



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Dominación convexa y teoremas límite

Arturo Jaramillo Gil (proyecto en progreso con James Melbourne)

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida matroidal y $\mu \sim$ Poisson.

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida matroidal y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ suma de variables negativamente asociadas y $\mu \sim$ suma de variables independientes.

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida matroidal y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ suma de variables negativamente asociadas y $\mu \sim$ suma de variables independientes.

Sean μ y ν dos medidas reales que queremos comparar con una métrica.

- $\nu \sim$ proceso de Galton Watson y μ su ley asintótica.
- $\nu \sim$ suma de Bernoulli independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida de *volumen* intrínseco y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ medida matroidal y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ suma de variables negativamente asociadas y $\mu \sim$ suma de variables independientes.

Objetivo:

Comparar μ y ν con alguna métrica con una perspectiva común:
convexidad.

Sea \mathcal{K} una familia de funciones.

Sea \mathcal{K} una familia de funciones.

Definition

Dos medidas μ y ν en \mathbb{R} satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

Sea \mathcal{K} una familia de funciones.

Definition

Dos medidas μ y ν en \mathbb{R} satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ es convexa}\}$, decimos ν domina convexamente a μ

Sea \mathcal{K} una familia de funciones.

Definition

Dos medidas μ y ν en \mathbb{R} satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ es convexa}\}$, decimos ν domina convexamente a μ ($\mu \preceq_c \nu$).

Sea \mathcal{K} una familia de funciones.

Definition

Dos medidas μ y ν en \mathbb{R} satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ es convexa}\}$, decimos ν domina convexamente a μ ($\mu \preceq_c \nu$).
- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ es creciente y convexa}\}$, decimos ν domina en orden convexo creciente a μ

Sea \mathcal{K} una familia de funciones.

Definition

Dos medidas μ y ν en \mathbb{R} satisfacen $\mu \preceq_{\mathcal{K}} \nu$ si para $V \in \mathcal{K}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} V(x)\nu(dx).$$

- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ es convexa}\}$, decimos ν domina convexamente a μ ($\mu \preceq_c \nu$).
- Si $\mathcal{K} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ es creciente y convexa}\}$, decimos ν domina en orden convexo creciente a μ ($\mu \preceq_{ic} \nu$).

Teorema de Boutsikas y Vaggelatou

Usaremos la notación $\langle f, \gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \gamma(dx)$ y $m_k[\gamma] := \langle x^k, \gamma \rangle$.

Teorema de Boutsikas y Vaggelatos

Usaremos la notación $\langle f, \gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \gamma(dx)$ y $m_k[\gamma] := \langle x^k, \gamma \rangle$.

Definition

Definimos la 2-métrica de Zolotarev, con $m \in \mathbb{N}$, como

$$\zeta_2(\mu, \nu) := \int_{t \in \mathbb{R}} |\langle (x-t)_+, \nu \rangle - \langle (x-t)_+, \mu \rangle| dt.$$

Usaremos la notación $\langle f, \gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\gamma(dx)$ y $m_k[\gamma] := \langle x^k, \gamma \rangle$.

Definition

Definimos la 2-métrica de Zolotarev, con $m \in \mathbb{N}$, como

$$\zeta_2(\mu, \nu) := \int_{t \in \mathbb{R}} |\langle (x-t)_+, \nu \rangle - \langle (x-t)_+, \mu \rangle| dt.$$

Theorem (Boutsikas and Vaggelatou, 2002)

Si $\mu \preceq_c \nu$, entonces,

$$\zeta_2(\mu, \nu) \leq \frac{1}{2}(m_2[\nu] - m_2[\mu]). \quad (1)$$

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Preguntas naturales

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Preguntas naturales

- Podemos utilizar una métrica diferente?

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Preguntas naturales

- Podemos utilizar una métrica diferente?
- Que temas interesantes son abordables mediante esta metodología?

Instancias simples de dominación convexa

Familias muy generales que exhiben dominación convexa

- Martingalas, submartingalas y supermartingalas
- Medidas con dos cruces en su densidad
- Funciones de vectores positivamente asociados
- Variables compuestas

Preguntas naturales

- Podemos utilizar una métrica diferente?
- Que temas interesantes son abordables mediante esta metodología?
- Que tipo de extensiones naturales surgen?

Un cálculo clave

Sea \mathcal{C} una clase de funciones.

Un cálculo clave

Sea \mathcal{C} una clase de funciones. Definimos

$$d_{\mathcal{C}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{C}} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle)$$

Un cálculo clave

Sea \mathcal{C} una clase de funciones. Definimos

$$d_{\mathcal{C}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{C}} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle)$$

Luego, si $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \int_a^x \int_a^s f''(t) dt ds$$

Un cálculo clave

Sea \mathcal{C} una clase de funciones. Definimos

$$d_{\mathcal{C}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{C}} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle)$$

Luego, si $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \int_a^x \int_a^s f''(t) dt ds$$

podemos llegar a

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \int_{\mathbb{R}} \Phi_{a,t}(x) f''(t) dt,$$

donde

$$\Phi_{a,t}(x) := [x - t]_+ \mathbb{1}_{\{t \geq a\}} + [t - x]_+ \mathbb{1}_{\{t < a\}}.$$

Observación: si $\mu \preceq_c \nu$, entonces $\langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu \rangle \geq 0$.

Observación: si $\mu \preceq_c \nu$, entonces $\langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu \rangle \geq 0$. Para $f \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \langle f, \nu \rangle - \langle f, \mu \rangle &= (m_1[\nu] - m_1[\mu])f'(a) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu \rangle f''(t) dt. \end{aligned}$$

Observación: si $\mu \preceq_c \nu$, entonces $\langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu \rangle \geq 0$. Para $f \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\langle f, \nu \rangle - \langle f, \mu \rangle &= (m_1[\nu] - m_1[\mu])f'(a) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu \rangle f''(t) dt.\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}\langle f, \nu \rangle - \langle f, \mu \rangle &\leq \|f''\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} (\langle \Phi_{a,t}, \nu \rangle - \langle \Phi_{a,t}, \mu \rangle) dt \\ &= \|f''\|_{\infty} (m_2[\nu] - m_2[\mu]).\end{aligned}$$

Definimos

$$d_2(\mu, \nu) := \sup_{\|f''\| \leq 1} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle)$$

Definimos

$$d_2(\mu, \nu) := \sup_{\|f''\| \leq 1} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle)$$

Si μ, ν son medidas en \mathbb{Z} , entonces

$$d_{TV} \leq 6d_2(\mu, \nu).$$

Definimos

$$d_2(\mu, \nu) := \sup_{\|f''\| \leq 1} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle)$$

Si μ, ν son medidas en \mathbb{Z} , entonces

$$d_{TV} \leq 6d_2(\mu, \nu).$$

Theorem (Jaramillo Melbourne (2023))

Para μ, ν con 2 momentos t.q. $\mu \preceq_c \nu$,

$$d_2(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(\text{Var}[\nu] - \text{Var}[\mu]).$$

Definimos

$$d_{1,2}(\mu, \nu) := \sup_{\|f'\|, \|f''\| \leq 1} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle).$$

Definimos

$$d_{1,2}(\mu, \nu) := \sup_{\|f'\|, \|f''\| \leq 1} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle).$$

Entonces

Theorem (Jaramillo Melbourne (2023))

Para μ, ν con 2 momentos t.q. $\mu \preceq_{ic} \nu$,

$$d_{1,2}(\mu, \nu) \leq (m_1[\nu] - m_1[\mu]) + \frac{1}{2}(m_2[\nu] - m_2[\mu]).$$

Definimos

$$d_{1,2}(\mu, \nu) := \sup_{\|f'\|, \|f''\| \leq 1} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle).$$

Entonces

Theorem (Jaramillo Melbourne (2023))

Para μ, ν con 2 momentos t.q. $\mu \preceq_{ic} \nu$,

$$d_{1,2}(\mu, \nu) \leq (m_1[\nu] - m_1[\mu]) + \frac{1}{2}(m_2[\nu] - m_2[\mu]).$$

Si además $m_1[\mu] = m_2[\nu]$,

$$d_2(\mu, \nu) \leq \frac{1}{2}(\text{Var}[\nu] - \text{Var}[\mu]).$$

Theorem

Sea $J \subset \mathbb{R}_+$ no acotado y $X = \{X_t\}_{t \in J}$ una martingala cuadrado integrable con ley μ_t .

Theorem

Sea $J \subset \mathbb{R}_+$ no acotado y $X = \{X_t\}_{t \in J}$ una martingala cuadrado integrable con ley μ_t . Para $s \leq t$,

$$d_2(\mu_s, \mu_t) = \frac{1}{2}(\text{Var}[\mu_t] - \text{Var}[\mu_s]).$$

Theorem

Sea $J \subset \mathbb{R}_+$ no acotado y $X = \{X_t\}_{t \in J}$ una martingala cuadrado integrable con ley μ_t . Para $s \leq t$,

$$d_2(\mu_s, \mu_t) = \frac{1}{2}(\text{Var}[\mu_t] - \text{Var}[\mu_s]).$$

Si $\sup_{t \in J} m_2[\mu_t] < \infty$,

$$d_2(\mu_s, \mu_\infty) = \frac{1}{2}(\text{Var}[\mu_\infty] - \text{Var}[\mu_s]).$$

Theorem

Sea $J \subset \mathbb{R}_+$ no acotado y $X = \{X_t\}_{t \in J}$ una martingala cuadrado integrable con ley μ_t . Para $s \leq t$,

$$d_2(\mu_s, \mu_t) = \frac{1}{2}(\text{Var}[\mu_t] - \text{Var}[\mu_s]).$$

Si $\sup_{t \in J} m_2[\mu_t] < \infty$,

$$d_2(\mu_s, \mu_\infty) = \frac{1}{2}(\text{Var}[\mu_\infty] - \text{Var}[\mu_s]).$$

Versión submartingala y versión supermartingala están disponibles con $d_{1,2}$ y desigualdad.

Un proceso de Galton-Watson en ambiente variable (GWVE)

$Z = \{Z_n : n \geq 0\}$ se construye como sigue.

Proceso de Galton Watson en ambiente variable

Un proceso de Galton-Watson en ambiente variable (GWVE)

$Z = \{Z_n : n \geq 0\}$ se construye como sigue. Sean $Q = \{q_n : n \geq 1\}$ medidas de proba en \mathbb{Z}_+ .

$$Z_0 = 1 \quad \text{y} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \chi_i^{(n)}, \quad n \geq 1,$$

donde $\{\chi_i^{(n)} : i, n \geq 1\}$ son variables independientes con $\chi_i^{(n)} \sim q_n$.

Proceso de Galton Watson en ambiente variable

Un proceso de Galton-Watson en ambiente variable (GWVE)

$Z = \{Z_n : n \geq 0\}$ se construye como sigue. Sean $Q = \{q_n : n \geq 1\}$ medidas de proba en \mathbb{Z}_+ .

$$Z_0 = 1 \quad \text{y} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \chi_i^{(n)}, \quad n \geq 1,$$

donde $\{\chi_i^{(n)} : i, n \geq 1\}$ son variables independientes con $\chi_i^{(n)} \sim q_n$.

Conexión con convexidad:

El proceso $Z_n/\mathbb{E}[Z_n]$ es una martingala.

Corollary

Sea μ_n la ley de Z_n . Entonces, bajo hipótesis adecuadas,

$$d_{TV}(\mu_n, \mu_\infty) \leq 6d_2(\mu_n, \mu_\infty) \\ = 3 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(m_2[q_n] - m_1[q_n])/m_1[q_n]^2}{m_1[q_1] \cdots m_1[q_k]} - \frac{1}{m_1[q_1] \cdots m_1[q_n]} \right).$$

Corollary

Sea μ_n la ley de Z_n . Entonces, bajo hipótesis adecuadas,

$$d_{TV}(\mu_n, \mu_\infty) \leq 6d_2(\mu_n, \mu_\infty) \\ = 3 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(m_2[q_n] - m_1[q_n])/m_1[q_n]^2}{m_1[q_1] \cdots m_1[q_k]} - \frac{1}{m_1[q_1] \cdots m_1[q_n]} \right).$$

Si q_n es constante sobre n , igual a γ ,

$$d_{TV}(\mu_n, \mu_\infty) \leq 6d_K(\mu_n, \mu_\infty) = \frac{3\text{Var}[\gamma]}{m_1[\gamma](m_1[\gamma] - 1)} m_1[\gamma]^{-n}.$$

Definition

Decimos que ν es log-concava con respecto a μ si

Definition

Decimos que ν es log-concava con respecto a μ si (i) ν es absolutamente continua respecto a μ y $\log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)$ es cóncava.

Definition

Decimos que ν es log-concava con respecto a μ si (i) ν es absolutamente continua respecto a μ y $\log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)$ es cóncava.

Ejemplos

- $\nu \sim$ Binomial y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ Suma de Bernoulli's independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ Volumen intrínseco aleatorio y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ Matroide aleatorio y $\mu \sim$ Poisson.

Definition

Decimos que ν es log-concava con respecto a μ si (i) ν es absolutamente continua respecto a μ y $\log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)$ es cóncava.

Ejemplos

- $\nu \sim$ Binomial y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ Suma de Bernoulli's independientes y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ Volumen intrínseco aleatorio y $\mu \sim$ Poisson.
- $\nu \sim$ Matroide aleatorio y $\mu \sim$ Poisson.

Lemma

Si ν es log-cóncava respecto a μ y $m_1[\mu] = m_1[\nu]$, entonces $\nu \preceq_c \mu$.

Ejemplos interesantes de log-concavidad

Sean $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ v.a.i. Bernoulli con $p_i := \mathbb{P}[\xi_i = 1]$. Decimos que S_n tiene distribución Poisson binomial si $S_n \stackrel{Ley}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Sean $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ v.a.i. Bernoulli con $p_i := \mathbb{P}[\xi_i = 1]$. Decimos que S_n tiene distribución Poisson binomial si $S_n \stackrel{\text{Ley}}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Theorem (Liggett, 1997)

*Si ν_1 y ν_2 son log-cóncavas con respecto a distribuciones binomiales de tamaños m y n respectivamente, entonces $\nu_1 * \nu_2$ es log-cóncava con respecto a cualquier distribución binomial de tamaño $m + n$.*

Consecuencias

- $S_n \preceq_c B_n$, si B_n es Binomial con tamaño n y éxito $p = m_1[S_n]/n$.
- $S_n \preceq_c M_n$, si M_n es Poisson con media $m_1[S_n]$.

Corollary

Si S_n es suma de Bernoulli's independientes, B_n es Binomial con tamaño n y éxito $p = m_1[S_n]/n$ y M_n es Poisson con media $m_1[S_n]$,

$$d_{TV}(S_n, B_n) \leq 3d_2(S_n, B_n) = 3n \left(\sum_{k=1}^n p_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n p_k \right)^2 \right)$$

$$d_{TV}(S_n, M_n) \leq 3d_2(S_n, M_n) = 3 \sum_{k=1}^n p_k^2.$$

Definition

Un matroide \mathcal{M} es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,

Definition

Un matroide \mathcal{M} es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,
- Si $S, T \in \mathcal{I}$ y $|S| < |T|$, entonces existe $x \in T \setminus S$ t.q. $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Definition

Un matroide \mathcal{M} es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,
- Si $S, T \in \mathcal{I}$ y $|S| < |T|$, entonces existe $x \in T \setminus S$ t.q. $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Definition

Un matroide \mathcal{M} es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,
- Si $S, T \in \mathcal{I}$ y $|S| < |T|$, entonces existe $x \in T \setminus S$ t.q. $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Definimos $I_k := |\{S \in \mathcal{I} ; |S| = k\}|$.

Definition

Un matroide \mathcal{M} es un par $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I} \subset 2^X$ t.q.

- Si $S \subset T$ y $T \in \mathcal{I}$, entonces $S \in \mathcal{I}$,
- Si $S, T \in \mathcal{I}$ y $|S| < |T|$, entonces existe $x \in T \setminus S$ t.q. $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Definimos $l_k := |\{S \in \mathcal{I} ; |S| = k\}|$. Sea $\mu_{\mathcal{M}}$ la medida

$$\mu_{\mathcal{M}}[k] := cl_k,$$

para $1 \leq k \leq n$ y c adecuada.

En 1972, John Mason conjeturó que si \mathcal{M} con espacio base de tamaño n ,

- $I_k^2 \geq I_{k-1}I_{k+1}$.

Conjetura de Mason

En 1972, John Mason conjeturó que si \mathcal{M} con espacio base de tamaño n ,

- $I_k^2 \geq I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})I_{k-1}I_{k+1}$.

En 1972, John Mason conjeturó que si \mathcal{M} con espacio base de tamaño n ,

- $I_k^2 \geq I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k})I_{k-1}I_{k+1}$.

En 1972, John Mason conjeturó que si \mathcal{M} con espacio base de tamaño n ,

- $l_k^2 \geq l_{k-1}l_{k+1}$.
- $l_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})l_{k-1}l_{k+1}$.
- $l_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k})l_{k-1}l_{k+1}$.

En 1972, John Mason conjeturó que si \mathcal{M} con espacio base de tamaño n ,

- $I_k^2 \geq I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k})I_{k-1}I_{k+1}$.

La log-concavidad fue resuelta por Adiprasito (2018).

En 1972, John Mason conjeturó que si \mathcal{M} con espacio base de tamaño n ,

- $I_k^2 \geq I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k})I_{k-1}I_{k+1}$.

La log-concavidad fue resuelta por Adiprasito (2018). La ultra log-concavidad fue demostrada por Huh (2018).

En 1972, John Mason conjeturó que si \mathcal{M} con espacio base de tamaño n ,

- $I_k^2 \geq I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})I_{k-1}I_{k+1}$.
- $I_k^2 \geq (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{n-k})I_{k-1}I_{k+1}$.

La log-concavidad fue resuelta por Adiprasito (2018). La ultra log-concavidad fue demostrada por Huh (2018). La ultra log-concavidad de grado n fue demostrada por Anari, (2018).

Corollary (Jaramillo-Melbourne)

Si $X \sim \mu_{\mathcal{M}}$ y M es Poisson con la misma media,

$$d_{TV}(X - 1, M) \leq 6d_2(X - 1, M) \leq 6(\text{Var}[\mu_{\mathcal{M}}] - m_1[\mu_{\mathcal{M}}] + 1).$$

Corollary (Jaramillo-Melbourne)

Si $X \sim \mu_{\mathcal{M}}$ y M es Poisson con la misma media,

$$d_{TV}(X - 1, M) \leq 6d_2(X - 1, M) \leq 6(\text{Var}[\mu_{\mathcal{M}}] - m_1[\mu_{\mathcal{M}}] + 1).$$

Corollary

Si $\{\mathcal{M}_k\}_{k \geq 1}$, podemos formar el matroide 'suma directa'

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_n.$$

Corollary (Jaramillo-Melbourne)

Si $X \sim \mu_{\mathcal{M}}$ y M es Poisson con la misma media,

$$d_{TV}(X - 1, M) \leq 6d_2(X - 1, M) \leq 6(\text{Var}[\mu_{\mathcal{M}}] - m_1[\mu_{\mathcal{M}}] + 1).$$

Corollary

Si $\{\mathcal{M}_k\}_{k \geq 1}$, podemos formar el matroide 'suma directa'

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_n.$$

Si $X_n \sim \mu_{\mathcal{S}_n}$ y M_n es Poisson con la misma media,

$$d(X_n - n, \mu_{P_n}) \leq \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x \geq 2\}} x^2 \mu_{\mathcal{M}_k}(dx),$$

Qué fue lo que pasó?

Qué fue lo que pasó?

- Ingrediente 1:

$\mathcal{K} = \{V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f'' \geq 0\}$, que induce $\mu \preceq_c \nu$.

Qué fue lo que pasó?

- Ingrediente 1:

$\mathcal{K} = \{V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f'' \geq 0\}$, que induce $\mu \preceq_c \nu$.

- Ingrediente 2:

$\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; |f''| \leq 1\}$, que induce $d_2(\mu, \nu)$.

Qué fue lo que pasó?

- Ingrediente 1:

$\mathcal{K} = \{V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f'' \geq 0\}$, que induce $\mu \preceq_c \nu$.

- Ingrediente 2:

$\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; |f''| \leq 1\}$, que induce $d_2(\mu, \nu)$.

- Resultado:

cota de la forma $\langle g, \nu - \mu \rangle - \langle g, \mu \rangle$, donde $g'' = 1$.

Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada.

Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada. Definimos

$$\mathcal{K}_\psi := \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) ; |f''(t)| \leq \psi'' \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_\psi(\mu, \nu) := \sup_{f \in \mathcal{K}_\psi} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle),$$

Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada. Definimos

$$\mathcal{K}_\psi := \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) ; |f''(t)| \leq \psi'' \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_\psi(\mu, \nu) := \sup_{f \in \mathcal{K}_\psi} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle),$$

Theorem

Sean μ y ν medidas de proba t.q. ψ es integrable y $\mu \preceq_c \nu$ in I . Entonces

$$d_{\mathcal{K}_\psi}(\mu, \nu) = \langle \psi, \nu \rangle - \langle \psi, \mu \rangle.$$

Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada. Definimos

$$\mathcal{K}_\psi := \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) ; |f''(t)| \leq \psi'' \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_\psi(\mu, \nu) := \sup_{f \in \mathcal{K}_\psi} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle),$$

Theorem

Sean μ y ν medidas de proba t.q. ψ es integrable y $\mu \preceq_c \nu$ in I . Entonces

$$d_{\mathcal{K}_\psi}(\mu, \nu) = \langle \psi, \nu \rangle - \langle \psi, \mu \rangle.$$

- Aplicación fundamental para el proceso de Galton Watson

Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una medida de referencia adecuada. Definimos

$$\mathcal{K}_\psi := \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) ; |f''(t)| \leq \psi'' \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}$$
$$d_\psi(\mu, \nu) := \sup_{f \in \mathcal{K}_\psi} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle),$$

Theorem

Sean μ y ν medidas de proba t.q. ψ es integrable y $\mu \preceq_c \nu$ in I . Entonces

$$d_{\mathcal{K}_\psi}(\mu, \nu) = \langle \psi, \nu \rangle - \langle \psi, \mu \rangle.$$

- Aplicación fundamental para el proceso de Galton Watson
- Generalización donde se cambia 'tomar derivada de orden 2' por 'tomar derivada fraccionaria'.

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.
- Ajustes para incluir el TLC.

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.
- Ajustes para incluir el TLC.
- Instancias particulares de matroides.

Algunos temas que aún quedarán abiertos:

- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.
- Ajustes para incluir el TLC.
- Instancias particulares de matroides.
- Teoremas límite universales para volúmenes intrínsecos.

Algunos temas que aún quedarán abiertos:




- Ordenes inducidos por $V^{(r)} \geq 0$ en lugar de $V'' \geq 0$ y ejemplos útiles.
- Ajustes para incluir el TLC.
- Instancias particulares de matroides.
- Teoremas límite universales para volúmenes intrínsecos.
- Teoremas de Yaglom para procesos de Galton Watson críticos.

Gracias!

Contacto

Arturo Jaramillo

jagil@cimat.mx

-  Michael V. Boutsikas and Eutichia Vaggelatos (2002). On the distance between convex-ordered random variables, with applications.
-  Arturo Jaramillo and James Melbourne (2022). Quantitative limit theorems via relative log-concavity.
-  Arturo Jaramillo and James Melbourne (2022). Stochastic orders and limit theorems.