

# Fluctuaciones del espectro de procesos gaussianos matriciales

Colaboración con Mario Díaz y Juan Carlos Pardo

---

Arturo Jaramillo Gil

Centro de Investigación en Matemáticas CIMAT

## Ingredientes

- Colección  $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t); t \geq 0)$  de procesos gaussianos centrados con valores en el conjunto de matrices reales simétricas.

## Ingredientes

- Colección  $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t); t \geq 0)$  de procesos gaussianos centrados con valores en el conjunto de matrices reales simétricas.
- $(\mu_t^{(n)}; n \geq 1)$  es la medida que asigna masa  $\frac{1}{n}$  a cada eigenvalor de  $Y^{(n)}(t)$ .

## Ingredientes

- Colección  $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t); t \geq 0)$  de procesos gaussianos centrados con valores en el conjunto de matrices reales simétricas.
- $(\mu_t^{(n)}; n \geq 1)$  es la medida que asigna masa  $\frac{1}{n}$  a cada eigenvalor de  $Y^{(n)}(t)$ .

## Pregunta central de la plática

Para  $r \in \mathbb{N}$  fijo y  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$  dada, ¿qué podemos decir de

$$\left( \int_{\mathbb{R}} F(x) \mu_t^{(n)}(dx) - \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} F(x) \mu_t^{(n)}(dx) \right] ; t \geq 0 \right)?$$

1. Contexto histórico y relevancia del problema
2. Resultados principales
3. Preliminares de cálculo de Malliavin
  - Definiciones
  - Teoremas límite
4. Bosquejo de las pruebas
  - Leyes finito dimensionales
  - compacidad secuencial

## **Contexto histórico y relevancia del problema**

---

Denotemos por  $\mathbb{R}^{n \times n}$  al conjunto de matrices reales de dimensión  $n \times n$ .  
Sea  $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t); t \geq 0)$  una sucesión de procesos  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -valuados, definidos en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Denotemos por  $\mathbb{R}^{n \times n}$  al conjunto de matrices reales de dimensión  $n \times n$ . Sea  $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t); t \geq 0)$  una sucesión de procesos  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -valuados, definidos en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Supondremos que  $Y^{(n)}(t) = [Y_{i,j}^{(n)}(t)]_{1 \leq i,j \leq n}$  es real y simétrica,

Denotemos por  $\mathbb{R}^{n \times n}$  al conjunto de matrices reales de dimensión  $n \times n$ . Sea  $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t); t \geq 0)$  una sucesión de procesos  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -valuados, definidos en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Supondremos que  $Y^{(n)}(t) = [Y_{i,j}^{(n)}(t)]_{1 \leq i,j \leq n}$  es real y simétrica, con

$$Y_{i,j}^{(n)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} X_{i,j}(t) & \text{if } i < j, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} X_{i,i}(t) & \text{if } i = j, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $X_{i,j} := (X_{i,j}(t); t \geq 0)$ , para  $i \leq j$ , son procesos gaussianos centrados i.i.d. con función de covarianza

$$R(s, t) := \mathbb{E}[X_{1,1}(s)X_{1,1}(t)].$$

Usaremos la notación

$$\sigma_s := \sqrt{R(s, s)} \quad \text{y} \quad \rho_{s,t} := \frac{R(s, t)}{\sigma_s \sigma_t}.$$

Usaremos la notación

$$\sigma_s := \sqrt{R(s, s)} \quad \text{y} \quad \rho_{s,t} := \frac{R(s, t)}{\sigma_s \sigma_t}.$$

Asumiremos que  $\sigma_1 = 1$  y

**(H1)** Existe  $\alpha > 1$ , tal que para todo  $T > 0$  y  $t \in [0, T]$ , el mapeo  $s \mapsto R(s, t)$  es absolutamente continuo en  $[0, T]$ , y

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T \left| \frac{\partial R}{\partial s}(s, t) \right|^\alpha ds < \infty.$$

Usaremos la notación

$$\sigma_s := \sqrt{R(s, s)} \quad \text{y} \quad \rho_{s,t} := \frac{R(s, t)}{\sigma_s \sigma_t}.$$

Asumiremos que  $\sigma_1 = 1$  y

**(H1)** Existe  $\alpha > 1$ , tal que para todo  $T > 0$  y  $t \in [0, T]$ , el mapeo  $s \mapsto R(s, t)$  es absolutamente continuo en  $[0, T]$ , y

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T \left| \frac{\partial R}{\partial s}(s, t) \right|^\alpha ds < \infty.$$

**(H2)** Existe  $\varepsilon \in (0, 1)$ , tal que el mapeo  $s \mapsto s^{1-\varepsilon} R'(s, s)$  está acotado en intervalos compactos de  $\mathbb{R}$ .

## Ejemplos:

- Movimiento browniano.

## Ejemplos:

- Movimiento browniano.
- Movimiento browniano fraccionario con parámetro de Hurst  $H \in (0, 1)$ .

## Ejemplos:

- Movimiento browniano.
- Movimiento browniano fraccionario con parámetro de Hurst  $H \in (0, 1)$ .
- Proceso de Ornestein-Uhlenbeck.

Llamaremos a  $Y^{(n)} := ((Y^{(n)}(t)) ; t \geq 0)$  “proceso Gaussiano ortogonal” (o abreviadamente, “proceso GOE”).

Llamaremos a  $Y^{(n)} := ((Y^{(n)}(t)) ; t \geq 0)$  “proceso Gaussiano ortogonal” (o abreviadamente, “proceso GOE”).

Denotemos por  $\lambda_1^{(n)}(t) \geq \dots \geq \lambda_n^{(n)}(t)$  a los eigenvalores ordenados de  $Y^{(n)}(t)$  y por  $\mu_t^{(n)}$  a la distribución empírica espectral

$$\mu_t^{(n)}(dx) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i^{(n)}(t)}(dx).$$

# Teorema de Wigner

El teorema de Wigner establece que para todo  $\varepsilon > 0$  y todo elemento  $f$  perteneciente al conjunto  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  de funciones continuas y acotadas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_1^{(n)}(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_1^{\text{sc}}(dx) \right| > \varepsilon \right] = 0, \quad (2)$$

donde  $\mu_{\sigma}^{\text{sc}}$ , para  $\sigma > 0$ , denota la ley del semicirculo reescalada

$$\mu_{\sigma}^{\text{sc}}(dx) := \frac{\mathbb{1}_{[-2\sigma, 2\sigma]}(x)}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} dx.$$

# Teorema de Wigner funcional

En un paper de Jaramillo, Pardo y Pérez (basado en trabajos previos por Rogers, Shi, Cépa, Lepingale y Pérez-Abreu), se probó lo siguiente

## Theorem

Denotemos por  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \text{Pr}(\mathbb{R}))$  a las funciones continuas, definidas en  $\mathbb{R}_+$  con valores en medidas de probabilidad. Si  $\mu_0^{(n)}$  converge en ley a  $\nu$ , entonces  $\{\mu^{(n)} : n \geq 1\}$  converge débilmente a una función determinista  $(\mu_t; t \geq 0)$ , tal que

$$\langle \mu_t, f \rangle = \langle \nu, f \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f'(x) - f'(y)}{x - y} \frac{d}{ds} (R(s, s)) \mu_s(dx) \mu_s(dy) ds,$$

para todo  $t \geq 0$  y  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ .

# Fluctuaciones del teorema de Wigner

En un paper de Lytova y Pastur, se probó (en un contexto mucho más general que el antes mencionado) lo siguiente:

## Theorem

Para toda  $f \in C_b(\mathbb{R})$ ,

$$n \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_1^{(n)}(dx) - n \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_1^{(n)}(dx) \right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2), \quad (3)$$

donde  $\mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$  es una variable gaussiana centrada con varianza

$$\sigma_f^2 := \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right)^2 \frac{4 - xy}{(4 - x^2)(4 - y^2)} \mu_1^{sc}(dx) \mu_1^{sc}(dy).$$

Existen resultados para fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, en los siguientes casos particulares:

Existen resultados para fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, en los siguientes casos particulares:

- Las entradas  $X_{i,j}$  son procesos de Ornstein-Uhlenbeck. Este problema ha sido estudiado por Israelson, Bender y Unterberger. Se sabe que el límite es Gaussiano, y se conoce explícitamente la covarianza límite.

Existen resultados para fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, en los siguientes casos particulares:

- Las entradas  $X_{i,j}$  son procesos de Ornstein-Uhlenbeck. Este problema ha sido estudiado por Israelson, Bender y Unterberger. Se sabe que el límite es Gaussiano, y se conoce explícitamente la covarianza límite.
- Las entradas  $X_{i,j}$  son brownianos **complejos** y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio. Este problema ha sido estudiado por Pérez-Abreu y Tudor. Se sabe que el límite es Gaussiano, pero la covarianza del límite sólo es semi-explicita.

## Resultados principales

---

## Resultados principales (notación)

Nos interesa tener un TLC para las fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, donde  $R(s, t)$  únicamente satisface **(H1)** y **(H2)** y la función de prueba tiene crecimiento polinomial.

## Resultados principales (notación)

Nos interesa tener un TLC para las fluctuaciones funcionales del teorema de Wigner, donde  $R(s, t)$  únicamente satisface **(H1)** y **(H2)** y la función de prueba tiene crecimiento polinomial.

### Definition

Si  $\{\eta_n; n \geq 1\}$  son variables aleatorias definidas en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con valores en un espacio métrico separable  $S$ , y  $\eta$  es una variable  $S$ -valuada, definida en un espacio extendido  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ . Decimos que  $\eta_n$  converge *establemente* a  $\eta$ , si para cada función  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  continua y acotada y toda variable  $\mathbb{R}$ -valuada  $M$ , y  $\mathcal{F}$ -medible

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [g(\eta_n)M] = \mathbb{E} [g(\eta)M].$$

## Resultados principales (notación)

Consideremos el conjunto de funciones de prueba

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid f^{(4)} \text{ tiene crecimiento polinomial}\}.$$

## Resultados principales (notación)

Consideremos el conjunto de funciones de prueba

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid f^{(4)} \text{ tiene crecimiento polinomial}\}.$$

Para  $f \in \mathcal{P}$ ,  $F = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{P}^r$ , y  $z \in [0, 1]$ , definimos los procesos

$$Z_f^{(n)}(t) := n \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_t^{(n)}(dx) - n \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_t^{(n)}(dx) \right]$$

$$Z_F^{(n)}(t) := (Z_{f_1}^{(n)}(t), \dots, Z_{f_r}^{(n)}(t)),$$

## Resultados principales (notación)

Consideremos el conjunto de funciones de prueba

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid f^{(4)} \text{ tiene crecimiento polinomial}\}.$$

Para  $f \in \mathcal{P}$ ,  $F = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{P}^r$ , y  $z \in [0, 1]$ , definimos los procesos

$$Z_f^{(n)}(t) := n \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_t^{(n)}(dx) - n \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_t^{(n)}(dx) \right]$$

$$Z_F^{(n)}(t) := (Z_{f_1}^{(n)}(t), \dots, Z_{f_r}^{(n)}(t)),$$

y el kernel

$$K_z(x, y) := \frac{1 - z^2}{z^2(x - y)^2 - xyz(1 - z)^2 + (1 - z^2)^2}.$$

## Theorem (Díaz, Jaramillo, Pardo)

Para toda  $f, g \in \mathcal{P}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov} \left[ Z_f^{(n)}(s), Z_g^{(n)}(t) \right] = 2 \int_{\mathbb{R}^2} f'(x)g'(y) \nu_{\sigma_s, \sigma_t}^{\rho_{s,t}}(dx, dy),$$

donde la medida  $\nu_{\sigma_s, \sigma_t}^{\rho_{s,t}}$  es absolutamente continua, con densidad  $f_{\sigma_s, \sigma_t}^{\rho_{s,t}}(x, y)$ , dada por

$$f_{\sigma_s, \sigma_t}^{\rho_{s,t}}(x, y) := \begin{cases} \frac{\sqrt{4\sigma_s^2 - x^2} \sqrt{4\sigma_t^2 - y^2}}{2\pi^2 \sigma_s^2 \sigma_t^2} \int_0^1 K_{Z\rho_{s,t}}(x/\sigma_s, y/\sigma_t) dz, & \text{if } (x, y) \in I_t, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

donde  $I_t := [-2\sigma_s, 2\sigma_s] \times [-2\sigma_t, 2\sigma_t]$ .

### Theorem (Díaz, Jaramillo, Pardo)

Existe un proceso gaussiano con valores en  $\mathbb{R}^r$ , denotado por  $\Lambda_F = ((\Lambda_{f_1}(t), \dots, \Lambda_{f_r}(t)); t \geq 0)$ , independiente de  $\{X_{i,j}; j \geq i \geq 1\}$ , definido en un espacio de probabilidad extendido  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ , tal que

$$(Z_F^{(n)}(t); t \geq 0) \xrightarrow{\text{Establemente}} \Lambda_F,$$

en la topología de convergencia uniforme sobre compactos.

### Theorem (Díaz, Jaramillo, Pardo)

Existe un proceso gaussiano con valores en  $\mathbb{R}^r$ , denotado por  $\Lambda_F = ((\Lambda_{f_1}(t), \dots, \Lambda_{f_r}(t)); t \geq 0)$ , independiente de  $\{X_{i,j}; j \geq i \geq 1\}$ , definido en un espacio de probabilidad extendido  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ , tal que

$$(Z_F^{(n)}(t); t \geq 0) \xrightarrow{\text{Establemente}} \Lambda_F,$$

en la topología de convergencia uniforme sobre compactos. La ley de  $\Lambda_F$  está caracterizada por su función de covarianza, la cual está dada por

$$\mathbb{E} [\Lambda_{f_i}(s) \Lambda_{f_j}(t)] = 2 \int_{\mathbb{R}^2} f'_i(x) f'_j(y) \nu_{\sigma_s, \sigma_t}^{\rho_{s,t}}(dx, dy).$$

## Theorem (Díaz, Jaramillo, Pardo)

Existe un proceso gaussiano con valores en  $\mathbb{R}^r$ , denotado por  $\Lambda_F = ((\Lambda_{f_1}(t), \dots, \Lambda_{f_r}(t)); t \geq 0)$ , independiente de  $\{X_{i,j}; j \geq i \geq 1\}$ , definido en un espacio de probabilidad extendido  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ , tal que

$$(Z_F^{(n)}(t); t \geq 0) \xrightarrow{\text{Establemente}} \Lambda_F,$$

en la topología de convergencia uniforme sobre compactos. La ley de  $\Lambda_F$  está caracterizada por su función de covarianza, la cual está dada por

$$\mathbb{E} [\Lambda_{f_i}(s) \Lambda_{f_j}(t)] = 2 \int_{\mathbb{R}^2} f'_i(x) f'_j(y) \nu_{\sigma_s, \sigma_t}^{\rho_{s,t}}(dx, dy).$$

Más aún, para todo  $t \geq 0$ , existe una constante  $C_t > 0$  tal que

$$d_{TV}(Z_f^{(n)}(t), \Lambda_f(t)) \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

# Preliminares de cálculo de Malliavin

---

Sea  $T > 0$  fijo. Identificando  $\mathbb{R}^{n \times n}$  con  $\mathbb{R}^d$ , donde  $d := \frac{n(n+1)}{2}$ , podemos identificar al proceso matricial  $(X_{i,j}(t) ; 1 \leq i \leq j \leq n, t \geq 0)$  con un proceso vectorial  $\mathbb{R}^d$ -valuado  $V = (V_t^1, \dots, V_t^d ; t \geq 0)$  con entradas i.i.d.

Sea  $T > 0$  fijo. Identificando  $\mathbb{R}^{n \times n}$  con  $\mathbb{R}^d$ , donde  $d := \frac{n(n+1)}{2}$ , podemos identificar al proceso matricial  $(X_{i,j}(t); 1 \leq i \leq j \leq n, t \geq 0)$  con un proceso vectorial  $\mathbb{R}^d$ -valuado  $V = (V_t^1, \dots, V_t^d; t \geq 0)$  con entradas i.i.d.

Denotaremos por  $\mathcal{E}$  al espacio de funciones escalonadas en  $[0, T]$ . Consideremos el producto escalar

$$\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_{\mathfrak{H}} := \mathbb{E} [V_s^1 V_t^1], \quad s, t \in [0, T],$$

definido en  $\mathcal{E}$ .

Sea  $T > 0$  fijo. Identificando  $\mathbb{R}^{n \times n}$  con  $\mathbb{R}^d$ , donde  $d := \frac{n(n+1)}{2}$ , podemos identificar al proceso matricial  $(X_{i,j}(t); 1 \leq i \leq j \leq n, t \geq 0)$  con un proceso vectorial  $\mathbb{R}^d$ -valuado  $V = (V_t^1, \dots, V_t^d; t \geq 0)$  con entradas i.i.d.

Denotaremos por  $\mathcal{E}$  al espacio de funciones escalonadas en  $[0, T]$ . Consideremos el producto escalar

$$\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_{\mathfrak{H}} := \mathbb{E} [V_s^1 V_t^1], \quad s, t \in [0, T],$$

definido en  $\mathcal{E}$ . Sea  $\mathfrak{H}$  el espacio de Hilbert obtenido como la completación de  $\mathcal{E}$  con respecto a dicho producto interno.

**Ejemplo:** Si  $V_t^1$  es un movimiento Browniano, entonces  $\mathfrak{H} = L^2[0, T]$ .

**Ejemplo:** Si  $V_t^1$  es un movimiento Browniano, entonces  $\mathfrak{H} = L^2[0, T]$ .

Para todo  $1 \leq i \leq d$ , el mapeo  $\mathbb{1}_{[0,t]} \mapsto V^i(\mathbb{1}_{[0,t]}) := V_t^i$  se puede extender a una isometría lineal, la cual denotaremos por  $V^i(h)$ , para  $h \in \mathfrak{H}$ .

**Ejemplo:** Si  $V_t^1$  es un movimiento Browniano, entonces  $\mathfrak{H} = L^2[0, T]$ .

Para todo  $1 \leq i \leq d$ , el mapeo  $\mathbb{1}_{[0,t]} \mapsto V^i(\mathbb{1}_{[0,t]}) := V_t^i$  se puede extender a una isometría lineal, la cual denotaremos por  $V^i(h)$ , para  $h \in \mathfrak{H}$ . Si  $f \in \mathfrak{H}^d$  es de la forma  $f = (f_1, \dots, f_d)$ , definimos

$$V(f) := \sum_{i=1}^d V^i(f_i).$$

**Ejemplo:** Si  $V_t^1$  es un movimiento Browniano, entonces  $\mathfrak{H} = L^2[0, T]$ .

Para todo  $1 \leq i \leq d$ , el mapeo  $\mathbb{1}_{[0,t]} \mapsto V^i(\mathbb{1}_{[0,t]}) := V_t^i$  se puede extender a una isometría lineal, la cual denotaremos por  $V^i(h)$ , para  $h \in \mathfrak{H}$ . Si  $f \in \mathfrak{H}^d$  es de la forma  $f = (f_1, \dots, f_d)$ , definimos

$$V(f) := \sum_{i=1}^d V^i(f_i).$$

**Ejemplo:** Si  $V_t^1$  es un movimiento Browniano, entonces

$$V(f) = \sum_{i=1}^d \int_{[0,T]} f_i(t) dV_t^i.$$

## Descomposición en caos

Para  $q \in \mathbb{N}$  fijo, definimos el  $q$ -ésimo caos de Wiener, como el subespacio

$$\mathcal{H}_q = \overline{\text{span}\{H_q(V(h)) \mid \|h\|_{\mathcal{H}^d} = 1\}} \subset L^2(\Omega; \mathcal{F}),$$

donde  $H_q$  denota al  $q$ -ésimo polinomio de Hermite, definido por  $H_0 = 1$ , y  $H_{q+1}(x) = xH_q(x) - qH_{q-1}(x)$ .

# Descomposición en caos

Para  $q \in \mathbb{N}$  fijo, definimos el  $q$ -ésimo caos de Wiener, como el subespacio

$$\mathcal{H}_q = \overline{\text{span}\{H_q(V(h)) \mid \|h\|_{\mathcal{H}^d} = 1\}} \subset L^2(\Omega; \mathcal{F}),$$

donde  $H_q$  denota al  $q$ -ésimo polinomio de Hermite, definido por  $H_0 = 1$ , y  $H_{q+1}(x) = xH_q(x) - qH_{q-1}(x)$ .

## **Theorem (Teorema de descomposición en caos)**

*Si  $\sigma(V) = \mathcal{F}$ , se tiene la descomposición ortogonal*

$$L^2(\Omega, \mathbb{P}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_q.$$

# Descomposición en caos

Para  $q \in \mathbb{N}$  fijo, definimos el  $q$ -ésimo caos de Wiener, como el subespacio

$$\mathcal{H}_q = \overline{\text{span}\{H_q(V(h)) \mid \|h\|_{\mathcal{H}^d} = 1\}} \subset L^2(\Omega; \mathcal{F}),$$

donde  $H_q$  denota al  $q$ -ésimo polinomio de Hermite, definido por  $H_0 = 1$ , y  $H_{q+1}(x) = xH_q(x) - qH_{q-1}(x)$ .

## **Theorem (Teorema de descomposición en caos)**

*Si  $\sigma(V) = \mathcal{F}$ , se tiene la descomposición ortogonal*

$$L^2(\Omega, \mathbb{P}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_q.$$

La proyección de un elemento  $Y \in L^2(\Omega)$ , sobre el espacio  $\mathcal{H}_q$ , será denotada por  $J_q[Y]$ .

## Operadores de derivada y divergencia

Para  $q \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $(\mathfrak{H}^d)^{\otimes q}$  y  $(\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$  al  $q$ -ésimo producto tensorial y al  $q$ -ésimo producto tensorial simetrizado de  $\mathfrak{H}^d$ .

## Operadores de derivada y divergencia

Para  $q \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $(\mathfrak{H}^d)^{\otimes q}$  y  $(\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$  al  $q$ -ésimo producto tensorial y al  $q$ -ésimo producto tensorial simetrizado de  $\mathfrak{H}^d$ .

### Definition (Operador de derivada)

Para una variable aleatoria  $F$  de la forma  $F = f(V(h_1), \dots, V(h_n))$ , donde  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ , cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial, definimos la derivada de Malliavin de  $F$ , como la variable  $\mathfrak{H}^d$ -valuada

$$DF = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(V(h_1), \dots, V(h_n)) h_k.$$

# Operadores de derivada y divergencia

Para  $q \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $(\mathfrak{H}^d)^{\otimes q}$  y  $(\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$  al  $q$ -ésimo producto tensorial y al  $q$ -ésimo producto tensorial simetrizado de  $\mathfrak{H}^d$ .

## Definition (Operador de derivada)

Para una variable aleatoria  $F$  de la forma  $F = f(V(h_1), \dots, V(h_n))$ , donde  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ , cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial, definimos la derivada de Malliavin de  $F$ , como la variable  $\mathfrak{H}^d$ -valuada

$$DF = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(V(h_1), \dots, V(h_n)) h_k.$$

Para  $p \geq 1$ , el operador  $D$  se puede extender a un subespacio  $\mathbb{D}^{1,p}$ , cerrado con respecto a la norma  $\|F\|_{\mathbb{D}^{1,p}} := (\mathbb{E}[|F|^p] + \mathbb{E}[\|DF\|_{\mathfrak{H}^d}^p])^{\frac{1}{p}}$ .

# Operadores de derivada y divergencia

Para  $q \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $(\mathfrak{H}^d)^{\otimes q}$  y  $(\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$  al  $q$ -ésimo producto tensorial y al  $q$ -ésimo producto tensorial simetrizado de  $\mathfrak{H}^d$ .

## Definition (Operador de derivada)

Para una variable aleatoria  $F$  de la forma  $F = f(V(h_1), \dots, V(h_n))$ , donde  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ , cuyas derivadas tienen crecimiento polinomial, definimos la derivada de Malliavin de  $F$ , como la variable  $\mathfrak{H}^d$ -valuada

$$DF = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(V(h_1), \dots, V(h_n)) h_k.$$

Para  $p \geq 1$ , el operador  $D$  se puede extender a un subespacio  $\mathbb{D}^{1,p}$ , cerrado con respecto a la norma  $\|F\|_{\mathbb{D}^{1,p}} := (\mathbb{E}[|F|^p] + \mathbb{E}[\|DF\|_{\mathfrak{H}^d}^p])^{\frac{1}{p}}$ . Definimos  $D^r$  como la  $r$ -ésima iteración de  $D$ .

## Definition (Operador de divergencia)

Denotaremos al adjunto de  $D$ , por  $\delta$ . Es decir,

- $\delta$  está definido en un dominio  $Dom(\delta) \subset L^2(\Omega; \mathfrak{H})$ , caracterizado por la propiedad de que  $u \in Dom(\delta)$  si existe una constante  $c > 0$ , que sólo depende de  $u$ , tal que para todo  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ ,

$$|\mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}}]| \leq c \|F\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Si  $u \in Dom(\delta)$ , entonces  $\delta(u)$  está caracterizada por la igualdad

$$\mathbb{E} [F\delta(u)] = \mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}}].$$

## Definition (Operador de divergencia)

Denotaremos al adjunto de  $D$ , por  $\delta$ . Es decir,

- $\delta$  está definido en un dominio  $Dom(\delta) \subset L^2(\Omega; \mathfrak{H})$ , caracterizado por la propiedad de que  $u \in Dom(\delta)$  si existe una constante  $c > 0$ , que sólo depende de  $u$ , tal que para todo  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ ,

$$|\mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}}]| \leq c \|F\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Si  $u \in Dom(\delta)$ , entonces  $\delta(u)$  está caracterizada por la igualdad

$$\mathbb{E} [F\delta(u)] = \mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{\mathfrak{H}}].$$

Análogamente, definimos  $\delta^r$  como el adjunto de  $D^r$ .

**Definition**

El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck  $\{P_t\}_{t \geq 0}$  está definido por

$$P_t F := \sum_{q=0}^{\infty} e^{-qt} J_q(F) \in L^2(\Omega),$$

# El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck

## Definition

El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck  $\{P_t\}_{t \geq 0}$  está definido por  $P_t F := \sum_{q=0}^{\infty} e^{-qt} J_q(F) \in L^2(\Omega)$ , y el generador del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck  $L$ , está definido por

$$LF = - \sum_{q=1}^{\infty} q J_q[F].$$

Su dominio está conformado por aquellas variables  $F$  tales que  $\sum_{q=1}^{\infty} q^2 \mathbb{E} [J_q[F]^2] < \infty$ .

## Relaciones entre $D$ , $\delta$ y $L$

La fórmula de Mehler establece que si  $F \in L^2(\Omega)$  y  $\Psi_F$  es un mapeo medible de  $\mathbb{R}^{\mathfrak{H}^d}$  a  $\mathbb{R}$  tal que  $F = \Psi_F(V)$ , entonces

$$P_\theta F = \tilde{\mathbb{E}} \left[ \Psi_F(e^{-\theta} V + \sqrt{1 - e^{-2\theta}} \tilde{V}) \right],$$

donde  $\tilde{\mathbb{E}}$  es una copia independiente de  $V$ . Adicionalmente, se tiene que  $F \in Dom(L)$  si y sólo si  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  y  $DF \in Dom(\delta)$ , en cuyo caso

$$LF = -\delta(DF).$$

Más aún, si  $F \in L^2(\Omega)$  tiene media cero, entonces

$$-L^{-1}F = \int_{\mathbb{R}_+} P_\theta F d\theta$$

Finalmente, introducimos la noción de contracción. Sea  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}^d$  una base ortonormal de  $\mathfrak{H}^d$ . Dado  $f \in (\mathfrak{H}^d)^{\odot p}$ ,  $g \in (\mathfrak{H}^d)^{\odot q}$  y  $r \in \{1, \dots, p \wedge q\}$ , la  $r$ -ésima contracción de  $f$  y  $g$  es el elemento de  $f \otimes_r g \in (\mathfrak{H}^d)^{\otimes (p+q-2r)}$  dado por

$$f \otimes_r g = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} \langle f, b_{i_1}, \dots, b_{i_r} \rangle_{(\mathfrak{H}^d)^{\otimes r}} \otimes \langle g, b_{i_1}, \dots, b_{i_r} \rangle_{(\mathfrak{H}^d)^{\otimes r}}.$$

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

### **Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)**

*Supongamos que  $r \geq 1$  está fijo. Consideremos vectores aleatorios  $Z_n = (Z_{1,n}, \dots, Z_{r,n})$ ,  $n \geq 1$ , con  $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$  y  $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$ . Sea  $C$  una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño  $r$ , y sea  $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$ .*

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

## Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que  $r \geq 1$  está fijo. Consideremos vectores aleatorios  $Z_n = (Z_{1,n}, \dots, Z_{r,n})$ ,  $n \geq 1$ , con  $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$  y  $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$ . Sea  $C$  una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño  $r$ , y sea  $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$ . Supongamos que:

- (i) Para todo  $i, j = 1, \dots, r$ ,  $\mathbb{E}[Z_{i,n}Z_{j,n}] \rightarrow C(i, j)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ;

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

## Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que  $r \geq 1$  está fijo. Consideremos vectores aleatorios  $Z_n = (Z_{1,n}, \dots, Z_{r,n})$ ,  $n \geq 1$ , con  $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$  y  $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$ . Sea  $C$  una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño  $r$ , y sea  $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$ . Supongamos que:

- (i) Para todo  $i, j = 1, \dots, r$ ,  $\mathbb{E}[Z_{i,n}Z_{j,n}] \rightarrow C(i, j)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ;
- (ii) Para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \|DZ_{i,n}\|_{\mathfrak{H}}^4 \right] < \infty$ ;

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

## Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que  $r \geq 1$  está fijo. Consideremos vectores aleatorios  $Z_n = (Z_{1,n}, \dots, Z_{r,n})$ ,  $n \geq 1$ , con  $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$  y  $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$ . Sea  $C$  una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño  $r$ , y sea  $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$ . Supongamos que:

- (i) Para todo  $i, j = 1, \dots, r$ ,  $\mathbb{E}[Z_{i,n}Z_{j,n}] \rightarrow C(i, j)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ;
- (ii) Para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \|DZ_{i,n}\|_{\mathfrak{H}}^4 \right] < \infty$ ;
- (iii) Para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $\mathbb{E} \left[ \|D^2 Z_{i,n} \otimes_1 D^2 Z_{i,n}\|_{(\mathfrak{H}^d)^{\otimes 2}}^2 \right] \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

El siguiente resultado da un sencillo método para probar gaussianidad asintótica.

## Theorem (Nourdin, Peccati and Réveillac)

Supongamos que  $r \geq 1$  está fijo. Consideremos vectores aleatorios  $Z_n = (Z_{1,n}, \dots, Z_{r,n})$ ,  $n \geq 1$ , con  $\mathbb{E}[Z_{i,n}] = 0$  y  $Z_{i,n} \in \mathbb{D}^{2,4}$ . Sea  $C$  una matriz cuadrada simétrica, no-negativa definida de tamaño  $r$ , y sea  $N \sim \mathcal{N}_r(0, C)$ . Supongamos que:

- (i) Para todo  $i, j = 1, \dots, r$ ,  $\mathbb{E}[Z_{i,n}Z_{j,n}] \rightarrow C(i, j)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ;
- (ii) Para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ \|DZ_{i,n}\|_{\mathfrak{H}}^4 \right] < \infty$ ;
- (iii) Para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $\mathbb{E} \left[ \left\| D^2 Z_{i,n} \otimes_1 D^2 Z_{i,n} \right\|_{(\mathfrak{H}^d)^{\otimes 2}}^2 \right] \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Entonces  $Z_n \xrightarrow{\text{Ley}} \mathcal{N}_r(0, C)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

## **Bosquejo de las pruebas**

---

## Condición (i)

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left\langle -DL^{-1}Z_f^{(n)}(t), DZ_g^{(n)}(s) \right\rangle \right] \\ &= \frac{2}{n} \int_0^1 \mathbb{E} \left[ \text{tr} \left( f' \left( \sigma_s (\rho_{s,t} z A(n) + \sqrt{1 - \rho_{s,t}^2 z^2} \tilde{A}(n)) \right) g' \left( \sigma_t A(n) \right) \right) \right] dz, \end{aligned} \tag{4}$$

donde  $A(n)$  y  $\tilde{A}(n)$  GOE estándar e independientes.

## Condición (i)

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left\langle -DL^{-1}Z_f^{(n)}(t), DZ_g^{(n)}(s) \right\rangle \right] \\ &= \frac{2}{n} \int_0^1 \mathbb{E} \left[ \operatorname{tr} \left( f' \left( \sigma_s(\rho_{s,t}zA(n) + \sqrt{1 - \rho_{s,t}^2z^2}\tilde{A}(n)) \right) g'(\sigma_tA(n)) \right) \right] dz, \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $A(n)$  y  $\tilde{A}(n)$  GOE estándar e independientes. Por el teorema de Voiculescu, la esperanza en el lado derecho de (4) converge a

$$\tau \left[ \left( f' \left( \sigma_s(\rho_{s,t}za + \sqrt{1 - \rho_{s,t}^2z^2}\tilde{a}) \right) g'(\sigma_t a) \right) \right], \quad (5)$$

donde  $a, \tilde{a}$  variables semicirculares independientes definidas en un espacio de probabilidad no conmutativo  $(\mathcal{A}, \tau)$ .

## Condición (i)

Denotemos por  $U_q$  al  $q$ -ésimo polinomio de Chebyshev polynomial de segundo orden en  $[-2, 2]$ . Se sabe que si  $b$  y  $\tilde{b}$  son elementos conjuntamente semicirculares estándar, entonces

$$\tau[U_q(b)U_{q'}(\tilde{b})] = \delta_{q,q'}\tau[b\tilde{b}]^q.$$

## Condición (i)

Denotemos por  $U_q$  al  $q$ -ésimo polinomio de Chebyshev polynomial de segundo orden en  $[-2, 2]$ . Se sabe que si  $b$  y  $\tilde{b}$  son elementos conjuntamente semicirculares estándar, entonces

$$\tau[U_q(b)U_{q'}(\tilde{b})] = \delta_{q,q'}\tau[b\tilde{b}]^q.$$

Por lo tanto, si  $f'(\sigma_s x) = U_q(x)$  y  $g'(\sigma_t x) = U_{q'}(x)$ ,

$$\tau\left[\left(f'(\sigma_s(\rho_{s,t}za + \sqrt{1 - \rho_{s,t}^2}z^2\tilde{a}))g'(\sigma_t a)\right)\right] = \delta_{q,q'}(z\rho_{s,t})^q.$$

La covarianza asintótica se obtiene entonces al expandir  $f'(\sigma_s x)$  y  $g'(\sigma_t x)$  en términos de polinomios de Chebyshev.

## Tensión del proceso

Las condiciones (ii) y (iii) son sencillas una vez que se encuentran fórmulas adecuadas para  $DZ_f^{(n)}(s)$  y  $D^2Z_f^{(n)}(s)$ .

## Tensión del proceso

Las condiciones (ii) y (iii) son sencillas una vez que se encuentran fórmulas adecuadas para  $DZ_f^{(n)}(s)$  y  $D^2Z_f^{(n)}(s)$ . Para ver que  $\{Z_f^{(n)}\}_{n \geq 1}$  es tensa, usamos una ecuación diferencial de Skorohod del tipo

$$Z_f^{(n)}(t) = \delta^*(\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)h(Y^{(n)}(\cdot))) + \int_0^t g(Y^{(n)}(u))du, \quad (6)$$

para ciertas funciones  $h, g : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\delta^*$  es una extensión de la divergencia. Para ver que los procesos en el lado derecho son tensores usamos el criterio de Billingsley. Así, el problema se reduce a acotar momentos del tipo

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t g(Y^{(n)}(u))du\right|^p\right] \\ & \mathbb{E}\left[\left|\delta^*(\mathbb{1}_{[s,t]}(\cdot)h(Y^{(n)}(\cdot)))\right|^p\right] \end{aligned}$$

-  Díaz M., Jaramillo A., Pardo J.C., y Pérez J.L. (2018). Functional Central Limit theorem for Matrix-valued Gaussian processes.
-  Perez-Abreu V. y Tudor C. (2007). Functional Limit Theorem for Trace processes in a Dyson Brownian motion. *Communications on Stochastic Analysis*. **3** 415-428.
-  Jaramillo, A., Pardo, J. y Pérez, J. (2018). Convergence of the empirical spectral distribution of a Gaussian matrix process. *Electronic Journal of Probability*.
-  Israelson S. (2001). Asymptotic fluctuations of a particle system with singular interaction. *Stochastic Process and their Applications*. **93** 25-56.