Fluctuación de la esperanza condicional para tiempos locales y tiempos de ocupación

Arturo Jaramillo Gil, Chiara Amorino y Mark Podolskij

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)

Motivación

Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso y $\mathcal{G}_t$ su filtración.

Motivación

Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso y $\mathcal{G}_t$ su filtración.

Temática principal

Estimar variables $\mathcal{G}_T$-medible con observaciones finitas de X.

Motivación

Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso y $\mathcal{G}_t$ su filtración.

Temática principal

Estimar variables $\mathcal{G}_T$-medible con observaciones finitas de X.

Sean $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq T$ tiempos dados y F una variable $\mathcal{G}_T$-medible.

Motivación

Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso y $\mathcal{G}_t$ su filtración.

Temática principal

Estimar variables $\mathcal{G}_T$-medible con observaciones finitas de X.

Sean $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq T$ tiempos dados y F una variable $\mathcal{G}_T$-medible.

- Definimos $\mathcal{F}_n = \sigma(X_{t_j};\ 1 \leq j \leq n)$.

Motivación

Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso y $\mathcal{G}_t$ su filtración.

Temática principal

Estimar variables $\mathcal{G}_T$-medible con observaciones finitas de X.

Sean $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq T$ tiempos dados y F una variable $\mathcal{G}_T$-medible.

- Definimos $\mathcal{F}_n = \sigma(X_{t_j};\ 1 \leq j \leq n)$.
- Buen estimador: $\hat{F}_n := \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_n]$.

Motivación

Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso y $\mathcal{G}_t$ su filtración.

Temática principal

Estimar variables $\mathcal{G}_T$-medible con observaciones finitas de X.

Sean $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq T$ tiempos dados y F una variable $\mathcal{G}_T$-medible.

- Definimos $\mathcal{F}_n = \sigma(X_{t_j};\ 1 \leq j \leq n)$.
- Buen estimador: $\hat{F}_n := \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_n]$.

Motivación

Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso y $\mathcal{G}_t$ su filtración.

Temática principal

Estimar variables $\mathcal{G}_T$-medible con observaciones finitas de X.

Sean $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq T$ tiempos dados y F una variable $\mathcal{G}_T$-medible.

- Definimos $\mathcal{F}_n = \sigma(X_{t_j};\ 1 \leq j \leq n)$.
- Buen estimador: $\hat{F}_n := \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_n]$.

Queremos encontrar $b_n > 0$ y una variable sencilla Y t.q.

$$(F - \hat{F}_n)/b_n \approx Y \qquad \text{ó} \qquad F \approx \hat{F}_n + b_n Y$$

Caso de estudio

Aplicaremos las ideas al tiempo de ocupación en $[a, b]$,definido por

$$O_{[a,b]}(x) := \int_{[a,b]} 1_{[x,\infty)}(X_s)ds$$

Caso de estudio

Aplicaremos las ideas al tiempo de ocupación en $[a, b]$,definido por

$$O_{[a,b]}(x) := \int_{[a,b]} 1_{[x,\infty)}(X_s)ds$$

Bajo ciertos supuestos, $O_{[a,b]}(x)$ se describe en términos del tiempo local

$$L_t(\lambda) := \int_0^t \delta_0(X_s - \lambda)ds.$$

Caso de estudio

Aplicaremos las ideas al tiempo de ocupación en $[a, b]$,definido por

$$O_{[a,b]}(x) := \int_{[a,b]} 1_{[x,\infty)}(X_s) ds$$

Bajo ciertos supuestos, $O_{[a,b]}(x)$ se describe en términos del tiempo local

$$L_t(\lambda) := \int_0^t \delta_0(X_s - \lambda) ds.$$

Lemma (Fórmula de tiempo de ocupación)

$$O_{[a,b]}(x) = \int_x^\infty L_{[a,b]}(\lambda) d\lambda.$$

Relevancia estadística del tiempo local I

Supongamos que X resuelve

$$dX_t := b(X_t)dt + \sigma(X_t)W(dt).$$

Relevancia estadística del tiempo local I

Supongamos que X resuelve

$$dX_t := b(X_t)dt + \sigma(X_t)W(dt).$$

Definimos

$$\hat{\sigma}_n^2(x) := \frac{\sum_{i=1}^{nt-1} 1_{\{|X_{i/n}-x|\}} n(X_{(i+1)/n} - X_{i/n})^2}{\sum_{i=1}^{nt-1} 1_{\{|X_{i/n}-x|\}}}$$

con h_n un ancho de banda adecuado.

Relevancia estadística del tiempo local I

Supongamos que X resuelve

$$dX_t := b(X_t)dt + \sigma(X_t)W(dt).$$

Definimos

$$\hat{\sigma}_n^2(x) := \frac{\sum_{i=1}^{nt-1} 1_{\{|X_{i/n}-x|\}} n(X_{(i+1)/n} - X_{i/n})^2}{\sum_{i=1}^{nt-1} 1_{\{|X_{i/n}-x|\}}}$$

con h_n un ancho de banda adecuado.

Theorem (Danielle Florens-Zmirou (1993))
Sea $N \sim \mathcal{N}(0,1)$. Entonces

$$\sqrt{nh_n}(\hat{\sigma}_n^2(x)(x)/\sigma(x)^2 - 1) \overset{Law}{\to} L_t(x)^{-1/2}N.$$

Relevancia estadística del tiempo local II

Supongamos que X es un Browniano fraccionario con parámetro H.

Relevancia estadística del tiempo local II

Supongamos que X es un Browniano fraccionario con parámetro H.

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{nt} g(X_k),$$

con g integrable.

Relevancia estadística del tiempo local II

Supongamos que X es un Browniano fraccionario con parámetro H.

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{nt} g(X_k),$$

con g integrable.

Theorem (Jaramillo, Nourdin, Peccati (2021))

$$n^{H-1} S_n(t) \overset{Ley}{\to} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx L_t(0).$$

Relevancia estadística del tiempo local II

Supongamos que X es un Browniano fraccionario con parámetro H.

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{nt} g(X_k),$$

con g integrable.

Theorem (Jaramillo, Nourdin, Peccati (2021))

$$n^{H-1} S_n(t) \overset{Ley}{\to} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx L_t(0).$$

Si $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0$ *y* $H < 1/3$, *entonces*

$$n^{2H-1} S_n(t) \overset{Ley}{\to} \int_{\mathbb{R}} x g(x) dx L_t'(0).$$

Especificación del problema

Supondremos que X es un Lévy α-estable, con $\alpha \in [0, 2]$.

Especificación del problema

Supondremos que X es un Lévy α-estable, con $\alpha \in [0,2]$. Es decir, X tiene incrementos independientes, estacionarios y

$$\mathbb{E}[\exp(\mathbf{i}\xi X_t)] = \exp(-\boldsymbol{i}\xi t\eta - \sigma t|\xi|^{\alpha}(1 - \boldsymbol{i}\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2})\operatorname{sgn}(\xi))) \qquad (1)$$

Especificación del problema

Supondremos que X es un Lévy α-estable, con $\alpha \in [0, 2]$. Es decir, X tiene incrementos independientes, estacionarios y

$$\mathbb{E}[\exp(\mathbf{i}\xi X_t)] = \exp(-\boldsymbol{i}\xi t\eta - \sigma t|\xi|^\alpha(1 - \boldsymbol{i}\beta\tan(\frac{\pi\alpha}{2})\mathrm{sgn}(\xi))) \qquad (1)$$

Lemma

- *Sumas de variables i.i.d. convergen a α-estables.*
- *X es autosimilar.*
- *Si $\alpha > 1$, $L_t(x)$ está bien definido como el límite en L^2 de*

$$\int_0^t \phi_\varepsilon(X_s - x)ds.$$

Tiempo local condicionado

Lemma
Definimos $f(x,y) := \mathbb{E}[L_{[0,1]}(-x)|X_1 = y]$.

$$\mathbb{E}[L_{[0,t]}(x) \mid \mathcal{F}_n] = n^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} f\left(n^{\frac{1}{\alpha}}(X_{\frac{i-1}{n}} - x), n^{\frac{1}{\alpha}} \Delta_i^n X\right)$$

Tiempo local condicionado

Lemma
Definimos $f(x,y) := \mathbb{E}[L_{[0,1]}(-x)|X_1 = y]$.

$$\mathbb{E}[L_{[0,t]}(x) \mid \mathcal{F}_n] = n^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} f\left(n^{\frac{1}{\alpha}}(X_{\frac{i-1}{n}} - x), n^{\frac{1}{\alpha}} \Delta_i^n X\right)$$

En general, para una gran variedad de funciones g,

$$L_{[0,t]}(x) \approx C_g n^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} g\left(n^{\frac{1}{\alpha}}(X_{\frac{i-1}{n}} - x), n^{\frac{1}{\alpha}} \Delta_i^n X\right),$$

Tiempo de ocupación condicionado

Lemma
Definimos $F(x,y) := \int_x^\infty f(r,y)dr$*.*

$$\mathbb{E}[O_{[0,t]}(x) \mid \mathcal{F}_n] = n^{\frac{1}{\alpha}+1} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} F\left(n^{\frac{1}{\alpha}}(X_{\frac{i-1}{n}} - x), n^{\frac{1}{\alpha}} \Delta_i^n X\right)$$

Resultado principal (tiempo local)

Theorem (Amorino, Jaramillo, Podolskij (2023))
Si $\alpha > 1$,

$$\{n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}(L_{[0,t]}(x) - \mathbb{E}[L_{[0,t]}(x) \mid \mathcal{F}_n])\}_{t\geq 0} \stackrel{Ley}{\to} \{aB_{L_{[0,t]}(x)}\}_{t\geq 0},$$

donde B es un Browniano independiente de X y

$$a^2 := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[(\mathbb{E}[L_1(y)|X_1] - L_1(y))^2]dy.$$

Resultado principal (tiempo de ocupación)

Theorem (Amorino, Jaramillo, Podolskij (2023))
Si $\alpha > 1$,

$$\{n^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha})}(O_{[0,t]}(x) - \mathbb{E}[O_{[0,t]}(x) \mid \mathcal{F}_n])\}_{t\geq 0} \overset{Ley}{\to} \{bB_{L_{[0,t]}(x)}\}_{t\geq 0},$$

donde B es un Browniano independiente de X y

$$b^2 := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[(\mathbb{E}[O_1(y)|X_1] - O_1(y))^2]dy.$$

Punto de inicio de la prueba

Mostramos que

$$L_{[0,t]}(x) - \mathbb{E}[L_{[0,t]}(x) \mid \mathcal{F}_n] \approx \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} Z_{i,n}^L,$$

donde

$$Z_{i,n}^L := n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\alpha})} L_{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]}(x) - n^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}-1)} f\left(n^{\frac{1}{\alpha}}(x - X_{\frac{i-1}{n}}), n^{\frac{1}{\alpha}} \Delta_i^n X\right).$$

Puntos clave de la prueba

- Se cumple $\mathbb{E}[|Z_{i,n}^L|^2 \mid \mathcal{G}_{\frac{i-1}{n}}]$ (la suma es martingala).

Puntos clave de la prueba

- Se cumple $\mathbb{E}[|Z_{i,n}^L|^2 \mid \mathcal{G}_{\frac{i-1}{n}}]$ (la suma es martingala).
- La variación cuadrática es

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[|Z_{i,n}^L|^2 \mid \mathcal{G}_{\frac{i-1}{n}}].$$

Puntos clave de la prueba

- Se cumple $\mathbb{E}[|Z^L_{i,n}|^2 \mid \mathcal{G}_{\frac{i-1}{n}}]$ (la suma es martingala).
- La variación cuadrática es

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[|Z^L_{i,n}|^2 \mid \mathcal{G}_{\frac{i-1}{n}}].$$

- La suma se ve como

$$n^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \psi\left(n^{\frac{1}{\alpha}}(x - X_{\frac{i-1}{n}})\right),$$

para cierta función ψ.

Puntos clave de la prueba

- Se cumple $\mathbb{E}[|Z_{i,n}^L|^2 \mid \mathcal{G}_{\frac{i-1}{n}}]$ (la suma es martingala).
- La variación cuadrática es

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[|Z_{i,n}^L|^2 \mid \mathcal{G}_{\frac{i-1}{n}}].$$

- La suma se ve como

$$n^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \psi\left(n^{\frac{1}{\alpha}}(x - X_{\frac{i-1}{n}})\right),$$

  para cierta función ψ.
- Esta suma ya la sabemos manejar!

Preguntas abiertas

- Si $\alpha \in [0,1]$, el tiempo local no existe, pero el tiempo de ocupación si. Cual es su fluctuación?.

.

.

Preguntas abiertas

- Si $\alpha \in [0, 1]$, el tiempo local no existe, pero el tiempo de ocupación si. Cual es su fluctuación?.
- Cambiar la ley de X (procesos de Levy, procesos de Markov o movimiento Browniano fraccionario).

.

Preguntas abiertas

- Si $\alpha \in [0, 1]$, el tiempo local no existe, pero el tiempo de ocupación si. Cual es su fluctuación?.
- Cambiar la ley de X (procesos de Levy, procesos de Markov o movimiento Browniano fraccionario).
- Cuál es la velocidad de convergencia?.

Preguntas abiertas

- Si $\alpha \in [0, 1]$, el tiempo local no existe, pero el tiempo de ocupación si. Cual es su fluctuación?.
- Cambiar la ley de X (procesos de Levy, procesos de Markov o movimiento Browniano fraccionario).
- Cuál es la velocidad de convergencia?.
- Si cambiamos f por otra función suficientemente regular, obtenemos la misma fenomenología?

Preguntas abiertas

- Si $\alpha \in [0, 1]$, el tiempo local no existe, pero el tiempo de ocupación si. Cual es su fluctuación?.
- Cambiar la ley de X (procesos de Levy, procesos de Markov o movimiento Browniano fraccionario).
- Cuál es la velocidad de convergencia?.
- Si cambiamos f por otra función suficientemente regular, obtenemos la misma fenomenología?
- Versiones funcionales sobre la variable x.

Preguntas abiertas

- Si $\alpha \in [0,1]$, el tiempo local no existe, pero el tiempo de ocupación si. Cual es su fluctuación?.
- Cambiar la ley de X (procesos de Levy, procesos de Markov o movimiento Browniano fraccionario).
- Cuál es la velocidad de convergencia?.
- Si cambiamos f por otra función suficientemente regular, obtenemos la misma fenomenología?
- Versiones funcionales sobre la variable x.
- Para qué otras variables F se puede estudiar $F - \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_n]$?

Gracias!

Contacto
Arturo Jaramillo
jagil@cimat.mx

References

Chiara Amorino, Arturo Jaramillo, Mark Podolskij (2023). Optimal estimation of local time and occupation time measure for an alpha-stable Levy process.

Jean Jacod. (1997). On continuous conditional Gaussian martingales and stable convergence in law. Seminaire de Probabilites XXXI (pp. 232-246). Springer, Berlin, Heidelberg.

P. Jeganathan (2008). Limit theorems for functionals of sums that converge to fractional Brownian and stable motions.