$$

Método de Stein

Del anterior análisis se sigue que

$$\begin{aligned} d_1(Z_n, \mathcal{N}) &\approx d_1(Ley(W_n \mid A_n), \mathcal{N}) \\ &\leq |\mathbb{E}[W_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]| \end{aligned}$$

Método de Stein

Del anterior análisis se sigue que

$$\begin{aligned} d_1(Z_n, \mathcal{N}) &\approx d_1(Ley(W_n \mid A_n), \mathcal{N}) \\ &\leq |\mathbb{E}[W_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]| \approx 0 \end{aligned}$$

Método de Stein

Del anterior análisis se sigue que

$$\begin{aligned} d_1(Z_n, \mathcal{N}) &\approx d_1(Ley(W_n \mid A_n), \mathcal{N}) \\ &\leq |\mathbb{E}[W_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]| \approx 0 \end{aligned}$$

Método de Stein

Del anterior análisis se sigue que

$$\begin{aligned} d_1(Z_n, \mathcal{N}) &\approx d_1(Ley(W_n \mid A_n), \mathcal{N}) \\ &\leq |\mathbb{E}[W_n f(W_n) - f'(W_n)|A_n]| \\ &\leq 2|\mathbb{E}[f(W_n)W_n I_n] - \mathbb{E}[f'(W_n)I_n]| \approx 0 \end{aligned}$$

El resultado se sigue de una estimación adecuada de las aproximaciones.

Caso Poisson

Theorem (Chen, Jaramillo y Yang)

Supongamos que

$$\lambda_n := \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{\psi(p)}{p-1} > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Caso Poisson

Theorem (Chen, Jaramillo y Yang)

Supongamos que

$$\lambda_n := \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{\psi(p)}{p-1} > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Sea M_n una variable Poisson con intensidad λ_n. Entonces,

$$d_{TV}(\psi(J_n), M_n) \leq \frac{\gamma_1}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{\gamma_2}{\lambda_n} + \frac{2\gamma_1}{\lambda_n} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{|\psi(p) - 1|}{p}. \tag{10}$$

para $\gamma_1, \dots, \gamma_3$ explícitas en términos de ψ.

Referencias

Chen L., Jaramillo A., Yang X. A probabilistic approach to the Erdös-Kac theorem for additive functions. Soon in Arxiv.

R. Arratia. On the amount of dependence in the prime factorization of a uniform random integer. In Contemporary combinatorics, volume 10 of Bolyai Soc. Math. Stud., pages 29–91. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.

A. D. Barbour, E. Kowalski, and A. Nikeghbali. Mod-discrete expansions. Probab. Theory Related Fields, 158(3-4):859–893, 2014.

Adam J. Harper. Two new proofs of the Erdös-Kac theorem, with bound on the rate of convergence, by Stein's method for distributional approximations. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 147(1):95–114, 2009.