Fluctuaciones del espectro de procesos gaussianos matriciales

Colaboración con Mario Díaz y Juan Carlos Pardo

Arturo Jaramillo Gil

Université du Luxembourg
National University of Singapore

Objetivo

Ingredientes

- Colección $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t);\ t \geq 0)$ de procesos gaussianos centrados con valores en el conjunto de matrices reales simétricas.

Objetivo

Ingredientes

- Colección $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t);\ t \geq 0)$ de procesos gaussianos centrados con valores en el conjunto de matrices reales simétricas.
- $(\mu_t^{(n)}\ ;\ n \geq 1)$ es la medida que asigna masa $\frac{1}{n}$ a cada eigenvalor de $Y^{(n)}(t)$.

Objetivo

Ingredientes

- Colección $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t);\ t \geq 0)$ de procesos gaussianos centrados con valores en el conjunto de matrices reales simétricas.
- $(\mu_t^{(n)}\ ;\ n \geq 1)$ es la medida que asigna masa $\frac{1}{n}$ a cada eigenvalor de $Y^{(n)}(t)$.

Pregunta central de la plática

Para $r \in \mathbb{N}$ fijo y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ dada, ¿qué podemos decir de

$$\left(\int_{\mathbb{R}} F(x)\mu_t^{(n)}(dx) - \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} F(x)\mu_t^{(n)}(dx)\right]\ ;\ t \geq 0\right)?$$

Estructura

Contexto histórico y relevancia del problema

Notación

Denotemos por $\mathbb{R}^{n\times n}$ al conjunto de matrices reales de dimensión $n \times n$. Sea $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t);\ t \geq 0)$ una sucesión de procesos $\mathbb{R}^{n\times n}$-valuados, definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Notación

Denotemos por $\mathbb{R}^{n\times n}$ al conjunto de matrices reales de dimensión $n\times n$. Sea $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t);\ t\geq 0)$ una sucesión de procesos $\mathbb{R}^{n\times n}$-valuados, definidos en $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Supondremos que $Y^{(n)}(t) = [Y^{(n)}_{i,j}(t)]_{1\leq i,j\leq n}$ es real y simétrica,

Notación

Denotemos por $\mathbb{R}^{n\times n}$ al conjunto de matrices reales de dimensión $n \times n$. Sea $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t);\ t \geq 0)$ una sucesión de procesos $\mathbb{R}^{n\times n}$-valuados, definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supondremos que $Y^{(n)}(t) = [Y_{i,j}^{(n)}(t)]_{1\leq i,j\leq n}$ es real y simétrica,con

$$Y_{i,j}^{(n)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} X_{i,j}(t) & \text{if } \ i < j, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} X_{i,i}(t) & \text{if } \ i = j, \end{cases} \tag{1}$$

donde $X_{i,j} := (X_{i,j}(t);\ t \geq 0)$, para $i \leq j$, son procesos gaussianos centrados i.i.d. con función de covarianza

$$R(s,t) := \mathbb{E}[X_{1,1}(s) X_{1,1}(t)].$$

Notación

Usaremos la notación

$$\sigma_s := \sqrt{R(s,s)} \qquad \text{y} \qquad \rho_{s,t} := \frac{R(s,t)}{\sigma_s \sigma_t}.$$

Notación

Usaremos la notación

$$\sigma_s := \sqrt{R(s,s)} \qquad \text{y} \qquad \rho_{s,t} := \frac{R(s,t)}{\sigma_s \sigma_t}.$$

Asumiremos que $\sigma_1 = 1$ y

(H1) Existe $\alpha > 1$, tal que para todo $T > 0$ y $t \in [0, T]$, el mapeo $s \mapsto R(s,t)$ es absolutamente continuo en $[0, T]$, y

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_0^T \left| \frac{\partial R}{\partial s}(s,t) \right|^{\alpha} \mathrm{d}s < \infty.$$

Notación

Usaremos la notación

$$\sigma_s := \sqrt{R(s,s)} \qquad \text{y} \qquad \rho_{s,t} := \frac{R(s,t)}{\sigma_s \sigma_t}.$$

Asumiremos que $\sigma_1 = 1$ y

(H1) Existe $\alpha > 1$, tal que para todo $T > 0$ y $t \in [0, T]$, el mapeo $s \mapsto R(s,t)$ es absolutamente continuo en $[0, T]$, y

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_0^T \left| \frac{\partial R}{\partial s}(s,t) \right|^{\alpha} ds < \infty.$$

(H2) Existe $\varepsilon \in (0,1)$, tal que el mapeo $s \mapsto s^{1-\varepsilon} R'(s,s)$ está acotado en intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

Notación

Ejemplos:

- Movimiento browniano.

Notación

Ejemplos:

- Movimiento browniano.
- Movimiento browniano fraccionario con parámetro de Hurst $H \in (0, 1)$.

Notación

Ejemplos:

- Movimiento browniano.
- Movimiento browniano fraccionario con parámetro de Hurst $H \in (0, 1)$.
- Proceso de Ornestein-Uhlenbeck.

Notación

Llamaremos a $Y^{(n)} := ((Y^{(n)}(t))\ ;\ t \geq 0)$ "proceso Gaussiano ortogonal" (o abreviadamente, "proceso GOE").

Notación

Llamaremos a $Y^{(n)} := ((Y^{(n)}(t))\ ;\ t \geq 0)$ "proceso Gaussiano ortogonal" (o abreviadamente, "proceso GOE").

Denotemos por $\lambda_1^{(n)}(t) \geq \cdots \geq \lambda_n^{(n)}(t)$ a los eigenvalores ordenados de $Y^{(n)}(t)$ y por $\mu_t^{(n)}$ a la distribución empírica espectral

$$\mu_t^{(n)}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i^{(n)}(t)}(\mathrm{d}x).$$

El teorema de Wigner establece que para todo $\varepsilon > 0$ y todo elemento f perteneciente al conjunto $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ de funciones continuas y acotadas,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_1^{(n)}(\mathrm{d}x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_1^{sc}(\mathrm{d}x)\right| > \epsilon\right] = 0, \tag{2}$$

donde μ_σ^{sc}, para $\sigma > 0$, denota la ley del semicirculo reescalada

$$\mu_\sigma^{sc}(\mathrm{d}x) := \frac{\mathbb{1}_{[-2\sigma,2\sigma]}(x)}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}\mathrm{d}x.$$

Teorema de Wigner funcional

En un paper de Jaramillo, Pardo y Pérez (basado en trabajos previos por Rogers, Shi, Cépa, Lepingale y Pérez-Abreu), se probó lo siguiente

Theorem

Denotemos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathtt{Pr}(\mathbb{R}))$ *a las funciones continuas, definidas en* $\mathbb{R}_+$ *con valores en medidas de probabilidad. Si* $\mu_0^{(n)}$ *convege en ley a* ν*, entonces* $\{\mu^{(n)} : n \geq 1\}$ *converge débilmente a una función determinista* $(\mu_t; t \geq 0)$*, tal que*

$$\langle \mu_t, f \rangle = \langle \nu, f \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f'(x) - f'(y)}{x - y} \frac{d}{ds}(R(s,s)) \mu_s(dx) \mu_s(dy) ds,$$

para todo $t \geq 0$ *y* $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$*.*

Fluctuaciones del teorema de Wigner

En un paper de Lytova y Pastur, se probó (en un contexto mucho más general que el antes mencionado) lo siguiente:

Theorem
Para toda $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$,

$$n \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_1^{(n)}(\mathrm{d}x) - n\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_1^{(n)}(\mathrm{d}x)\right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2), \tag{3}$$

donde $\mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$ es una variable gaussiana centrada con varianza

$$\sigma_f^2 := \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right)^2 \frac{4 - xy}{(4 - x^2)(4 - y^2)} \mu_1^{sc}(\mathrm{d}x)\mu_1^{sc}(\mathrm{d}y).$$

Existen resultados para fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, en los siguientes casos particulares:

Fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner

Existen resultados para fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, en los siguientes casos particulares:

- Las entradas $X_{i,j}$ son procesos de Ornstein-Uhlenbeck. Este problema ha sido estudiado por Israelson, Bender y Unterberger. Se sabe que el límite es Gaussiano, y se conoce explícitamente la covarianza límite.

Fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner

Existen resultados para fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, en los siguientes casos particulares:

- Las entradas $X_{i,j}$ son procesos de Ornstein-Uhlenbeck. Este problema ha sido estudiado por Israelson, Bender y Unterberger. Se sabe que el límite es Gaussiano, y se conoce explícitamente la covarianza límite.
- Las entradas $X_{i,j}$ son brownianos **complejos** y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio. Este problema ha sido estudiado por Pérez-Abreu y Tudor. Se sabe que el límite es Gaussiano, pero la covarianza del límite sólo es semi-explícita.

Resultados principales

Resultados principales (notación)

Nos interesa tener un TLC para las fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, donde $R(s,t)$ únicamente satisface **(H1)** y **(H2)** y la función de prueba tiene crecimiento polinomial.

Nos interesa tener un TLC para las fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, donde $R(s,t)$ únicamente satisface **(H1)** y **(H2)** y la función de prueba tiene crecimiento polinomial.

Definition

Si $\{\eta_n; n \geq 1\}$ son variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en un espacio métrico separable S, y η es una variable S-valuada, definida en un espacio extendido $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Decimos que η_n *converge establemente* a η, si para cada función $g : S \to \mathbb{R}$ continua y acotada y toda variable $\mathbb{R}$-valuada M, y $\mathcal{F}$-medible

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[g(\eta_n)M\right] = \mathbb{E}\left[g(\eta)M\right].$$

Resultados principales (notación)

Consideremos el conjunto de funciones de prueba

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R};\mathbb{R}) \mid f^{(4)} \text{ tiene crecimiento polinomial}\}.$$

Resultados principales (notación)

Consideremos el conjunto de funciones de prueba

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R};\mathbb{R}) \mid f^{(4)} \text{ tiene crecimiento polinomial}\}.$$

Para $f \in \mathcal{P}, F = (f_1, \ldots, f_r) \in \mathcal{P}^r$, y $z \in [0,1]$, definimos los procesos

$$\begin{aligned} Z_f^{(n)}(t) &:= n \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_t^{(n)}(dx) - n\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_t^{(n)}(dx)\right] \\ Z_F^{(n)}(t) &:= (Z_{f_1}^{(n)}(t), \ldots, Z_{f_r}^{(n)}(t)), \end{aligned}$$

Resultados principales (notación)

Consideremos el conjunto de funciones de prueba

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R};\mathbb{R}) \mid f^{(4)} \text{ tiene crecimiento polinomial}\}.$$

Para $f \in \mathcal{P}, F = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{P}^r$, y $z \in [0,1]$, definimos los procesos

$$\begin{aligned} Z_f^{(n)}(t) &:= n \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_t^{(n)}(dx) - n\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_t^{(n)}(dx)\right] \\ Z_F^{(n)}(t) &:= (Z_{f_1}^{(n)}(t), \dots, Z_{f_r}^{(n)}(t)), \end{aligned}$$

y el kernel

$$K_z(x,y) := \frac{1-z^2}{z^2(x-y)^2 - xyz(1-z)^2 + (1-z^2)^2}.$$

Resultados principales

Theorem (Díaz, Jaramillo, Pardo)

Para toda $f, g \in \mathcal{P}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}\Big[Z_f^{(n)}(s), Z_g^{(n)}(t)\Big] = 2\int_{\mathbb{R}^2} f'(x)g'(y)\nu_{\sigma_s,\sigma_t}^{\rho_{s,t}}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y),$$

donde la medida $\nu_{\sigma_s,\sigma_t}^{\rho_{s,t}}$ *es absolutamente continua, con densidad* $f_{\sigma_s,\sigma_t}^{\rho_{s,t}}(x, y)$*, dada por*

$$f_{\sigma_s,\sigma_t}^{\rho_{s,t}}(x, y) := \begin{cases} \frac{\sqrt{4\sigma_s^2 - x^2}\sqrt{4\sigma_t^2 - y^2}}{2\pi^2\sigma_s^2\sigma_t^2} \displaystyle\int_0^1 K_{z\rho_{s,t}}(x/\sigma_s, y/\sigma_t)\mathrm{d}z, & \text{if } (x, y) \in I_t, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

donde $I_t := [-2\sigma_s, 2\sigma_s] \times [-2\sigma_t, 2\sigma_t]$.

Theorem (Díaz, Jaramillo, Pardo)

Existe un proceso gaussiano con valores en $\mathbb{R}^r$*, denotado por* $\Lambda_F = ((\Lambda_{f_1}(t), \ldots, \Lambda_{f_r}(t)); t \geq 0)$*, independiente de* $\{X_{i,j}; j \geq i \geq 1\}$*, definido en un espacio de probabilidad extendido* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$*, tal que*

$$(Z_F^{(n)}(t)\ ;\ t \geq 0) \stackrel{Establemente}{\longrightarrow} \Lambda_F,$$

en la topología de convergencia uniforme sobre compactos.

Resultados principales

Theorem (Díaz, Jaramillo, Pardo)

Existe un proceso gaussiano con valores en $\mathbb{R}^r$*, denotado por* $\Lambda_F = ((\Lambda_{f_1}(t), \ldots, \Lambda_{f_r}(t)); t \geq 0)$*, independiente de* $\{X_{i,j}; j \geq i \geq 1\}$*, definido en un espacio de probabilidad extendido* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$*, tal que*

$$(Z_F^{(n)}(t)\ ;\ t \geq 0) \overset{Establemente}{\longrightarrow} \Lambda_F,$$

en la topología de convergencia uniforme sobre compactos. La ley de Λ_F *está caracterizada por su función de covarianza, la cual está dada por*

$$\mathbb{E}\left[\Lambda_{f_i}(s)\Lambda_{f_j}(t)\right] = 2\int_{\mathbb{R}^2} f_i'(x)f_j'(y)\nu_{\sigma_s,\sigma_t}^{\rho_{s,t}}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Theorem (Díaz, Jaramillo, Pardo)

Existe un proceso gaussiano con valores en $\mathbb{R}^r$*, denotado por* $\Lambda_F = ((\Lambda_{f_1}(t), \ldots, \Lambda_{f_r}(t)); t \geq 0)$*, independiente de* $\{X_{i,j}; j \geq i \geq 1\}$*, definido en un espacio de probabilidad extendido* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$*, tal que*

$$(Z_F^{(n)}(t)\ ;\ t \geq 0) \overset{Establemente}{\longrightarrow} \Lambda_F,$$

en la topología de convergencia uniforme sobre compactos. La ley de Λ_F *está caracterizada por su función de covarianza, la cual está dada por*

$$\mathbb{E}\left[\Lambda_{f_i}(s)\Lambda_{f_j}(t)\right] = 2\int_{\mathbb{R}^2} f_i'(x) f_j'(y) \nu_{\sigma_s,\sigma_t}^{\rho_{s,t}}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Más aún, para todo $t \geq 0$*, existe una constante* $C_t > 0$ *tal que*

$$d_{TV}(Z_f^{(n)}(t), \Lambda_f(t)) \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

Preliminares de cálculo de Malliavin

Definicions básicas

Sea $T > 0$ fijo. Identificando $\mathbb{R}^{n\times n}$ con $\mathbb{R}^d$, donde $d := \frac{n(n+1)}{2}$, podemos identificar al proceso matricial $(X_{i,j}(t)\ ;\ 1 \leq i \leq j \leq n,\ t \geq 0)$ con un proceso vectorial $\mathbb{R}^d$-valuado $V = (V_t^1, \ldots, V_t^d\ ;\ t \geq 0)$ con entradas i.i.d.

Sea $T > 0$ fijo. Identificando $\mathbb{R}^{n\times n}$ con $\mathbb{R}^d$, donde $d := \frac{n(n+1)}{2}$, podemos identificar al proceso matricial $(X_{i,j}(t)\ ;\ 1 \leq i \leq j \leq n,\ t \geq 0)$ con un proceso vectorial $\mathbb{R}^d$-valuado $V = (V_t^1, \ldots, V_t^d\ ;\ t \geq 0)$ con entradas i.i.d.

Denotaremos por $\mathscr{E}$ al espacio de funciones escalonadas en $[0, T]$. Consideremos el producto escalar

$$\left\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \right\rangle_{\mathfrak{H}} := \mathbb{E}\left[V_s^1 V_t^1\right], \qquad s, t \in [0, T],$$

definido en $\mathscr{E}$.

Definicions básicas

Sea $T > 0$ fijo. Identificando $\mathbb{R}^{n\times n}$ con $\mathbb{R}^d$, donde $d := \frac{n(n+1)}{2}$, podemos identificar al proceso matricial $(X_{i,j}(t)\ ;\ 1 \leq i \leq j \leq n,\ t \geq 0)$ con un proceso vectorial $\mathbb{R}^d$-valuado $V = (V_t^1, \dots, V_t^d\ ;\ t \geq 0)$ con entradas i.i.d.

Denotaremos por $\mathscr{E}$ al espacio de funciones escalonadas en $[0, T]$. Consideremos el producto escalar

$$\left\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \right\rangle_{\mathfrak{H}} := \mathbb{E}\left[V_s^1 V_t^1\right], \qquad s, t \in [0, T],$$

definido en $\mathscr{E}$. Sea $\mathfrak{H}$ el espacio de Hilbert obtenido como la completación de $\mathscr{E}$ con respecto a dicho producto interno.

Definicions básicas

Ejemplo: Si V_t^1 es un movimiento Browniano, entonces $\mathfrak{H} = L^2[0, T]$.

Definicions básicas

Ejemplo: Si V_t^1 es un movimiento Browniano, entonces $\mathfrak{H} = L^2[0, T]$.

Para todo $1 \leq i \leq d$, el mapeo $\mathbb{1}_{[0,t]} \mapsto V^i(\mathbb{1}_{[0,t]}) := V_t^i$ se puede extender a una isometría lineal, la cual denotaremos por $V^i(h)$, para $h \in \mathfrak{H}$.

Definicions básicas

Ejemplo: Si V_t^1 es un movimiento Browniano, entonces $\mathfrak{H} = L^2[0, T]$.

Para todo $1 \leq i \leq d$, el mapeo $\mathbb{1}_{[0,t]} \mapsto V^i(\mathbb{1}_{[0,t]}) := V_t^i$ se puede extender a una isometría lineal, la cual denotaremos por $V^i(h)$, para $h \in \mathfrak{H}$. Si $f \in \mathfrak{H}^d$ es de la forma $f = (f_1, \ldots, f_d)$, definimos

$$V(f) := \sum_{i=1}^{d} V^i(f_i).$$

Ejemplo: Si V_t^1 es un movimiento Browniano, entonces $\mathfrak{H} = L^2[0, T]$.

Para todo $1 \leq i \leq d$, el mapeo $\mathbb{1}_{[0,t]} \mapsto V^i(\mathbb{1}_{[0,t]}) := V_t^i$ se puede extender a una isometría lineal, la cual denotaremos por $V^i(h)$, para $h \in \mathfrak{H}$. Si $f \in \mathfrak{H}^d$ es de la forma $f = (f_1, \ldots, f_d)$, definimos

$$V(f) := \sum_{i=1}^{d} V^i(f_i).$$

Ejemplo: Si V_t^1 es un movimiento Browniano, entonces

$$V(f) = \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,T]} f_i(t) dV_t^i.$$

Descomposición en caos

Para $q \in \mathbb{N}$ fijo, definimos el q-ésimo caos de Wiener, como el subespacio

$$\mathcal{H}_q = \overline{\operatorname{span}\{H_q(V(h)) \mid \|h\|_{\mathfrak{H}^d} = 1\}} \subset L^2(\Omega; \mathcal{F}),$$

donde H_q denota al q-ésimo polinomio de Hermite, definido por $H_0 = 1$, y $H_{q+1}(x) = xH_q(x) - qH_{q-1}(x)$.

Descomposición en caos

Para $q \in \mathbb{N}$ fijo, definimos el q-ésimo caos de Wiener, como el subespacio

$$\mathcal{H}_q = \overline{\operatorname{span}\{H_q(V(h)) \mid \|h\|_{\mathfrak{H}^d} = 1\}} \subset L^2(\Omega; \mathcal{F}),$$

donde H_q denota al q-ésimo polinomio de Hermite, definido por $H_0 = 1$, y $H_{q+1}(x) = xH_q(x) - qH_{q-1}(x)$.

Theorem (Teorema de descomposición en caos)
Si $\sigma(V) = \mathcal{F}$, se tiene la descomposición ortogonal

$$L^2(\Omega, \mathbb{P}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_q.$$

Descomposición en caos

Para $q \in \mathbb{N}$ fijo, definimos el q-ésimo caos de Wiener, como el subespacio

$$\mathcal{H}_q = \overline{\text{span}\{H_q(V(h)) \mid \|h\|_{\mathfrak{H}^d} = 1\}} \subset L^2(\Omega; \mathcal{F}),$$

donde H_q denota al q-ésimo polinomio de Hermite, definido por $H_0 = 1$, y $H_{q+1}(x) = xH_q(x) - qH_{q-1}(x)$.

Theorem (Teorema de descomposición en caos)
Si $\sigma(V) = \mathcal{F}$, se tiene la descomposición ortogonal

$$L^2(\Omega, \mathbb{P}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_q.$$

La proyección de un elemento $Y \in L^2(\Omega)$, sobre el espacio $\mathcal{H}_q$, será denotada por $J_q[Y]$.

Operadores de derivada y divergencia

Para $q \in \mathbb{N}$, denotaremos por $(\mathfrak{H}^d)^{\otimes q}$ y $(\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$ al q-ésimo producto tensorial y al q-ésimo producto tensorial simetrizado de $\mathfrak{H}^d$.

Operadores de derivada y divergencia

Para $q \in \mathbb{N}$, denotaremos por $(\mathfrak{H}^d)^{\otimes q}$ y $(\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$ al q-ésimo producto tensorial y al q-ésimo producto tensorial simetrizado de $\mathfrak{H}^d$.

Definition (Operador de derivada)
Para una variable aleatoria F de la forma $F = f(V(h_1), ..., V(h_n))$, donde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial, definimos la derivada de Malliavin de F, como la variable $\mathfrak{H}^d$-valuada

$$DF = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(V(h_1), ..., V(h_n))h_k.$$

Operadores de derivada y divergencia

Para $q \in \mathbb{N}$, denotaremos por $(\mathfrak{H}^d)^{\otimes q}$ y $(\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$ al q-ésimo producto tensorial y al q-ésimo producto tensorial simetrizado de $\mathfrak{H}^d$.

Definition (Operador de derivada)
Para una variable aleatoria F de la forma $F = f(V(h_1), ..., V(h_n))$, donde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial, definimos la derivada de Malliavin de F, como la variable $\mathfrak{H}^d$-valuada

$$DF = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(V(h_1), ..., V(h_n))h_k.$$

Para $p \geq 1$, el operador D se puede extender a un subespacio $\mathbb{D}^{1,p}$, cerrado con respecto a la norma $\|F\|_{\mathbb{D}^{1,p}} := \left(\mathbb{E}\left[|F|^p\right] + \mathbb{E}\left[\|DF\|_{\mathfrak{H}}^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}$.

Operadores de derivada y divergencia

Para $q \in \mathbb{N}$, denotaremos por $(\mathfrak{H}^d)^{\otimes q}$ y $(\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$ al q-ésimo producto tensorial y al q-ésimo producto tensorial simetrizado de $\mathfrak{H}^d$.

Definition (Operador de derivada)
Para una variable aleatoria F de la forma $F = f(V(h_1), ..., V(h_n))$, donde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial, definimos la derivada de Malliavin de F, como la variable $\mathfrak{H}^d$-valuada

$$DF = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(V(h_1), ..., V(h_n))h_k.$$

Para $p \geq 1$, el operador D se puede extender a un subespacio $\mathbb{D}^{1,p}$, cerrado con respecto a la norma $\|F\|_{\mathbb{D}^{1,p}} := \left(\mathbb{E}\left[|F|^p\right] + \mathbb{E}\left[\|DF\|_{\mathfrak{H}}^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}$. Definimos D^r como la r-ésima iteración de D.

Definition (Operador de divergencia)
Denotaremos al adjunto de D, por δ. Es decir,

- δ está definido en un dominio $Dom(\delta) \subset L^2(\Omega; \mathfrak{H})$, caracterizado por la propiedad de que $u \in Dom(\delta)$ si existe una constante $c > 0$, que sólo depende de u, tal que para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$,

$$|\mathbb{E}\left[\langle DF, u\rangle_{\mathfrak{H}}\right]| \leq c\|F\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Si $u \in Dom(\delta)$, entonces $\delta(u)$ está caracterizada por la igualdad

$$\mathbb{E}\left[F\delta(u)\right] = \mathbb{E}\left[\langle DF, u\rangle_{\mathfrak{H}}\right].$$

Definition (Operador de divergencia)
Denotaremos al adjunto de D, por δ. Es decir,

- δ está definido en un dominio $Dom(\delta) \subset L^2(\Omega; \mathfrak{H})$, caracterizado por la propiedad de que $u \in Dom(\delta)$ si existe una constante $c > 0$, que sólo depende de u, tal que para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$,

$$|\mathbb{E}\left[\langle DF, u\rangle_{\mathfrak{H}}\right]| \leq c\|F\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Si $u \in Dom(\delta)$, entonces $\delta(u)$ está caracterizada por la igualdad

$$\mathbb{E}\left[F\delta(u)\right] = \mathbb{E}\left[\langle DF, u\rangle_{\mathfrak{H}}\right].$$

Análogamente, definimos δ^r como el adjunto de D^r.

El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck

Definition
El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck $\{P_t\}_{t\geq 0}$ está definido por
$P_t F := \sum_{q=0}^{\infty} e^{-qt} J_q(F) \in L^2(\Omega)$,

El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck

Definition
El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck $\{P_t\}_{t\geq 0}$ está definido por $P_t F := \sum_{q=0}^{\infty} e^{-qt} J_q(F) \in L^2(\Omega)$, y el generador del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck L, está definido por

$$LF = -\sum_{q=1}^{\infty} q J_q[F].$$

Su dominio está conformado por aquellas variables F tales que $\sum_{q=1}^{\infty} q^2 \mathbb{E}\left[J_q[F]^2\right] < \infty$.

Relaciones entre D, δ y L

La fórmula de Mehler establece que si $F \in L^2(\Omega)$ y Ψ_F es un mapeo medible de $\mathbb{R}^{\mathfrak{H}^d}$ a $\mathbb{R}$ tal que $F = \Psi_F(V)$, entonces

$$P_\theta F = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\Psi_F(e^{-\theta} V + \sqrt{1 - e^{-2\theta}}\widetilde{V})\right],$$

donde $\widetilde{\mathbb{E}}$ es una copia independiente de V. Adicionalmente, se tiene que $F \in Dom(L)$ si y sólo si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ y $DF \in Dom(\delta)$, en cuyo caso

$$LF = -\delta(DF).$$

Más aún, si $F \in L^2(\Omega)$ tiene media cero, entonces

$$-L^{-1}F = \int_{\mathbb{R}_+} P_\theta F \mathrm{d}\theta$$

Contracciones

Finalmente, introducimos la noción de contracción. Sea $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}^d$ una base ortonormal de $\mathfrak{H}^d$. Dado $f \in (\mathfrak{H}^d)^{\odot p}$, $g \in (\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$ y $r \in \{1, \dots, p \wedge q\}$, la r-ésima contracción de f y g es el elemento de $f \otimes_r g \in (\mathfrak{H}^d)^{\otimes(p+q-2r)}$ dado por

$$f \otimes_r g = \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{\infty} \langle f, b_{i_1}, \dots, b_{i_r} \rangle_{(\mathfrak{H}^d)^{\otimes r}} \otimes \langle g, b_{i_1}, \dots, b_{i_r} \rangle_{(\mathfrak{H}^d)^{\otimes r}}.$$

TLC via cálculo de Malliavin

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que $r \geq 1$ *está fijo. Consideremos vectores aleatorios* $Z_n = (Z_{1,n}, \ldots, Z_{r,n})$*,* $n \geq 1$*, con* $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$ *y* $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$*. Sea* C *una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño* r*, y sea* $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$*.*

TLC via cálculo de Malliavin

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que $r \geq 1$ *está fijo. Consideremos vectores aleatorios* $Z_n = (Z_{1,n}, \ldots, Z_{r,n})$, $n \geq 1$, *con* $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$ *y* $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$. *Sea* C *una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño* r, *y sea* $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$. *Supongamos que:*

(i) *Para todo* $i, j = 1, \ldots, r$, $\mathbb{E}[Z_{i,n} Z_{j,n}] \to C(i,j)$ *cuando* $n \to \infty$;

TLC via cálculo de Malliavin

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que $r \geq 1$ *está fijo. Consideremos vectores aleatorios* $Z_n = (Z_{1,n}, \ldots, Z_{r,n})$, $n \geq 1$, *con* $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$ *y* $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$. *Sea* C *una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño* r, *y sea* $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$. *Supongamos que:*

(i) *Para todo* $i, j = 1, \ldots, r$, $\mathbb{E}[Z_{i,n} Z_{j,n}] \to C(i,j)$ *cuando* $n \to \infty$;

(ii) *Para todo* $i = 1, \ldots, r$, $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\|DZ_{i,n}\|_{\mathfrak{H}}^4\right] < \infty$;

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que $r \geq 1$ está fijo. Consideremos vectores aleatorios $Z_n = (Z_{1,n}, \ldots, Z_{r,n})$, $n \geq 1$, con $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$ y $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$. Sea C una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño r, y sea $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$. Supongamos que:

(i) *Para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $\mathbb{E}[Z_{i,n}Z_{j,n}] \to C(i,j)$ cuando $n \to \infty$;*

(ii) *Para todo $i = 1, \ldots, r$, $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\|DZ_{i,n}\|_{\mathfrak{H}}^4\right] < \infty$;*

(iii) *Para todo $i = 1, \ldots, r$, $\mathbb{E}\left[\left\|D^2 Z_{i,n} \otimes_1 D^2 Z_{i,n}\right\|_{(\mathfrak{H}^d)^{\otimes 2}}^2\right] \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

TLC via cálculo de Malliavin

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que $r \geq 1$ está fijo. Consideremos vectores aleatorios $Z_n = (Z_{1,n}, \ldots, Z_{r,n})$, $n \geq 1$, con $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$ y $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$. Sea C una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño r, y sea $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$. Supongamos que:

(i) *Para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $\mathbb{E}[Z_{i,n} Z_{j,n}] \to C(i,j)$ cuando $n \to \infty$;*

(ii) *Para todo $i = 1, \ldots, r$, $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\|DZ_{i,n}\|_{\mathfrak{H}}^4\right] < \infty$;*

(iii) *Para todo $i = 1, \ldots, r$, $\mathbb{E}\left[\left\|D^2 Z_{i,n} \otimes_1 D^2 Z_{i,n}\right\|_{(\mathfrak{H}^d)^{\otimes 2}}^2\right] \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Entonces $Z_n \overset{Ley}{\to} \mathcal{N}_r(0, C)$ cuando $n \to \infty$.

Bosquejo de las pruebas

Condición (i)

De aquí se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big\langle -DL^{-1} Z_f^{(n)}(t), DZ_g^{(n)}(s) \Big\rangle \Big] \\
&= \frac{2}{n} \int_0^1 \mathbb{E}\Bigg[tr\Bigg(f'\big(\sigma_s(\rho_{s,t} z A(n) + \sqrt{1-\rho_{s,t}^2 z^2}\widetilde{A}(n))\big) g'\big(\sigma_t A(n)\big) \Bigg) \Bigg] dz,
\end{aligned} \tag{4}
$$

donde $A(n)$ y $\tilde{A}(n)$ GOE estándar e independientes.

Condición (i)

De aquí se sigue que

$$\mathbb{E}\left[\,\left\langle -DL^{-1}Z_f^{(n)}(t), DZ_g^{(n)}(s)\right\rangle\,\right]$$
$$= \frac{2}{n}\int_0^1 \mathbb{E}\left[tr\left(f'\left(\sigma_s(\rho_{s,t}zA(n)+\sqrt{1-\rho_{s,t}^2z^2}\widetilde{A}(n))\right)g'\left(\sigma_t A(n)\right)\right)\right]dz, \tag{4}$$

donde $A(n)$ y $\tilde{A}(n)$ GOE estándar e independientes. Por el teorema de Voiculescu, la esperanza en el lado derecho de (4) converge a

$$\tau\left[\left(f'\left(\sigma_s(\rho_{s,t}za+\sqrt{1-\rho_{s,t}^2z^2}\widetilde{a})\right)g'\left(\sigma_t a\right)\right)\right], \tag{5}$$

donde $a, \tilde{a}$ variables semicirculares independientes definidas en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \tau)$.

Condición (i)

Denotemos por U_q al q-ésimo polinomio de Chebyshev polynomial de segundo orden en $[-2, 2]$. Se sabe que si b y $\widetilde{b}$ son elementos conjuntamente semicirculares estándard, entonces

$$\tau[U_q(b)U_{q'}(\widetilde{b})] = \delta_{q,q'}\tau[b\widetilde{b}]^q.$$

Condición (i)

Denotemos por U_q al q-ésimo polinomio de Chebyshev polynomial de segundo orden en $[-2,2]$. Se sabe que si b y $\widetilde{b}$ son elementos conjuntamente semicirculares estándard, entonces

$$\tau[U_q(b)U_{q'}(\widetilde{b})] = \delta_{q,q'}\tau[b\widetilde{b}]^q.$$

Por lo tanto, si $f'(\sigma_s x) = U_q(x)$ y $g'(\sigma_t x) = U_{q'}(x)$,

$$\tau\left[\left(f'\big(\sigma_s(\rho_{s,t}za + \sqrt{1-\rho_{s,t}^2 z^2}\widetilde{a})\big)g'\big(\sigma_t a\big)\right)\right] = \delta_{q,q'}(z\rho_{s,t})^q.$$

La covarianza asintótica se obtiene entonces al expandir $f'(\sigma_s x)$ y $g'(\sigma_t x)$ en términos de polinomios de Chebyshev.

Tensión del proceso

Las condiciones (ii) y (iii) son sencillas una vez que se encuentran fórmulas adecuadas para $DZ_f^{(n)}(s)$ y $D^2 Z_f^{(n)}(s)$.

Tensión del proceso

Las condiciones (ii) y (iii) son sencillas una vez que se encuentran fórmulas adecuadas para $DZ_f^{(n)}(s)$ y $D^2 Z_f^{(n)}(s)$. Para ver que $\{Z_f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ es tensa, usamos una ecuación diferencial de Skorohod del tipo

$$Z_f^{(n)}(t) = \delta^*(\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)h(Y^{(n)}(\cdot))) + \int_0^t g(Y^{(n)}(u))du, \tag{6}$$

para ciertas funciones $h, g : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, donde δ^* es una extensión de la divergencia. Para ver que los procesos en el lado derecho son tensos usamos el criterio de Billingsley. Así, el problema se reduce a acotar momentos del tipo

$$\mathbb{E}[|\int_s^t g(Y^{(n)}(u))du|^p]$$

$$\mathbb{E}[|\delta^*(\mathbb{1}_{[s,t]}(\cdot)h(Y^{(n)}(\cdot)))|^p]$$

Bibliografía i

- Díaz M., Jaramillo A., Pardo J.C., y Pérez J.L. (2018). Functional Central Limit theorem for Matrix-valued Gaussian processes.
- Perez-Abreu V. y Tudor C. (2007). Functional Limit Theorem for Trace processes in a Dyson Brownian motion. *Communications on Stochastic Analysis*. **3** 415-428.
- Jaramillo, A., Pardo, J. y Pérez, J. (2018). Convergence of the empirical spectral distribution of a Gaussian matrix process. *Electronic Journal of Probability*.
- Israelson S. (2001). Asymptotic fluctuations of a particle system with singular interaction. *Stochastic Process and their Applications*. **93** 25-56.