Capítulo 1

Martingalas y Tiempos de Paro.

En este capítulo vamos a estudiar las principales propiedades de los tiempos de paro y de las martingalas a tiempo continuo, temas fundamentales para el estudio de la teoría de los procesos estocásticos. Antes de empezar con dicho análisis vamos a definir de manera formal a los procesos estocasticos, sus trayectorias, procesos equivalentes y algunas de sus propiedades más importantes.

1.1 Procesos Estocásticos.

En capitulos anteriores hemos estudiado proceso estocásticos a tiempo discreto, ahora nuestro propósito es el de extender dicho concepto a tiempo continuo.
Dentro del lenguaje coloquial podemos pensar a un proceso estocástico como un modelo matemático de un fenómeno aleatorio que evoluciona a través del tiempo. Una definición formal es la siguiente,

Definición 1.1.1. *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $X = (X_t)_{t\in I}$, donde $I \subseteq \mathbb{R}^+$, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$, generalmente llamado espacio de estados.*

Notemos que esta definición extiende la del caso discreto, en particular tomamos a I como un subconjunto finito o numerable de $\mathbb{R}^+$. Generalmente vamos a considerar al conjunto I como $\mathbb{R}^+$.

Definición 1.1.2. *La trayectoira de un proceso* $(X_t)_{t\geq 0}$ *se define como la función* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *para cada* $\omega \in \Omega$.

Esta última definición nos da un modelo matemático para un experimento aleatorio cuyo resultado puede observarse de una manera continua en el tiempo. Los siguientes conceptos van a caracterizar a los procesos a través de sus trayectorias,

Definición 1.1.3. *Decimos que un proceso estocástico* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es continuo (por la derecha o por la izquierda) si las trayectorias del procesos son continuas (por la derecha o por la izquierda) casi seguramente, es decir, que para casi toda* $\omega \in \Omega$ *se cumple que la trayectoria correspondiente* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *es continuo (por la derecha o por la izquierda). De la misma manera se define continuidad por la derecha con límite por la izquierda o el de continuidad por la izquierda con límite por la derecha.*

En las siguientes secciones, veremos la importancia de que los procesos estocásticos tengan alguna de estas propiedades trayectoriales.
Consideremos a dos procesos estocásticos $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$ en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Decimos que dos procesos son iguales si para toda $t \geq 0$ y toda $\omega \in \Omega$ se cumple que $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. Sin duda alguna esta propiedad de igualdad entre dos procesos estocásticos es muy fuerte.
A continuación veremos tres conceptos de "igualdad" entre dos procesos, cuyas condiciones son un poco más débiles y que serán de gran utilidad más adelante.

Definición 1.1.4. *El proceso* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *es una modificación del proceso* $(X_t)_{t\geq 0}$ *si para cada* $t \geq 0$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\big(\omega \in \Omega : Y_t(\omega) = X_t(\omega)\big) = 1$$

Definición 1.1.5. *Los procesos* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *y* $(X_t)_{t\geq 0}$ *son indistinguibles si*

$$\mathbb{P}\big(\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega);\ \textit{para toda } t \in [0, \infty)) = 1.$$

Definición 1.1.6. *Dos procesos estocásticos* $(X_t)_{t\geq 0}$ *y* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *definidos en los espacios de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ *respectivamente y con el mismo espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *son equivalentes si tienen las mismas distribuciones finito dimensionales, es decir, si para cualquier sucesión finita* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *donde* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ *y* $A \in \mathcal{E}$ *se tiene*

$$\mathbb{P}\Big((X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \in A\Big) = \mathbb{P}\Big((Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}) \in A\Big).$$

Claramente si dos procesos son indistinguibles uno es modificación del otro y por lo tanto ambos son equivalentes. Por otro lado, dos procesos pueden ser una modificacion uno del otro y tener diferentes trayectorias.

Ejemplo: Consideremos a una variable aleatoria Z positiva con distribución continua, sean $X_t = 0$ y $Y_t = 1$ si $t = Z$ y $Y_t = 0$ en otro caso. El proceso $(Y_t)_{t\geq 0}$ es una modificación de $(X_t)_{t\geq 0}$, ya que para cada $t \geq 0$ tenemos que

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(Z \neq t) = 1,$$

y por otro lado

$$\mathbb{P}(Y_t = X_t; \text{ para toda } t \in (0, \infty]) = 0.$$

En general si un proceso es modificación de otro y ambos son continuos por la derecha o por la izquierda, entonces van a ser indistinguibles, en efecto,

Proposición 1.1.1. *Sea $(Y_t)_{t\geq 0}$ una modificación de $(X_t)_{t\geq 0}$ y ambos son continuos por la derecha (por la izquierda) o continuos, entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$ son indistinguibles.*

Demostración.
Solamente vamos a mostrar el caso en que ambos procesos son continuos por la derecha, los otros dos casos son análogos.
Sea A el conjunto donde las trayectorias del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ no son continuas por la derecha, y sea B el conjunto análogo para el proceso $(Y_t)_{t\geq 0}$. Si $C_t = \{X_t \neq Y_t\}$, y $C = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}^+} C_t$, entonces $\mathbb{P}(C) = 0$. Por lo tanto si $N = A \cup B \cup C$, se tendrá $\mathbb{P}(N) = 0$. Como N tiene probabilidad cero, entonces para cada $\omega \notin N$ se tiene $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para toda $t \in \mathbb{Q}^+$. Si t no es racional, existe una sucesión $(t_n)_{n\geq 1}$ de racionales no negativos, decreciente y que converge a t. Para $\omega \notin N$, $X_{t_n}(\omega) = Y_{t_n}(\omega)$ para cada $n \geq 1$, y

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega).$$

Como $\mathbb{P}(N) = 0$, entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es indistinguible de $(Y_t)_{t\geq 0}$. ■

Como hemos visto un proceso estocástico es en realidad una función que depende de dos variables (t, ω), si tomamos a t fija, sabemos que X_t es una función $\mathcal{F}$-medible, pero si el evento ω es fijo no tenemos ninguna propiedad de medibilidad sobre las trayectorias. Es por ello que es conveniente tener alguna propiedad de medibilidad conjunta.

Definición 1.1.7. *Un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\geq 0}$ con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ se llama medible si, para toda $A \in \mathcal{E}$, el conjunto $\{(t,\omega) : X_t(\omega)\}$ pertenece a la σ-álgebra producto $\mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{F}$, es decir,*

$$(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega) : \big([0,\infty)\times\Omega, \mathcal{B}[0,\infty)\times\mathcal{F}\big) \to (E,\mathcal{E}).$$

Una consecuencia inmediata del teorema de Fubini es que las trayectorias de un proceso medible son funciones $\mathcal{B}[0,\infty)$-medibles.

1.2 Filtraciones

Como en el caso discreto, para definir a los tiempos de paro y a las martingalas en el caso continuo, es necesario el concepto de filtración. Extender el concepto de filtración a tiempo continuo es bastante natural,

Definición 1.2.1. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},I\!P)$ un espacio de probabilidad. Una filtración es una familia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tales que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ siempre y cuando $s \leq t$.*

Este concepto también va a ser indispensable cuando definamos a los procesos de Markov. Al sistema $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ se le llama espacio de probabilidad filtrado.
Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, la filtración canónica asociada a dicho proceso está dada por $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$.
Vamos a denotar por

$$\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\Big(\bigcup_{s<t}\mathcal{F}_s\Big), \qquad \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s, \qquad \text{para toda } t \geq 0.$$

Es claro que $\mathcal{F}_{t^-} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t^+}$.
Introducir una filtración nos va permitir ver conceptos mas interesantes y más útiles que el concepto de proceso medible.

Definición 1.2.2. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},I\!P)$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega,\mathcal{F},I\!P)$ diremos que el proceso es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si para toda $t \geq 0$ se tiene que la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.*

Definición 1.2.3. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, I\!P)$ *un espacio de probabilidad filtrado y sea* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un proceso estocástico definido en* $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ *diremos que el proceso es progresivamente medible si para toda* $t \in I\!R$

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \longrightarrow X_t(\omega)$$

es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$*-medible.*

Claramente todo proceso es adaptado a su filtración canónica y todo proceso progresivamente medible es adaptado. En general, no siempre se va a terner que un proceso adaptado es progresivamente medible, salvo que el proceso sea continuo por la derecha o por la izquierda.

Teorema 1.2.1. *Sea* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un proceso estocástico con valores en un espacio métrico* $(E, \mathcal{B}(E))$*, adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *y continuo por la derecha, o por la izquierda, entonces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es progresivamente medible.*

Demostración.
Solamente vamos a demostrar el caso en que el proceso es continuo por la derecha, el otro caso es análogo. Para ello, basta ver que para cada $A \in \mathcal{B}(E)$

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t.$$

Para cada $n \geq 1$, $k = \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}\}$ y $0 \leq s \leq t$, definamos al proceso

$$X_s^n(\omega) = \begin{cases} X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega) & \text{si } \frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{(k+1)t}{2^n}, \\ X_0(\omega) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Gracias a la continuidad por la derecha tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$ para toda $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$. Por lo tanto basta mostrar que $X_s^n(\omega)$ es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible para obtener el resultado.
Al conjunto

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s^n(\omega) \in A\}$$

se puede ver como

$$\bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{ \left(\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n} \right] \times \left\{ X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega) \in A \right\} \right\} \bigcup \left\{ \{0\} \times \{X_0(\omega) \in A\} \right\},$$

el cual claramente esta en $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$. ∎

Definición 1.2.4. *Una filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *se llama continua por la derecha si* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ *para toda* $t \geq 0$.

De está última definición, es fácil ver que $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ es continua por la derecha. Basta renombrar a $\mathcal{F}_{t^+}$ por $\mathcal{G}_t$, entonces,

$$\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{G}_s = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_{s^+} = \bigcap_{s>t} \left(\bigcap_{u>s} \mathcal{F}_u \right) \subseteq \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{G}_t,$$

para toda $t \geq 0$, por lo tanto es continua por la derecha.
En el caso discreto se tiene que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ es continua por la derecha si y sólo si $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Tiempos de Paro

Definición 1.3.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, I\!P)$ *un espacio de probabilidad filtrado. Una función* $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ *se llama tiempo de paro con respecto a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si*

i) τ *es* $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t : t \in [0, \infty))$ *medible.*

ii) El conjunto $(\tau \leq t)$ *pertenece* $\mathcal{F}_t$ *para toda* $t \geq 0$.

Ejemplo 1). Si τ es una función constante, entonces τ es un tiempo de paro, ya que

$$(\tau \leq t) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t < c, \\ \Omega & \text{si } t \geq c, \end{cases}$$

ambos conjuntos pertenecen a $\mathcal{F}_t$, por lo tanto el conjunto $(\tau \leq t)$ es medible con respecto a $\mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$, y por definición, τ es tiempo de paro.

Ejemplo 2). Si τ es un tiempo de paro y k una constante positiva , entonces $\tau + k$ es un tiempo de paro, ya que si $t \in [0, k)$, entonces $(\tau + k \leq t) = \emptyset$, el cual esta en $\mathcal{F}_t$, ahora si $t \geq k$, entonces

$$(\tau + k \leq t) = (\tau \leq t - k) \in \mathcal{F}_{t-k} \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Por lo tanto $\tau + k$ es tiempo de paro.

Proposición 1.3.1. *Si la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha, entonces τ es un tiempo de paro si y sólo si $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $t \geq 0$ fijo, por ser τ tiempo de paro

$$(\tau \leq s) \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \qquad \text{para toda } s < t,$$

entonces

$$(\tau < t) = \bigcup_{s<t} (\tau \leq s) \in \mathcal{F}_t \qquad \text{para toda } t \geq 0.$$

$\Leftarrow$) Como la filtración es continua por la derecha y como $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$, se tiene que

$$(\tau \leq t) = \bigcap_{s>t} (\tau < s) \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t.$$ ■

Cabe señalar que en la primera parte de la demostración, nunca se utilizó que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha, por lo cual, se puede afirma que si τ es un tiempo de paro entonces $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

Proposición 1.3.2. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y $X_t = \mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)$, entonces el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ resulta ser un proceso adaptado a dicha filtración.*

Demostración.
Sea $t \geq 0$ fija, entonces

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \tau(\omega), \\ 0 & \text{si } t > \tau(\omega), \end{cases}$$

por lo tanto,

$$(X_t \leq u) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } u < 0, \\ (\tau < t) & \text{si } u \in [0,1), \\ \Omega & \text{si } u \geq 1, \end{cases}$$

pero estos tres conjuntos estan en $\mathcal{F}_t$, ya que τ es tiempo de paro, en conclusión el conjunto $(X_t \leq r) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$. ■

Definición 1.3.2. *Definamos al tiempo de entrada en A o primera vez que entra el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ en el conjunto A, como*

$$T_A(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} & si\ \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset, \\ \infty & si\ \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} = \emptyset. \end{cases}$$

Proposición 1.3.3. *Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y con espacio de estados $(E, \mathcal{B})$, donde E es un espacio métrico y sea $A \in \mathcal{B}$*

i) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es continuo por la derecha, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq o}$ es continua por la derecha y A es un conjunto abierto entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

ii) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es continuo y A es un conjunto cerrado entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demostración.
i) Sea Ω_0 tal que para toda $\omega \in \Omega_0$ la trayectoria $X_t(\omega)$ es continua por la derecha y $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Sea

$$B_t = \bigcup_{\substack{s\in\mathbb{Q}^+ \\ s<t}} (X_s \in A) \qquad \text{para } t \geq 0 \text{ fija },$$

donde A es un abierto de $\mathcal{B}$.
Claramente $B_t \in \mathcal{F}_t$ ya que el proceso X es $\mathcal{F}_t-$adaptado. En consecuencia, para mostrar que T_A es un tiempo de paro, basta ver que $(T_A < t) = B_t$.
Sea $\omega \in B_t$, entonces existe $s \in \mathbb{Q}^+$ y $s < t$ tal que $X_s(\omega) \in A$, por lo tanto $T_A(\omega) \leq s < t$, es decir, $\omega \in (T_A < t)$.
Sea $\omega \in (T_A < t)$, entonces existe $t_0 < t$ tal que $X_{t_0}(\omega) \in A$, como el proceso X es continuo por la derecha y A es abierto, va a existir $\epsilon > 0$ tal que $s \in \mathbb{Q} \cap [t_0, t_0 + \epsilon)$ y $X_s(\omega) \in A$.
ii) Para $x \in E$, sea $\rho(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$, y consideremos la sucesión de vecindades abiertas de A dada por $A_n = \{x \in E : \rho(x, A) < \frac{1}{n}\}$. Por (i) tenemos que $(T_{A_n} < t) \in \mathcal{F}_t$.
Claramente $T_{A_n} < T_{A_{n+1}}$, ya que $A_{n+1} \subset A_n$, además $T_A \geq T_{A_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto el límite de $(T_{A_n})_{n\geq 1}$ existe y es menor que T_A. Sea $T = \lim_{n\to\infty} T_{A_n}$.

Sobre $(T_A = 0)$ se tiene que $T_{A_n} = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sobre $(T_A > 0)$ existe un entero $k = k(\omega) \geq 1$ tal que

$$T_{A_n} = 0, \quad \text{para } 1 \leq n \leq k, \quad \text{y} \quad 0 < T_{A_n} < T_{A_{n+1}} < T_A \quad \text{para } n \geq k.$$

Para probar que $T_A = T$, es suficiente probar que $T \geq T_A$ en el conjunto $(T_A > 0, T < \infty)$.
En dicho evento tenemos, por la continuidad de las trayectorias de X, que $\lim_{n\to\infty} X_{T_{A_n}} = X_T$ y $X_{T_{A_m}} \in \partial A_m \subseteq A_n$, para toda $m > n \geq k$. Ahora si hacemos tender a m a infinito, obtenemos que $X_T \in A_n$, para toda $n \geq k$, y por lo tanto $X_T \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$, es decir, $T_A \leq T$. Finalmente

$$(T_A = 0) = (X_0 \in A) \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t,$$

y para $t > 0$

$$(T_A \leq t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (T_{A_n} < t) \in \mathcal{F}_t.$$

Por lo tanto T_A es tiempo de paro. ■

Definición 1.3.3. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Denotamos por $\mathcal{F}_\tau$ a la colección de eventos $A \in \mathcal{F}$ tal que*

$$A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t \qquad \textit{para cada} \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

Llamaremos a $\mathcal{F}_\tau$ la σ-álgebra detenida en τ.

Proposición 1.3.4. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra.*

Demostración.
Es claro que $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ y $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$,ya que

$$\Omega \cap (\tau \leq t) = (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t \qquad \text{y} \qquad \emptyset \cap (\tau \leq t) = \emptyset \in \mathcal{F}_t.$$

Ahora veamos que si $A \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $A^c \in \mathcal{F}_\tau$,

$$A^c \cap (\tau \leq t) = (\tau \leq t) \cap \big(A \cap (\tau \leq t)\big)^c \in \mathcal{F}_t.$$

Por último, sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por demostrar $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\tau$,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcap (\tau \leq t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \bigcap (\tau \leq t)\Big) \in \mathcal{F}_t.$$

Por lo tanto $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra. ∎

Lema 1.3.1. *Sean θ y τ tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\theta \wedge \tau$ y $\theta \vee \tau$ son tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Demostración.
Como $(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ y $(\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t$, entonces al conjunto

$$(\theta \wedge \tau > t) = (\theta > t) \cap (\tau > t) = (\theta \leq t)^c \cap (\tau \leq t)^c \in \mathcal{F}_t,$$

por lo tanto $(\theta \wedge \tau \leq t) = (\theta \wedge \tau > t)^c \in \mathcal{F}_t$, es decir, $\theta \wedge \tau$ es tiempo de paro. Para demostrar la segunda afirmación, basta ver que

$$(\theta \vee \tau \leq t) = (\theta \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

lo cual prueba que $\theta \vee \tau$ es tiempo de paro. ∎

Lema 1.3.2. *Sea $(\tau_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$, entonces*

$$\sup_{n\geq 1} \tau_n, \qquad \inf_{n\geq 1} \tau_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} \tau_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} \tau_n$$

son tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$. Si además $(\tau_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces el $\sup\limits_{n\geq 1} \tau_n$ tambien es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demostración.
Para la demostración de este lema basta ver que

$$\left(\sup_{n\geq 1} \tau_n \leq t\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\tau_n \leq t) \qquad \text{y} \qquad \left(\inf_{n\geq 1} \tau_n < t\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tau_n < t),$$

los cuales estan en $\mathcal{F}_t$. ∎

Lema 1.3.3. *Sean θ y τ dos tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y $A \in \mathcal{F}_\theta$ entonces $A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$. En particular si $\theta \leq \tau$ entonces $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_\tau$.*

Demostración.
Basta probar que $A \cap (\theta \leq \tau)$ esta en $\mathcal{F}_\tau$ y en $\mathcal{F}_\theta$.
Primero vamos a ver que $A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\tau$, para ello veamos que el conjunto

$$A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) = A \cap (\theta \leq t) \cap (\theta \wedge t \leq \tau \wedge t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

ya que $A \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t$, $(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ y $\theta \wedge t$ y $\tau \wedge t$ son $\mathcal{F}_t$-medibles, lo cual muestra nuestra afirmación.
En consecuencia tenemos que el conjunto

$$A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

y

$$A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau > t) \cap (\theta \leq t) = (\tau > t) \cap A \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\theta \leq t) = & \Big(A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) \cap (\theta \leq t) \Big) \\ & \cup \Big(A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau > t) \cap (\theta \leq t) \Big) \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\theta$. ■

Lema 1.3.4. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y θ una función $\mathcal{F}_\tau$-medible tal que $\theta \geq \tau$, entonces θ es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Demostración.
Como θ es $\mathcal{F}_\tau$-medible y como $\theta \geq \tau$, entonces

$$(\theta \leq t) = (\theta \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

por lo tanto θ es tiempo de paro. ■

Lema 1.3.5. *La suma de dos tiempos de paro es tiempo de paro.*

Demostración.
Sean τ y θ dos tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\tau \vee \theta$ es un tiempo de paro con respecto a la misma filtración, claramente $\tau + \theta \geq \tau \vee \theta$ y como τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible, θ es $\mathcal{F}_\theta$-medible y $\mathcal{F}_\tau, \mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_{\tau\vee\theta}$ concluimos que $\tau+\theta$ es $\mathcal{F}_{\tau\vee\theta}$-medible. Por el lema anterior se concluye que $\tau + \theta$ es un tiempo de paro. ∎

La diferencia de dos tiempos de paro no es tiempo de paro. Consideremos a τ_1 y τ_2 dos tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de tal manera que $\tau_1 \geq \tau_2$ y $\tau_2 = k$, donde k es una constante. Es claro que

$$(\tau_1 - \tau_2 \leq t) = (\tau_1 \leq t + k) \in \mathcal{F}_{t+k},$$

por lo tanto, la diferencia no es tiempo de paro.

Lema 1.3.6. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ entonces existe una sucesión $(\tau_n)_{n\geq 1}$de tiempos de paro discretos tal que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$.*

Demostración.
Primero vamos a definir una sucesión $(\tau_n)_{n\geq 1}$de tiempos aleatorios decreciente, de la siguiente manera

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{si } \frac{k-1}{2^n} \leq \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}, \qquad k = \{1, 2, \dots\} \\ \infty & \text{si } \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

Por definición $\tau_n \geq \tau_{n+1}$ y τ_n es $\mathcal{F}_\tau$-medible para toda n. Como $\tau_n \geq \tau$ por el Lema 1.3.4 tenemos que τ_n es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ ya que

$$|\tau_n - \tau| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ ∎

Lema 1.3.7. *Sean τ y θ dos tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Entonces $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ y cada uno de los eventos*

$$(\tau < \theta), \quad (\theta < \tau), \quad (\tau \leq \theta), \quad (\theta \leq \tau), \quad (\tau = \theta)$$

pertenecen a $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$.

Demostración.
Por el Lema 1.3.3, es claro que $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} \subseteq \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$. Para ver la otra inclusión tomemos un conjunto $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ y veamos que

$$\begin{aligned} A \cap (\tau \wedge \theta \leq t) = A \cap \big[(\theta \leq t) \cup (\tau \leq t)\big] \\ \big[A \cap (\theta \leq t)\big] \cup \big[A \cap (\tau \leq t)\big] \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

por lo tanto $A \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}$ y $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$.
Nuevamente por el Lema 1.3.3 tenemos que $(\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ y por lo tanto intercambiando a τ y θ tenemos que $(\tau \leq \theta) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$. En consecuencia $(\theta = \tau) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ ya que $(\tau = \theta) = (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq \theta)$.
Para concluir $(\theta < \tau) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ ya que $(\theta < \tau) = (\theta \leq \tau) \cap (\tau = \theta)^c$ y nuevamente intercambiando a τ y θ tenemos que $(\tau < \theta) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$. ■

Definición 1.3.4. *Un conjunto $A \subset I\!R^+ \times \Omega$ es progresivamente medible si el proceso estocástico*

$$1\!\!1_A(t,\omega) = \begin{cases} 1 & si\ (t,\omega) \in A, \\ 0 & si\ (t,\omega) \notin A \end{cases}$$

es progresivamente medible.

Proposición 1.3.5. *Sean τ y θ son tiempos de paros con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tal que $\theta \leq \tau$. Entonces los intervalos $[\theta,\tau], (\theta,\tau), [\theta,\tau), (\theta,\tau]$ y $[\tau]$ son conjuntos progresivamente medible.*

Demostración.
Primero definamos al proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ por $X_t(\omega) = 1\!\!1_{[\theta,\tau)}(t,\omega)$. Claramemte este proceso es continuo por la derecha. Para ver que dicho proceso es progresivamente medible, es suficiente notar que es adapatado, gracias a la continuidad por la derecha. Como

$$X_t^{-1}(1) = (\theta \leq t < \tau) = (\theta \leq t) \cap (t < \tau) \in \mathcal{F}_t \quad \text{para toda } t \geq 0.$$

tenemos que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado. De las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (\theta,\tau) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\theta + \frac{1}{n}, \tau\right), & [\theta,\tau] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\theta, \tau + \frac{1}{n}\right), \\ (\theta,\tau] &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\theta + \frac{1}{n}, \tau\right], & [\tau] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\tau, \tau + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

se concluye que estos intervalos son progresivamente medible. ∎

Definición 1.3.5. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico y τ un tiempo de paro, vamos a definir a la función X_τ en el evento $(\tau < \infty)$ por*

$$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

Si el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es medible y el tiempo de paro es finito, entonces la función X_τ es una variable aleatoria. En efecto,

Teorema 1.3.1. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivamente medible con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$, y sea τ un tiempo de paro con respecto a la misma filtración. Entonces*

i) La variable aleatoria X_τ definida en el conjunto $(\tau < \infty) \in \mathcal{F}_\tau$, es $\mathcal{F}_\tau$-medible

ii) El "proceso parado" $(X_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ es progresivamente medible con respecto a $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$.

Demostración.
Para probar el inciso $i)$ basta ver que para cualquier $B \in \mathcal{E}$ y $t \geq 0$ el evento $(X_\tau \in B) \cap (\tau \leq t)$ esta en $\mathcal{F}_t$, pero

$$(X_\tau \in B) \cap (\tau \leq t) = (X_{t\wedge\tau} \in B) \cap (\tau \leq t),$$

por lo tanto es suficiente probar el segundo inciso.
Sea $\varphi(s, \omega) = s \wedge \tau(\omega)$ y $r \leq t$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi \leq r) &= \big\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : s \wedge \tau(\omega) \leq r\big\} \\ &= \big([0, r] \times \Omega\big) \cup \big([0, t] \times (\tau(\omega) \leq r)\big) \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Ahora consideremos al mapeo $\Psi : [0, t]\times\Omega \to [0, t]\times\Omega$ definido de la siguiente manera $(s, \omega) \mapsto (\varphi(\omega), \omega)$, este mapeo es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible, ya que para $I \subset [0, t]$ y $A \in \mathcal{F}_t$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(I \times A) &= \big\{(s, \omega) : \varphi(s, \omega) \in I \text{ y } \omega \in A\big\} \\ &= \varphi^{-1}(I) \cap \big([0, t] \times A\big) \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Como el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible, entonces la composición

$$X \circ \Psi(s, \omega) = X(s \wedge \tau(\omega), \omega) = X_{s\wedge\tau}(\omega)$$

es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible, lo cual muestra el segundo inciso. ∎

1.4 Martingalas con tiempo continuo.

Definición 1.4.1. *Sea* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un proceso adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. *Decimos que es submartingala si para cada pareja de reales* s, t,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s \qquad \textit{con} \qquad 0 \leq s < t < \infty,$$

y sobremartingala si para cada pareja de reales s, t; *con* $0 \leq s < t < \infty$,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s.$$

Decimos que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ *es martingala si es submartingala y sobremartingala, es decir,*

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \qquad 0 \leq s < t < \infty.$$

A continuación vamos a ver algunos ejemplos de martingalas y para ello vamos a recordar las definiciones de dos procesos muy importantes dentro de la teoría de procesos a tiempo continuo, el *proceso Piosson* y el *movimiento browniano.*

Definición 1.4.2. *Un proceso Poisson con parámetro* $\lambda > 0$, *es un proceso adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *continuo por la derecha y con límite por la izquierda y que toma valores en los enteros, tal que*

i) $N_0 = 0$ *casi seguramente.*

ii) Para $0 \leq s < t$, $N_t - N_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s$ *y con distribución Poisson con media* $\lambda(t-s)$.

Definición 1.4.3. *Un movimiento browniano es un proceso* $(B_t)_{t\geq 0}$ *adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *continuo, que toma valores en* $\mathbb{R}$ *tal que*

i) $B_0 = 0$ *casi seguramente.*

ii) Para $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s$ *y con distribucion Normal con media cero y varianza* $(t-s)$.

Ejemplo 1). Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso Poisson con parámetro λ, veamos que los procesos $(N_t-\lambda t)_{t\geq 0}$ y $\big((N_t-\lambda t)^2-\lambda t\big)_{t\geq 0}$ son martingalas. Como $N_t-\lambda t$ tiene esperanza nula y $N_t - N_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[N_t - \lambda t - (N_s - \lambda t)|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[N_t - N_s - \lambda(t-s)|\mathcal{F}_s\big]\\ &= \mathbb{E}\big[N_t - N_s - \lambda(t-s)\big] = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el proceso $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ es martingala.
Es claro que $\mathbb{E}\big[(N_t - \lambda t)^2\big]$ es la varianza de N_t y como esta última tiene distribución Poisson entonces su varianza es igual a λt, por lo tanto la esperanza de la variable aleatoria $(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$ es cero y por un razonamiento análogo al anterior se obtiene que el proceso $\big((N_t-\lambda t)^2-\lambda t\big)_{t\geq 0}$ es martingala.

Ejemplo 2). Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ el movimiento browniano adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. De la definición del movimiento browniano se tiene que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, gracias a dicha propiedad se obtiene que el movimiento browniano es martingala, ya que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s]\\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + B_s\\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s.\end{aligned}$$

Ejemplo 3). Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, veamos que el proceso $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es martingala. Sea $s \leq t$, entonces

$$\mathbb{E}\big[B_t^2 - t\big|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[B_t^2 - B_s^2 - (t-s)\big|\mathcal{F}_s\big] + B_s^2 - s.$$

Basta mostrar que $\mathbb{E}\big[B_t^2 - B_s^2 - (t-s)\big|\mathcal{F}_s\big] = 0$ para ver que $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es martingala. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[B_t^2 - B_s^2 - (t-s)\big|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[(B_t - B_s)^2 - (t-s) + 2B_tB_s - 2B_s^2\big|\mathcal{F}_s\big]\\ &= \mathbb{E}\big[(B_t - B_s)^2\big] - (t-s) + 2\mathbb{E}\big[B_s(B_t - B_s)\big|\mathcal{F}_s\big],\end{aligned}$$

claramente el primer término es igual a $(t-s)$ y el último es igual a cero gracias a que el movimiento browniano es martingala, por lo tanto

$$\mathbb{E}\big[B_t^2 - B_s^2 - (t-s)\big|\mathcal{F}_s\big] = 0.$$

Ejemplo 4). Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ veamos que el proceso $(M_t^\alpha)_{t\geq 0}$ definido por

$$M_t^\alpha = \exp\left\{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right\},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, es una martingala. Para demostrarlo basta ver

$$\mathbb{E}\left[\frac{M_{t+s}^\alpha}{M_t^\alpha}\bigg|\mathcal{F}_t\right] = 1 \qquad \text{donde} \qquad 0 < s < \infty.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg[\exp\bigg\{\alpha B_{t+s} - &\frac{\alpha^2}{2}(t+s) - \alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2}t\bigg\}\bigg|\mathcal{F}_t\bigg] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha(B_{t+s} - B_t) - \frac{\alpha^2}{2}s\right\}\bigg|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}s\right\}\mathbb{E}\left[\exp\left\{B_{t+s} - B_t\right\}\Big|\mathcal{F}_t\right],\end{aligned}$$

pero sabemos que $B_{t+s} - B_t$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y que se distribuye como una normal con media cero y varianza s, por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{B_{t+s} - B_t\right\}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \exp\left\{\frac{\alpha^2}{2}s\right\}.$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha B_{t+s} - \frac{\alpha^2}{2}(t+s) - \alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\}\bigg|\mathcal{F}_t\right] = 1.$$

1.4.1 Desigualdades Maximales

Proposición 1.4.1. *Sea $(X_n)_{n\in J}$, donde $J = \{0, 1, \ldots, N\}$, una submartingala integrable y $\lambda \geq 0$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} X_n \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[X_N \mathbb{1}_{\left\{\sup_{n\in J} X_n \geq \lambda\right\}}\right] \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[X_N].$$

Demostración.
Sea

$$\tau = \begin{cases} \inf\{n : X_n \geq \lambda\} & \text{si existe } n \leq N \text{ tal que } X_n \geq \lambda, \\ N & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $N \geq \tau$. Como $(X_n)_{n\in J}$ es una submartingala y τ un tiempo de paro, por el Teorema de Muestreo Opcional (caso discreto) tenemos que $\mathbb{E}[X_N] \geq \mathbb{E}[X_\tau]$.
Sea

$$A = \Big\{\omega \in \Omega : \sup_{n\in J} X_n(\omega) \geq \lambda\Big\},$$

para $\omega \in A$ tenemos que $X_\tau(\omega) \geq \lambda$, ya que al menos va a existir una $k \in J$ tal que $X_k(\omega) \geq \lambda$ y la más pequeña de ellas cumple que es mayor o igual a λ. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_N] \geq \mathbb{E}[X_\tau] &= \mathbb{E}\big[X_\tau \mathbb{1}_A\big] + \mathbb{E}\big[X_\tau \mathbb{1}_{A^c}\big] \\ &\geq \lambda \mathbb{P}\big(A\big) + \mathbb{E}\big[X_\tau \mathbb{1}_{A^c}\big], \end{aligned}$$

pero en A^c, τ es igual a N, de tal modo

$$\mathbb{E}[X_N] \geq \lambda \mathbb{P}\big(A\big) + \mathbb{E}\big[X_N \mathbb{1}_{A^c}\big],$$

y si restamos el último término en ambas partes de la desigualdad se obtiene que

$$\mathbb{E}\big[X_N \mathbb{1}_A\big] \geq \lambda \mathbb{P}\big(A\big).$$ ■

Corolario 1.4.1. *Sea $(X_n)_{n\in J}$, donde $J = \{0, 1, \ldots, N\}$ es una martingala o submartingala y $\lambda \geq 0$. Si $\mathbb{E}[X_N^p] < \infty$ para alguna $p > 1$, entonces*

$$\lambda^p \mathbb{P}\Big(\sup_{n\in J} |X_n| \geq \lambda\Big) \leq \mathbb{E}\big[|X_N|^p\big]$$

y además

$$\mathbb{E}\big[|X_N|^p\big] \leq \mathbb{E}\Big[\sup_{n\in J} |X_n|^p\Big] \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big].$$

Demostración.
Si $(X_n)_{n\in J}$ es una martingala o submartingala, entonces $\big(|X_n|^p\big)_{n\in J}$ es una submartingala positiva gracias a la desigualdad de Jensen condicional, ya que

$$\mathbb{E}\big[|X_{m+1}|^p\big|\mathcal{F}_m\big] \geq \Big|\mathbb{E}\big[X_{m+1}\big|\mathcal{F}_m\big]\Big|^p = |X_m|^p.$$

De esta manera aplico la proposición anterior a la submartingala $\big(|X_n|^p\big)_{n\in J}$ y obtengo que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in J}|X_n|^p \geq \lambda^p\right) \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}\big[|X_N|^p\big]$$

y como

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in J}|X_n| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{n\in J}|X_n|^p \geq \lambda^p\right),$$

la primera desigualdad queda probaba.
Para probar la segunda desigualdad consideremos a $X^* = \sup\limits_{n\in J}|X_n|$ y a k una constante positiva. Aplicando la proposición anterior, el teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(X^*\wedge k)^p\big] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{X^*\wedge k} p\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{k} p\lambda^{p-1}\mathbb{1}_{\{\lambda\leq X^*\}}\mathrm{d}\lambda\right] \\
&= \int_0^k p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(\lambda\leq X^*)\mathrm{d}\lambda \leq \int_0^k p\lambda^{p-1}\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\Big[|X_N|\mathbb{1}_{\{\lambda\leq X^*\}}\Big]\mathrm{d}\lambda \\
&= \mathbb{E}\left[|X_N|\int_0^{X^*\wedge k} p\lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda\right] = \frac{p}{1-p}\mathbb{E}\big[|X_n|(X^*\wedge k)\big] \\
&\leq \frac{p}{1-p}\mathbb{E}\big[|X_N|^p\big]^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}\big[(X^*\wedge k)^p\big]^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Si dividimos por $\mathbb{E}\big[(X^*\wedge k)^p\big]^{\frac{p-1}{p}}$, en ambas partes de la última desigualdad, obtenemos

$$\mathbb{E}\big[(X^*\wedge k)^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}\big[|X_N|\big],$$

y si ahora hacemos tender a k a infinito se llega a la segunda desigualdad del corolario. ∎

Corolario 1.4.2. *Sea* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *una martingala. Entonces para* $D\subset[0,T]$ *numerable y* $p\geq 1$,

$$\lambda^p \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in D}|X_t|\geq\lambda\Big)\leq \sup_{t\in D}\mathbb{E}\big[|X_t|^p\big],$$

y además

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in D}|X_t|\geq\lambda\Big]\leq\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\sup_{t\in D}\mathbb{E}\big[|X_t|^p\big].$$

Demostración.
Sea $(D_n)_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de D, tal que $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$. Por el corolario anterior, para cada D_n tenemos que

$$\lambda^p\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in D_n}|X_t|\geq\lambda\Big)\leq\sup_{t\in D_n}\mathbb{E}\big[|X_t|^p\big]\leq\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\big[|X_t|^p\big].$$

Sean $(Y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias definida por $Y_n=\sup_{t\in D_n}|X_t|$; y $Y=\sup_{t\in D}|X_t|$. Claramente es una sucesión creciente y que además converge a Y.
Por otra parte sea $\lambda>0$, definamos a los conjuntos

$$A_n=\big\{\omega\in\Omega:Y_n(\omega)\geq\lambda\big\}\qquad\text{y}\qquad A=\big\{\omega\in\Omega:Y(\omega)\geq\lambda\big\},$$

es claro que $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de subconjuntos de Ω. Si vemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$, entonces

$$\lambda^p\mathbb{P}(A)=\lambda^p\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\leq\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\big[|X_t|^p\big],$$

esto prueba la primera desigualdad del corolario.
Para mostrar que $\lim_{n\to\infty}A_n=A$ consideremos a un elemento de A. El elemento $\omega\in A$ si y sólo si $Y(\omega)\geq\lambda$, esto es análogo a que para toda $\epsilon>0$ exista $t\in D$ tal que $|X_t(\omega)|\geq\lambda-\epsilon$, esto último sucede si y solamente si para toda $\epsilon>0$ existe $m\in\mathbb{N}$ y $t\in D_m$ tal que $|X_t(\omega)|\geq\lambda-\epsilon$, es decir, que

$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Para probar la segunda desigualdad del corolario, veamos que

$$\mathbb{E}[Y^p] = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in D_m} |X_t|^P\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in D_m} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big]$$
$$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big].$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} Y_n^p = Y^p$ aplicando el teorema de la Convergencia Monótona tenemos que $\mathbb{E}\big[Y^p\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[Y_n^p\big]$, es decir

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in D} |X_t|^P\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in D_m} |X_t|^P\right],$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in D} |X_t|^P\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big].$$

■

Corolario 1.4.3 (Desigualdades de Doob). *Sea $(X_t)_{t\in[0,T]}$ una martingala continua por la derecha (o por la izquierda). Entonces para $p \geq 1$ tenemos,*

i) $\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t| \geq \lambda\right) \leq \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big]$,

ii) $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big]$

Demostración.
Por el corolario anterior, sabemos que ambas desigualdades se cumplen para $D \subset [0,T]$ numerable y como en este caso tenemos continuidad por la derecha (o por la izquierda), podemos aproximar y así obtener el resultado. ■

1.5 Regularidad y Convergencia

Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con espacio de estados $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Consideremos dos números reales a y b de tal manera que $a < b$ y un subconjunto

I de $[0,\infty)$. Sea $F=\{t_1<t_2<\cdots<t_d\}$ un subconjunto finito de I, vamos a definir de manera inductiva los tiempos

$$s_1(\omega)=\inf\{t_i : X_{t_i}>b\}, \qquad s_2(\omega)=\inf\{t_i>s_1 : X_{t_i}<a\},$$
$$s_{2n+1}(\omega)=\inf\{t_i>s_{2n} : X_{t_i}>b\} \quad s_{2n+2}(\omega)=\inf\{t_i>s_{2n+1} : X_{t_i}<a\},$$

por convención $\inf(\emptyset)=t_d$. Definamos a

$$D(X,F,[a,b])=\sup\{n : s_{2n}<t_d\},$$

y al número de veces que cruza el proceso $(X_t)_{t\in I}$ por abajo del intervalo $[a,b]$ por

$$D(X,I,[a,b])=\sup\{D(X,F,[a,b]) : F\subset I \text{ y finito.}\}.$$

La función $D(X,I,[a,b])$ es una variable aleatoria cuando I es numerable y además se cumple que

Proposición 1.5.1. *Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala y el conjunto I numerable , entonces*

$$(b-a)\mathbb{E}\big[D(X,I,[a,b])\big]\leq \sup_{t\in I}\mathbb{E}\big[(X_t-b)^+\big].$$

Demostración.
Basta probar la desigualdad en el caso en que I es finito. Tomemos al conjunto I como $\{t_1<t_2<\cdots<t_d\}$. Por definición, los tiempos $s_1,s_2,\ldots,s_{2n},\ldots$ son tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_{t_i})_{t_i\in I}$. Si $A_k=\{s_k<t_d\}$, entonces $A_k\in\mathcal{F}_{s_k}$ y $A_k\supset A_{k+1}$ ya que $s_k\leq s_{k+1}$. En el conjunto A_{2n-1} tenemos que $X_{s_{2n-1}}>b$ y en el conjunto A_{2n} tenemos que $X_{s_{2n}}<a$, aplicando el teorema de paro para el caso discreto vemos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{A_{2n-1}}(X_{s_{2n-1}}-b)\mathrm{d}\mathbb{P}\leq \int_{A_{2n-1}}(X_{s_{2n}}-b)\mathrm{d}\mathbb{P}\\
&= \int_{A_{2n}}(X_{s_{2n}}-b)\mathrm{d}\mathbb{P}+\int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{s_{2n}}-b)\mathrm{d}\mathbb{P}\\
&\leq (a-b)\mathbb{P}(A_{2n})+\int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{s_{2n}}-b)\mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Como en el conjunto A_{2n}^c el tiempo $s_{2n}=t_d$, entonces

$$(b-a)\mathbb{P}(A_{2n})\leq \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{s_{2n}}-b)^+\mathrm{d}\mathbb{P}=\int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{t_d}-b)^+\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Pero $\mathbb{P}(A_{2n}) = \mathbb{P}\big(D(X, I, [a,b]) \geq n\big)$ y los conjuntos $A_{2n-1} \setminus A_{2n}$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b-a)\mathbb{P}\big(D(X, I, [a,b]) \geq n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}} (X_{t_d} - b)^+ \mathrm{d}\mathbb{P},$$

pero esto es equivalente a

$$(b-a)\mathbb{E}\big[D(X, I, [a,b])\big] \leq \mathbb{E}\big[(X_{t_d} - b)^+\big].$$

■

Gracias a esta proposición vamos a obtener el Teorema Fundamental de Regularización para submartingalas a tiempo continuo.

Teorema 1.5.1. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala tal que*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[|X_t|\big] < \infty.$$

entonces

$$X_{t^+}(\omega) = \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega), \qquad X_{t^-}(\omega) = \lim_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega),$$

existen casi seguramente para toda $t \geq 0$ y toda $t > 0$ respectivamente.

Demostración.
Consideremos al conjunto

$$A_{n,a,b} = \Big\{\omega \in \Omega : D\big(X(\omega), \mathbb{Q}\cap[0,n], [a,b]\big) = \infty\Big\},$$

donde a y b son números racionales. De la proposición anterior tenemos que este conjunto tiene medida de probabilidad cero, ya que

$$\mathbb{E}\big[(X_t - b)^+\big] \leq \mathbb{E}\big[|X_t|\big] + b,$$

por lo tanto el conjunto $A_n = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} A_{n,a,b}$ tambien tiene probabilidad cero, es decir existe un conjunto $\Omega^* \subseteq \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ y para cada $\omega \in \Omega^*$

$$D\big(X(\omega), \mathbb{Q}\cap[0,n], [a,b]\big) < \infty$$

para cada pareja de racionales a, b. Por lo tanto para cada $\omega \in \Omega^*$

$$X_{t^+}(\omega) = \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega), \qquad X_{t^-}(\omega) = \lim_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega),$$

existen, ya que de lo contrario los conjuntos

$$\left\{\omega \in \Omega : \liminf_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega) < a < b < \limsup_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega)\right\}$$

y

$$\left\{\omega \in \Omega : \liminf_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega) < a < b \limsup_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega)\right\}$$

tendrian probabilidad positiva, y esto implicaria que el conjunto

$$\left\{\omega \in \Omega : D\big(X(\omega), \mathbb{Q}\cap[0,n], [a,b]\big) = \infty\right\}$$

también tendria probabilidad positiva, lo cual nunca sucede. ■

Para probar los siguientes resultados es indispensable definir y ver algunas de las propiedades de integrabilidad uniforme.

1.5.1 Integrabilidad Uniforme.

Si X es una variable aleatoria integrable, es claro que $X\mathbb{1}_{\{|X|\geq\alpha\}}$ se va a cero conforme α se va a infinito y es dominada por $|X|$, entonces por el teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{\{|X|\geq\alpha\}} |X| d\mathbb{P} = 0.$$

Si ahora tomamos una familia de variables aleatorias integrables $(X_i)_{i\in J}$, donde J es un conjunto de índices, vemos que para cada $i \in J$ se cumple

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0,$$

pero el límite no necesariamente es uniforme en J.
El siguiente concepto, como veremos más adelante, nos será de gran utilidad para la convergencia de martingalas.

Definición 1.5.1. *Una familia $U = (X_i)_{i \in J}$ de variables aleatorias integrables, donde J es un conjunto de índice, se llama uniformemente integrable si*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left[\sup_{i \in J} \int_{\{|X_i| \geq \alpha\}} |X_i| d\mathbb{P} \right] = 0.$$

La siguiente proposición enuncia las propiedades más importantes de una familia de variables aleatorias uniformemente integrable, a su vez, dichas propiedas resultaran condiciones suficientes para que una familia de variables aleatorias sea uniformemente integrable.

Proposición 1.5.2. *Sea $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in J}$ una familia de variables aleatorias integrables, para que $\mathcal{U}$ sea uniformemente integrable es necesario y suficiente que las tres condiciones siguientes se cumplan*

i) $\sup_{i \in J} \mathbb{E}\big[|X_i|\big] < \infty$,

ii) $\sup_{i \in J} \mathbb{P}\big(|X_i| > c\big) \xrightarrow[c \to \infty]{} 0$,

iii) La medida Q^i es una medida definida en $\mathcal{F}$ por

$$Q^i(A) = \int_A |X_i| d\mathbb{P},$$

entonces la familia $\{Q^i\}_{i \in J}$ es uniformemente absolutamente continua, es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $A \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ implica que $\sup_{i \in J} Q^i(A) < \epsilon$.

Demostración.
Para establecer la necesidad de las condiciones observemos que para toda X_i variable aleatoria integrable y toda $A \in \mathcal{F}$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_A |X_i| d\mathbb{P} &= \int_{A \cap \{|X_i| \geq \alpha\}} |X_i| d\mathbb{P} + \int_{A \cap \{|X| < \alpha\}} |X_i| d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{\{|X_i| \geq \alpha\}} |X_i| d\mathbb{P} + \alpha \mathbb{P}(A).
\end{aligned}$$

Por ser $\mathcal{U}$ uniformemente integrable, para $\epsilon > 0$ dada existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\sup_{i\in J}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para } \alpha \geq \alpha_0.$$

Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que, $\mathbb{P}(A) \leq \frac{\epsilon}{2\alpha_0}$. Por lo anterior se tiene que

$$\sup_{i\in J}\int_A |X_i|d\mathbb{P} \leq \sup_{i\in J}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P} + \alpha_0\mathbb{P}(A) < \epsilon.$$

Lo cual demuestra que $iii)$ es necesaria.
Para ver que $i)$ es necesaria, observemos que

$$\int_\Omega |X_i|d\mathbb{P} \leq \int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P} + \alpha,$$

como $mathcalU$ es uniformemente integrable al aplicar el supremo en ambas partes de la desigualdad se obtiene

$$\sup_{i\in J}\int_\Omega |X_i|d\mathbb{P} \leq \frac{\epsilon}{2} + \alpha,$$

para $\alpha > \alpha_0$. Para obtener $ii)$ basta aplicar la desigualdad de Chebyshev a X_i y ver que

$$\mathbb{P}\big(|X_i| \geq c\big) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}\big[|X_i|\big] \leq \frac{1}{c}\sup_{i\in J}\mathbb{E}\big[|X_i|\big],$$

claramente al hacer tender a c a infinito la $\mathbb{P}\big(|X_i| \geq c\big)$ se va a cero.
Reciprocamente, si $i)$ y $iii)$ se cumplen vamos a tener que $\mathcal{U}$ es uniformemente integrable, ya que para $\alpha > \alpha_0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbb{P}\big(|X_i| \geq \alpha\big) \leq \delta,$$

debido a que $i)$ implica $ii)$. Por lo tanto

$$\sup_{i\in J}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P} < \epsilon.$$

Lo cual prueba que $\mathcal{U}$ es uniformemente integrable. ∎

Teorema 1.5.2. *Sean* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatoiras integrables. Si* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ *casi seguramente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es uniformemente integrable.*

ii) X_n *converge a* X *en* L_1*.*

Demostración.
Supongamos que X_n converge a X en L_1 y veamos que las condiciones del teorema anterior se cumplen. Sea $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\int_A |X_n| d\mathbb{P} \leq \int_A |X| d\mathbb{P} + \int |X_n - X| d\mathbb{P}.$$

De esta desigualdad se deduce inmediatamente la condición $i)$. Por otro lado, sea $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |X_n - X| d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para} \qquad n \geq N,$$

y sea $\delta > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{0\leq i\leq N} \int_A |X_i| d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2},$$

donde $X_0 = X$, esto es posible ya que la familia $\{X_0, X_1 \ldots, X_n\}$ es finita y en consecuencia es uniformemente integrable. Entonces

$$\int_A |X_n| d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2} + \int |X_n - X| d\mathbb{P},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y siempre que $\mathbb{P}(A) < \delta$, por lo tanto la condición $iii)$ se satisface.
Por otra parte, supongamos que las variables aleatorias X_n son uniformemente integrables. Por le lema de Fatou y por $i)$ del teorema anterior implica que

$$\int_\Omega |X| d\mathbb{P} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n| d\mathbb{P} < \infty.$$

Por lo tanto X es integrable.
Sea $c > 0$, definamos a X_n^c por

$$X_n^c(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } |X_n(\omega)| \leq c, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y a $X_{nc} = X_n - X_n^c$. De la misma manera se define a X_c y a X^c, entonces

$$\mathbb{E}\big[|X_n - X|\big] \leq \mathbb{E}\big[|X_n^c - X^c|\big] + \mathbb{E}\big[|X_{nc}|\big] + \mathbb{E}\big[|X_c|\big].$$

Dada $\epsilon > 0$, tomemos a c lo suficientemente grande de tal manera que las últimas dos esperanzas de la desigualdad sean menores a $\frac{\epsilon}{3}$, independientemente del valor de n. Gracias a el teorema de Convergencia Dominada tenemos que para n suficientemente grande

$$\mathbb{E}\big[|X_n^c - X^c|\big] < \frac{\epsilon}{3},$$

ya que las variables aleatorias $|X_n^c - X^c|$ estan dominadas por $|X_n - X|$ y además convergen casi seguramente a cero. Por lo tanto

$$\mathbb{E}\big[|X_n - X|\big] < \epsilon,$$

por lo tanto X_n converge a X en L_1. ∎

Consideremos a $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$, una sucesión de sub-$\sigma$-álgebras tal que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$ para $n \leq m \leq 0$. Una submartingala con respecto a $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ es una familia $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ de variables aleatorias tal que $\mathbb{E}[X_n^+] < \infty$ para cada n y

$$X_n \leq \mathbb{E}\big[X_m \big| \mathcal{F}_n\big] \qquad \text{para} \qquad n \leq m \leq 0.$$

Teorema 1.5.3. *Si $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ es una submartingala, entonces el $\lim\limits_{n\to-\infty} X_n$ existe casi seguramente. Si además $\sup\limits_n \mathbb{E}\big[|X_n|\big] < \infty$, entonces $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ es uniformente integrable, la convergencia se satisface en L_1 y para toda n*

$$\lim_{k\to-\infty} X_k \leq \mathbb{E}\big[X_n \big| \mathcal{F}_{-\infty}\big],$$

donde $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap\limits_{n\in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Demostración.
Es claro que $\mathbb{E}[X_n^+] \leq \mathbb{E}[X_0^+] < +\infty$, entonces la primera afirmación se prueba exactamente como en el teorema de convergencia para submartingalas a tiempo discreto. Para probar la segunda parte del teorema, primero observemos que si $\sup_n \mathbb{E}\big[|X_n|\big] < \infty$ es equivalente a $\lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}[X_n] > -\infty$. Tomemos una $\epsilon > 0$ fija y un entero negativo n_0 tal que

$$\mathbb{E}[X_{n_0}] < \mathbb{E}[X_n] + \epsilon \qquad \text{para } n \leq n_0.$$

Además para cualquier $\lambda > 0$ y n, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_n|>\lambda\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{\{X_n>\lambda\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{X_n<-\lambda\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_{\{X_n\geq-\lambda\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{X_n>\lambda\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, gracias a la propiedad de submartingala vemos que

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_n|>\lambda\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} &\leq \int_{\{X_n\geq-\lambda\}} X_{n_0} \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{X_n>\lambda\}} X_{n_0} \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\{X_n\geq-\lambda\}} X_{n_0} \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_\Omega X_{n_0} \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{X_n>\lambda\}} X_{n_0} \mathrm{d}\mathbb{P} + \epsilon \\ &= \int_{\{|X_n|>\lambda\}} X_{n_0} \mathrm{d}\mathbb{P} + \epsilon.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Por Chebyshev tenemos que

$$\mathbb{P}\big(|X_n| > \lambda\big) \leq \frac{1}{c} \sup_n \mathbb{E}\big[|X_n|\big],$$

de aquí concluimos que $X_{n_0} \mathbb{1}_{\{|X_n|>\lambda\}}$ converge a cero casi seguramente, por lo tanto al aplicar el teorema de convergencia dominada a esta última variable aleatoria y por la desigualdad (1.1) van implicar que $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable y por ende la convergencia se satisface en L_1. Para concluir con la demostración, por la propiedad de submaringala tenemos que para toda $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$

$$\int_A X_m \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \qquad \text{para } m < n,$$

y gracias a la convergencia en L_1 obtenemos que

$$\int_A \lim_{n\to-\infty} X_m \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P}. \qquad \blacksquare$$

Gracias a este teorema vamos a obtener algunas propiedades de X_{t^+} que nos seran de gran utilidad para ver bajo que condiciones una submartingala va a tener trayectorias continuas por la derecha.

Proposición 1.5.3. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala. Si $\mathbb{E}\big[|X_t|\big] < +\infty$ para toda t, entonces $\mathbb{E}\big[|X_{t^+}|\big] < \infty$ para toda t y*

$$X_t \leq \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t] \qquad \textit{casi seguramente.} \tag{1.2}$$

La igualdad se obtiene si la función $t \to \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha. Además $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ es una submartingala con respecto a $(\mathcal{F}_{t^+})$ con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda.

Demostración.
Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de numeros racionales en (t,∞) monótona decreciente a $t \geq 0$ cuando n se va a infinito. Claramente $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala como la del teorema anterior, por lo tanto tenemos que X_{t^+} es integrable y que X_{t_n} converge a X_{t^+} en L_1.
Por otro lado de la definición de submartingala tenemos que para toda $A \in \mathcal{F}_t$

$$\int_A X_t \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_A X_{t_n} \mathrm{d}\mathbb{P},$$

esto implica que $X_{t_n} - X_t$ es positiva casi seguramente, entonces

$$0 \leq \left| \int_A X_{t_n} - X_t \mathrm{d}\mathbb{P} \right| \leq \int_A |X_{t_n} - X_t| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X_{t_n} - X_t| \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Por la convergencia de X_{t_n} en L_1 se tiene

$$X_t \leq \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t].$$

Por la convergencia en L_1 tenemos que $\mathbb{E}[X_{t^+}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{t_n}]$, si $t \to \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t^+}]$ y por lo tanto $X_t = \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t]$ casi seguramente.
Ahora considermos $s < t$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de número racionales

menores a t y que decrece a s. Por las propiedades de $(X_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y por la desigualdad (1.2) tenemos que

$$X_{s_n} \leq \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{s_n}] \leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t]\big|\mathcal{F}_{s_n}\big] = \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_{s_n}],$$

aplicando nuevamente el teorema anterior vemos que

$$X_{s^+} \leq \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_{s^+}],$$

es decir $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ es una submartingala con respecto a $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$. Por último aplicando el teorema 1.5.1 vemos que $t \to X_{t^+}$ es continua por la derecha y con límite por la izquierda. ■

Teorema 1.5.4. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ es una submartingala con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ continua por la derecha y completa. Si la función $t \to \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha entonces el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene una modificación continua por la derecha y con límite por la izquierda.*

Demostración.
Supongamos que la función $t \to \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha, probemos que $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ es una modificación continua por la derecha de $(X_t)_{t\geq 0}$. Claramente este proceso es adaptado gracias a que la filtración es continua por la derecha. Sea $t \geq 0$ y definamos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales que decrece a t, por razonamientos análogos a los de la proposición anterior sabemos que $\mathbb{E}[X_{t^+}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{t_n}]$ y por hipótesis esta es igual a $\mathbb{E}[X_t]$. De la proposición anterior vemos que $X_{t^+} \geq X_t$ casi seguramente entonces $X_{t^+} = X_t$ casi seguramente. Nuevamente gracias a la proposición anterior el proceso $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ es una subamartingala continua por la derecha y con límite por la izquierda. ■
A partir de ahora vamos a considerar solamente a submartingalas continuas por la derecha, claramente para estos procesos la desigualdad de la proposición 1.5.1 se extiende a

$$(b-a)\mathbb{E}\big[D(X,\mathbb{R}^+,[a,b])\big] \leq \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[(X_t-b)^+\big],$$

ya que a I lo podemos tomar como $\mathbb{Q}^+$ y como este es un subconjunto denso de $\mathbb{R}^+$, puedo intercambiar en la desigualdad a $\mathbb{Q}^+$ por $\mathbb{R}^+$ sin alterarla. A continuación veamos algunos resultados de convergencia.

Teorema 1.5.5. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala tal que*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[X_t^+\big] < \infty.$$

Entonces $X_t \to X_\infty$ casi seguramente, cuando t se va a infinito y X_∞ es integrable.

Demostración.
Como $|X_t| = 2X_t^+ - X_t$ entonces es claro que

$$\mathbb{E}\big[|X_t|\big] = 2\mathbb{E}\big[X_t^+\big] - \mathbb{E}[X_t] \leq 2\mathbb{E}\big[X_t^+\big] - \mathbb{E}[X_0],$$

lo cual implica que $\sup\limits_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[|X_t|\big] < \infty$. Por lo tanto para toda $a < b$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[D(X, \mathbb{R}^+, [a,b])\big] &\leq \frac{1}{b-a} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[(X_t - b)^+\big] \\ &\leq \frac{1}{b-a}\Big(|b| + \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[|X_t|\big]\Big) < \infty,\end{aligned}$$

lo cual va a implicar que $D(X, \mathbb{R}^+, [a,b]) < \infty$ casi seguramente.
Como en el teorema 1.5.1. resulta que el conjunto

$$A = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \big\{\omega \in \Omega : D(X(\omega), \mathbb{R}^+, [a,b]) = \infty\big\},$$

tiene probabilidad cero, esto va a implicar que

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t\to\infty} X_t < \limsup_{t\to\infty} X_t\right) = 0,$$

ya que de lo contrario existirian dos números a y b tal que el conjunto

$$\left\{\omega \in \Omega : \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) < a < b < \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\right\},$$

tiene probabilidad positiva y por ende el conjunto A tambien. Por lo tanto $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{} X_\infty$.
Por otro lado, por el Lema de Fatou se tiene que

$$\mathbb{E}\big[|X_\infty|\big] \leq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}\big[|X_t|\big] < \infty,$$

lo cual prueba que X_∞ es integrable. ∎

Teorema 1.5.6. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala, entonces las siguientes condiciones son equivalentes,*

i) El $\lim_{t\to\infty} X_t$ existe en L_1,

ii) Existe una variable aleatoria X_∞ en L_1, tal que $X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$,

iii) La familia $(X_t)_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable.

Si estas condiciones se satisfacen entonces $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ casi seguramente.

Demostración.
Primero veamos que $ii)$ implica $iii)$. Es claro que

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[|X_t|\big] \leq \mathbb{E}\big[|X_\infty|\big] < \infty.$$

Luego, si $A = \big\{|X_t| > c\big\}$ entonces

$$\int_A |X_t| \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \big|\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]\big| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_A \mathbb{E}\big[|X_\infty|\big|\mathcal{F}_t] \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A |X_\infty| \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Por otro lado por la desigualdad de Chebyshev tenemos que

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}\big[|X_t|\big] \leq \frac{\mathbb{E}\big[|X_\infty|\big]}{c} \xrightarrow[c\to\infty]{} 0,$$

lo cual va a implicar que

$$\sup_{t\geq 0} \int_A |X_t| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \sup_{t\geq 0} \int_A |X_\infty| \mathrm{d}\mathbb{P} \xrightarrow[c\to\infty]{} 0.$$

Si $iii)$ se satisface entonces se satisface que $sups_{t\geq 0}\mathbb{E}\big[|X_t|\big] < \infty$ y por lo tanto la condición del teorema pasado, entonces X_t converge a X_∞ casi seguramente y como $(X_t)_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable entonces tambien converge en L_1. Lo cual prueba $i)$.
Por último, si $i)$ se satisface por la igualdad

$$X_t = \mathbb{E}[X_{t+h}|\mathcal{F}_t] \qquad \text{para toda } t \geq 0 \quad \text{y} \quad h > 0,$$

resulta que $X_t \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$, para toda $t \geq 0$. ■

1.6 Teorema de Paro de Doob

Teorema 1.6.1 (Teorema de Paro de Doob). *Sean τ y θ dos tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de tal manera que $\theta \leq \tau$ casi seguramente. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala continua por la derecha que satisface las condiciones i), ii) y iii) del Teorema 1.5.6 entonces*

i) X_τ y X_θ son integrables.

ii) Se cumple que

$$X_\theta = \mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\theta] = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_\theta].$$

En particular $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Demostración.
Por el teorema de paro en el caso discreto resulta que

$$X_\theta = \mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\theta] = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_\theta], \tag{1.3}$$

para cada tiempo de paro $\theta \leq \tau$, donde θ y τ toman a lo más valores numerables. Ahora definamos dos sucesiones de tiempos de paro discretos $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que decrecen a θ y τ respectivamente.
Sea $A \in \mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_{\theta_n}$, entonces

$$\int_A X_{\theta_n} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_{\tau_n} \mathrm{d}\mathbb{P} \tag{1.4}$$

para toda $n \geq 1$.
Por la continuidad por la derecha del proceso se tiene que $\lim_{n\to\infty} X_{\theta_n} = X_\theta$ y $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau$ casi seguramente. Gracias a la ecuación (1.3) tenemos que las familias $(X_{\theta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ son uniformemente integrables y por consiguiente los $\lim_{n\to\infty} X_{\theta_n} = X_\theta$ y $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau$ se satisfacen en L_1, entonces al pasar al límite en la ecuación (1.4) obtenemos

$$\int_A X_\theta \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_\tau \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Lo cual prueba el teorema. ■