



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

# Funcionales aditivos del movimiento Browniano fraccionario

Trabajo conjunto con Nualart, Peccati, Nourdin

---

Arturo Jaramillo Gil

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)

# Objetivo

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento fraccionario de parámetro de Hurst  $H \in (0, 1)$ .

# Objetivo

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento fraccionario de parámetro de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Es decir,  $X$  es un proceso gaussiano centrado, con función de covarianza

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s - t|^{2H}).$$

## Objetivo

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento fraccionario de parámetro de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Es decir,  $X$  es un proceso gaussiano centrado, con función de covarianza

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s - t|^{2H}).$$

$X$  es autosimilar:  $\{X_s ; s \geq 0\} \stackrel{\text{Ley}}{=} \{c^{-H} X_{cs} ; s \geq 0\}$  para todo  $c > 0$ .

# Objetivo

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento fraccionario de parámetro de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Es decir,  $X$  es un proceso gaussiano centrado, con función de covarianza

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s - t|^{2H}).$$

$X$  es autosimilar:  $\{X_s ; s \geq 0\} \stackrel{Ley}{=} \{c^{-H} X_{cs} ; s \geq 0\}$  para todo  $c > 0$ .

Nuestro punto de inicio es el estudio de una adecuada renormalización del proceso de estadísticos “promedio”

$$\left\{ \int_0^{nt} f(X_s) ds ; t \geq 0 \right\}$$

# Objetivo

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento fraccionario de parámetro de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Es decir,  $X$  es un proceso gaussiano centrado, con función de covarianza

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s - t|^{2H}).$$

$X$  es autosimilar:  $\{X_s ; s \geq 0\} \stackrel{\text{Ley}}{=} \{c^{-H} X_{cs} ; s \geq 0\}$  para todo  $c > 0$ .

Nuestro punto de inicio es el estudio de una adecuada renormalización del proceso de estadísticos “promedio”

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{nt} f(X_s) ds ; t \geq 0 \right\} &\stackrel{\text{Ley}}{=} \left\{ \int_0^{nt} f(n^H X_{\frac{s}{n}}) ds ; t \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ n \int_0^t f(n^H X_s) ds ; t \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

donde  $f$  es una función de prueba, cuyas propiedades se especificarán más adelante.

# Objetivo

Dicho tipo de estadísticos es una instancia particular de la familia de procesos

$$\{G_t^{(n)} ; t \geq 0\} := \left\{ b_n \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds, ; t \geq 0 \right\}, \quad (1)$$

donde  $b_n > 0$  es una constante normalizadora,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de prueba y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

# Objetivo

Dicho tipo de estadísticos es una instancia particular de la familia de procesos

$$\{G_t^{(n)} ; t \geq 0\} := \{b_n \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds, ; t \geq 0\}, \quad (1)$$

donde  $b_n > 0$  es una constante normalizadora,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de prueba y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Objetivo específico:** Estudiar las fluctuaciones de primer y segundo orden para dichos procesos.



# Objetivo

Dicho tipo de estadísticos es una instancia particular de la familia de procesos

$$\{G_t^{(n)} ; t \geq 0\} := \{b_n \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds, ; t \geq 0\}, \quad (1)$$

donde  $b_n > 0$  es una constante normalizadora,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de prueba y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Objetivo específico:** Estudiar las fluctuaciones de primer y segundo orden para dichos procesos.

**Más adelante...**

# Objetivo

Dicho tipo de estadísticos es una instancia particular de la familia de procesos

$$\{G_t^{(n)} ; t \geq 0\} := \{b_n \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds, ; t \geq 0\}, \quad (1)$$

donde  $b_n > 0$  es una constante normalizadora,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de prueba y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Objetivo específico:** Estudiar las fluctuaciones de primer y segundo orden para dichos procesos.

**Más adelante...** Se verá que las variables  $G_t^{(n)}$  están íntimamente ligadas al tiempo local de  $X$  al nivel  $\lambda$ .

# Objetivo

Dicho tipo de estadísticos es una instancia particular de la familia de procesos

$$\{G_t^{(n)} ; t \geq 0\} := \{b_n \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds, ; t \geq 0\}, \quad (1)$$

donde  $b_n > 0$  es una constante normalizadora,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de prueba y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Objetivo específico:** Estudiar las fluctuaciones de primer y segundo orden para dichos procesos.

**Más adelante...** Se verá que las variables  $G_t^{(n)}$  están íntimamente ligadas al tiempo local de  $X$  al nivel  $\lambda$ .

Fluctuaciones asociadas  $\longleftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Derivadas del tiempo local de } X \\ \text{Límites gaussianos mezclados} \end{array} \right.$

El tiempo local de  $X$  al tiempo  $\lambda \in \mathbb{R}$  está heurísticamente definido por

$$L_t(\lambda) := \int_0^t \delta_0(X_s - \lambda) ds.$$

## Preliminares: tiempos locales

El tiempo local de  $X$  al tiempo  $\lambda \in \mathbb{R}$  está heurísticamente definido por  $L_t(\lambda) := \int_0^t \delta_0(X_s - \lambda) ds$ . De manera rigurosa,

$$L_t(\lambda) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \phi_\varepsilon(X_s - \lambda) ds,$$

donde la convergencia se toma en el sentido de norma  $L^2(\Omega)$  y donde  $\phi_\varepsilon$  es el kernel gaussiano de varianza  $\varepsilon > 0$ , definido por

$$\phi_\varepsilon(x) := (2\pi\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}|x|^2\right\}$$

## Contexto histórico (Aproximaciones de primer orden)

Un procedimiento de molificación permite ver que

$$n^{-H} \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds$$

## Contexto histórico (Aproximaciones de primer orden)

Un procedimiento de molificación permite ver que

$$n^{-H} \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds = n^{-H} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \delta_0(X_s - y) f(n^H(y - \lambda)) ds dy$$

## Contexto histórico (Aproximaciones de primer orden)

Un procedimiento de molificación permite ver que

$$\begin{aligned}n^{-H} \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds &= n^{-H} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \delta_0(X_s - y) f(n^H(y - \lambda)) ds dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \delta_0(X_s - \lambda - n^{-H}y) f(y) ds dy\end{aligned}$$



## Contexto histórico (Aproximaciones de primer orden)

Un procedimiento de molificación permite ver que

$$\begin{aligned}n^{-H} \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds &= n^{-H} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \delta_0(X_s - y) f(n^H(y - \lambda)) ds dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \delta_0(X_s - \lambda - n^{-H}y) f(y) ds dy \\ &\xrightarrow{L^2(\Omega)} L_t(\lambda) \int_{\mathbb{R}} f(y) dy.\end{aligned}\tag{2}$$

## Contexto histórico (Aproximaciones de primer orden)

Un procedimiento de molificación permite ver que

$$\begin{aligned}n^{-H} \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds &= n^{-H} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \delta_0(X_s - y) f(n^H(y - \lambda)) ds dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \delta_0(X_s - \lambda - n^{-H}y) f(y) ds dy \\ &\xrightarrow{L^2(\Omega)} L_t(\lambda) \int_{\mathbb{R}} f(y) dy.\end{aligned}\tag{2}$$

**Observación:** Se ve inmediatamente que (2) implica una conclusión trivial en el caso  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ .

## Contexto histórico (aproximaciones de segundo orden)

Un refinamiento del resultado previo se probó por Papanicolau, Stroock y Varadhan ( $H = \frac{1}{2}$ ) y posteriormente fué generalizado por Nualart, Hu y Xu, quienes mostraron que  $1/3 < H < 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} |f(y)| |y|^{\frac{1}{H}-1} dy < \infty$  y  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ , entonces si  $\lambda = 0$ ,

## Contexto histórico (aproximaciones de segundo orden)

Un refinamiento del resultado previo se probó por Papanicolau, Stroock y Varadhan ( $H = \frac{1}{2}$ ) y posteriormente fué generalizado por Nualart, Hu y Xu, quienes mostraron que  $1/3 < H < 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} |f(y)| |y|^{\frac{1}{H}-1} dy < \infty$  y  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ , entonces si  $\lambda = 0$ ,

$$n^{\frac{H+1}{2}} \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds \xrightarrow{Ley} \sqrt{b} W_{L_t(\lambda)}, \quad (3)$$

donde  $b > 0$ ,  $W$  es un movimiento Browniano independiente de  $B$  y la convergencia se toma respecto a la topología de convergencia uniforme en compactos.

## Contexto histórico (aproximaciones de segundo orden)

Un refinamiento del resultado previo se probó por Papanicolau, Stroock y Varadhan ( $H = \frac{1}{2}$ ) y posteriormente fué generalizado por Nualart, Hu y Xu, quienes mostraron que  $1/3 < H < 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} |f(y)| |y|^{\frac{1}{H}-1} dy < \infty$  y  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ , entonces si  $\lambda = 0$ ,

$$n^{\frac{H+1}{2}} \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds \xrightarrow{Ley} \sqrt{b} W_{L_t(\lambda)}, \quad (3)$$

donde  $b > 0$ ,  $W$  es un movimiento Browniano independiente de  $B$  y la convergencia se toma respecto a la topología de convergencia uniforme en compactos.

### Preguntas

- ¿Qué sucede en el caso  $H \leq \frac{1}{3}$ ?

## Contexto histórico (aproximaciones de segundo orden)

Un refinamiento del resultado previo se probó por Papanicolau, Stroock y Varadhan ( $H = \frac{1}{2}$ ) y posteriormente fué generalizado por Nualart, Hu y Xu, quienes mostraron que  $1/3 < H < 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} |f(y)| |y|^{\frac{1}{H}-1} dy < \infty$  y  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ , entonces si  $\lambda = 0$ ,

$$n^{\frac{H+1}{2}} \int_0^t f(n^H(X_s - \lambda)) ds \xrightarrow{\text{Ley}} \sqrt{b} W_{L_t(\lambda)}, \quad (3)$$

donde  $b > 0$ ,  $W$  es un movimiento Browniano independiente de  $B$  y la convergencia se toma respecto a la topología de convergencia uniforme en compactos.

### Preguntas

- ¿Qué sucede en el caso  $H \leq \frac{1}{3}$ ?
- ¿Se puede decir algo en el caso de energía no cero ( $\int_{\mathbb{R}} f(y) dy \neq 0$ )?

## Manejando el caso “rugoso”, donde $H$ es pequeño.

El principal ingrediente para manejar el caso  $H < \frac{1}{3}$  es la **derivada espacial del tiempo local**.

## Manejando el caso “rugoso”, donde $H$ es pequeño.

El principal ingrediente para manejar el caso  $H < \frac{1}{3}$  es la **derivada espacial del tiempo local**.

### Lemma

Supongamos que  $0 < H < \frac{1}{3}$ . Entonces, para todo  $t \geq 0$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ , las variables aleatorias

$$L_{t,\varepsilon}^{(\prime)}(\lambda) = \int_0^t \delta'_0(X_s - \lambda) ds := \int_0^t \phi'_\varepsilon(X_s - \lambda) ds, \quad \varepsilon > 0, \quad (4)$$

convergen en  $L^2(\Omega)$  hacia un límite  $L'_t(\lambda)$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



**Theorem (Jaramillo, Nourdin, Nualart, Peccati (en proceso))**

Supongamos que  $H < 1/3$  y que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface

$\int_{\mathbb{R}} |f(y)|(1 + |y|^{1+\nu})dy$  para algún  $\nu > 0$ .

**Theorem (Jaramillo, Nourdin, Nualart, Peccati (en proceso))**

Supongamos que  $H < 1/3$  y que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface

$\int_{\mathbb{R}} |f(y)|(1 + |y|^{1+\nu})dy$  para algún  $\nu > 0$ . Entonces,

$$n^H \left( \int_0^t f(n^H(B_s - \lambda)) ds - n^{-H} L_t(\lambda) \int_{\mathbb{R}} f(y) dy \right) \\ \xrightarrow{L^2(\Omega)} - \left( \int_{\mathbb{R}} y f(y) dy \right) L'_t(\lambda).$$

## Justificación del resultado principal I

Recordemos que  $L_t(\lambda) = \int_0^t \delta_0(B_s - \lambda) ds$  y  $L'_t(\lambda) = \int_0^t \delta'_0(B_s - \lambda) ds$ .

# Justificación del resultado principal I

Recordemos que  $L_t(\lambda) = \int_0^t \delta_0(B_s - \lambda) ds$  y  $L'_t(\lambda) = \int_0^t \delta'_0(B_s - \lambda) ds$ . Se puede mostrar que

$$2\pi L_t(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t e^{i\xi(B_s - \lambda)} ds d\xi := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_0^t e^{i\xi(B_s - \lambda)} ds d\xi,$$

$$2\pi L'_t(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t i\xi e^{i\xi(B_s - \lambda)} ds d\xi := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_0^t i\xi e^{i\xi(B_s - \lambda)} ds d\xi,$$

# Justificación del resultado principal I

Recordemos que  $L_t(\lambda) = \int_0^t \delta_0(B_s - \lambda) ds$  y  $L'_t(\lambda) = \int_0^t \delta'_0(B_s - \lambda) ds$ . Se puede mostrar que

$$2\pi L_t(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t e^{i\xi(B_s - \lambda)} ds d\xi := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_0^t e^{i\xi(B_s - \lambda)} ds d\xi,$$

$$2\pi L'_t(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t i\xi e^{i\xi(B_s - \lambda)} ds d\xi := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_0^t i\xi e^{i\xi(B_s - \lambda)} ds d\xi,$$

Adicionalmente, por la fórmula de inversión de Fourier,

$$n^{2H} \int_0^t f(n^H(B_s - \lambda)) ds = \frac{n^H}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t e^{i\xi(B_s - \lambda - \frac{y}{n^H})} f(y) ds dy d\xi.$$

# Justificación del resultado principal I

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} n^{2H} \int_0^t f(n^H(B_s - \lambda)) ds - n^H \int_{\mathbb{R}} f(y) dy L_t(\lambda) \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t \mathbf{i} \xi e^{\mathbf{i} \xi (B_s - \lambda)} y f(y) ds dy d\xi \\ + \frac{n^H}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t e^{\mathbf{i} \xi (B_s - \lambda)} \left( \mathbf{i} \frac{y}{n^H} + e^{-\mathbf{i} \frac{y \xi}{n^H}} - 1 \right) f(y) ds dy d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

El resultado se sigue mostrando que el segundo término converge a cero, ya que el primero coincide con  $-\left(\int_{\mathbb{R}} y f(y) dy\right) L'_t(\lambda)$ .

## Resultado principal II

**Theorem (Jaramillo, Nourdin, Nualart, Peccati (en proceso))**

Definamos  $\ell_{n,H} := \mathbb{1}_{\{H > \frac{1}{3}\}} + \log(n)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{H = \frac{1}{3}\}}$ . Entonces, para  $H \geq \frac{1}{3}$  y  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  de la forma  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1 \dots, \mathbf{f}_d)$  con  $\mathbf{f}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo condiciones adecuadas de integrabilidad, existe una matriz  $\mathcal{C}_H[\mathbf{f}]$  no-negativa definida tal que

$$\left\{ n^{\frac{H+1}{2}} \ell_{n,H} \left( \int_0^t \mathbf{f}(n^H(B_s - \lambda)) ds - n^{-H} L_t(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}(x) dx \right) ; t \geq 0 \right\} \\ \xrightarrow{f.d.d} \left\{ \mathcal{C}_H[\mathbf{f}] \tilde{\mathbf{W}}_{L_t(\lambda)} ; t \geq 0 \right\}, \quad (6)$$

donde  $\tilde{\mathbf{W}} = \{\tilde{\mathbf{W}}_t ; t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano  $d$ -dimensional independiente de  $W$ .

## Resultado principal II

**Theorem (Jaramillo, Nourdin, Nualart, Peccati (en proceso))**

Definamos  $\ell_{n,H} := \mathbb{1}_{\{H > \frac{1}{3}\}} + \log(n)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{H = \frac{1}{3}\}}$ . Entonces, para  $H \geq \frac{1}{3}$  y  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  de la forma  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1 \dots, \mathbf{f}_d)$  con  $\mathbf{f}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo condiciones adecuadas de integrabilidad, existe una matriz  $C_H[\mathbf{f}]$  no-negativa definida tal que

$$\left\{ n^{\frac{H+1}{2}} \ell_{n,H} \left( \int_0^t \mathbf{f}(n^H(B_s - \lambda)) ds - n^{-H} L_t(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}(x) dx \right) ; t \geq 0 \right\} \\ \xrightarrow{f.d.d} \{ C_H[\mathbf{f}] \tilde{W}_{L_t(\lambda)} ; t \geq 0 \}, \quad (6)$$

donde  $\tilde{W} = \{ \tilde{W}_t ; t \geq 0 \}$  es un movimiento Browniano  $d$ -dimensional independiente de  $W$ .

Por conveniencia, solo justificaremos la convergencia puntual de las leyes, en lugar de considerar las leyes finito-dimensionales del proceso en el caso en que  $d = 1$ , de manera que  $\mathbf{f} = g$  para alguna  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Inclusión en el espacio de Wiener:** Usaremos una representación de  $B$  como función de un movimiento browniano  $W = \{W_t ; t \geq 0\}$  mediante la fórmula

$$B_t = \int_0^t K_H(s, t) dW_s,$$

donde  $K_H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  es un kernel determinista explícito.

**Inclusión en el espacio de Wiener:** Usaremos una representación de  $B$  como función de un movimiento browniano  $W = \{W_t ; t \geq 0\}$  mediante la fórmula

$$B_t = \int_0^t K_H(s, t) dW_s,$$

donde  $K_H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  es un kernel determinista explícito. Ahora podemos intentar usar técnicas de martingala.

## Justificación del resultado principal II, Paso 2

**Representación de Itô para las fluctuaciones:** La teoría del cálculo de Malliavin, nos permite encontrar una representación de las variables bajo consideración como traslaciones de integrales estocásticas mediante la fórmula de Clark-Ocone.

**Representación de Itô para las fluctuaciones:** La teoría del cálculo de Malliavin, nos permite encontrar una representación de las variables bajo consideración como traslaciones de integrales estocásticas mediante la fórmula de Clark-Ocone.

$$\begin{aligned} n^{\frac{H+1}{2}} \ell_{n,H} \left( \int_0^t g(n^H(B_s - \lambda)) ds - n^{-H} L_t(\lambda) \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right) \\ = \int_0^t F_t^{(n)}(s) dW_s + \mu_t, \end{aligned}$$

donde  $F_t^{(n)}(s)$  es explícito y  $\mu_t$  denota la esperanza del lado izquierdo.

## Justificación del resultado principal II, Paso 2

**Representación de Itô para las fluctuaciones:** La teoría del cálculo de Malliavin, nos permite encontrar una representación de las variables bajo consideración como traslaciones de integrales estocásticas mediante la fórmula de Clark-Ocone.

$$\begin{aligned} n^{\frac{H+1}{2}} \ell_{n,H} \left( \int_0^t g(n^H(B_s - \lambda)) ds - n^{-H} L_t(\lambda) \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right) \\ = \int_0^t F_t^{(n)}(s) dW_s + \mu_t, \end{aligned}$$

donde  $F_t^{(n)}(s)$  es explícito y  $\mu_t$  denota la esperanza del lado izquierdo. Se puede ver que  $\mu_t$  **no contribuye al límite**.

## Justificación del resultado principal II, Paso 3

Aplicación del Teorema de Knight:

## Justificación del resultado principal II, Paso 3

### Aplicación del Teorema de Knight:

Martingalas continuas  $\longleftrightarrow$  Brownianos cambiados de tiempo

## Justificación del resultado principal II, Paso 3

### Aplicación del Teorema de Knight:

Martingalas continuas  $\longleftrightarrow$  Brownianos cambiados de tiempo

Para analizar  $\int_0^t F_t^{(n)}(s) dW_s$ , calculamos la variación cuadrática de

$$\{M_u ; u \leq t\} = \left\{ \int_0^u F_t^{(n)}(s) dW_s ; u \leq t \right\}$$



## Justificación del resultado principal II, Paso 3

### Aplicación del Teorema de Knight:

Martingalas continuas  $\longleftrightarrow$  Brownianos cambiados de tiempo

Para analizar  $\int_0^t F_t^{(n)}(s) dW_s$ , calculamos la variación cuadrática de

$$\{M_u ; u \leq t\} = \left\{ \int_0^u F_t^{(n)}(s) dW_s ; u \leq t \right\}$$

El teorema de Knight garantiza que el resultado se cumple si

## Justificación del resultado principal II, Paso 3

### Aplicación del Teorema de Knight:

Martingalas continuas  $\longleftrightarrow$  Brownianos cambiados de tiempo

Para analizar  $\int_0^t F_t^{(n)}(s) dW_s$ , calculamos la variación cuadrática de

$$\{M_u ; u \leq t\} = \left\{ \int_0^u F_t^{(n)}(s) dW_s ; u \leq t \right\}$$

El teorema de Knight garantiza que el resultado se cumple si

**(C1)** Para todo  $0 \leq u \leq T$ ,  $\langle M^{(n)} \rangle_u$  converge en probabilidad, y

$$\langle M^{(n)} \rangle_T \xrightarrow{\mathbb{P}} C_H[\mathbf{f}]^2 L_t(\lambda).$$

## Justificación del resultado principal II, Paso 3

### Aplicación del Teorema de Knight:

Martingalas continuas  $\longleftrightarrow$  Brownianos cambiados de tiempo

Para analizar  $\int_0^t F_t^{(n)}(s) dW_s$ , calculamos la variación cuadrática de

$$\{M_u ; u \leq t\} = \left\{ \int_0^u F_t^{(n)}(s) dW_s ; u \leq t \right\}$$

El teorema de Knight garantiza que el resultado se cumple si

**(C1)** Para todo  $0 \leq u \leq T$ ,  $\langle M^{(n)} \rangle_u$  converge en probabilidad, y

$$\langle M^{(n)} \rangle_T \xrightarrow{\mathbb{P}} C_H[\mathbf{f}]^2 L_t(\lambda).$$




**(C2)** Para todo  $u \in [0, T]$ ,

$$\langle M^{(n)}, W \rangle_u \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Para probar **(C1)** y **(C2)** se utilizan los siguientes ingredientes importantes

- Inversión de Fourier y representación de Fourier de los tiempos locales.
- Fórmula de Clark-Ocone.
- No-determinismo local para el movimiento browniano fraccionario (es decir, estimaciones de  $\mathbb{V}\text{ar}[B_r \mid B_{r_1}, \dots, B_{r_k}]$ ).

¡GRACIAS!

-  Jaramillo A., Nourdin I., Nualart D. and Peccati G. Limit theorems for additive functionals of the fractional brownian motion. En preparación.
-  Yaozhong Hu, David Nualart, and Fangjun Xu. Central limit theorem for an additive functional of the fractional Brownian motion. *Ann. Probab.*, 42(1):168–203, 2014.
-  David Nualart and Fangjun Xu. Central limit theorem for an additive functional of the fractional Brownian motion II. *Electron. Commun. Probab.*, 18:no. 74, 10, 2013.