Théorie de la mesure et intégration.

J.C. Pardo

Feuille de TD 2.

Exercices.

Exo 14. Montrer que tout sous-ensemble d'un ensemble au plus dénombrable es au plus dénombrable.
Exo 15. Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles dénombrables. Posons $S = \cup_{n\geq 1} E_n$. Montrer que S est dénombrable.
Exo 16. Soit A un ensemble dénombrable. Considerons l'ensemble des n-uplets $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de A_n. Montrer que A_n est dénombrable.
Exo 17. L'ensemble des nombres rationels est dénombrable.
Exo 18. Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x]$ à coefficients entier est dénombrables.
Exo 19. Un racine r d'un polynôme $\mathbb{R}[x]$ à coefficients entier s'appelle un nombre algébrique. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
Exo 20. Soit f une fonction monotone sur $]a, b[$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
Exo 21. Montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.
Exo 22. Soit A une partie d'un ensemble E, on associe l'application $\mathbb{1}_A$ de E dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

a) Soit A et B deux parties de E. Montrer que $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c} = 1$, $\mathbb{1}_{A\bigcap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A\bigcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

b) Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$, n parties de E. Calculer $\mathbb{1}_{A_1\bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n}$.

Exo 23. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille de parties de E, on définit

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m \qquad \text{et} \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m$$

a) Etudier le $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ lorsque $E = \mathbb{R}$ et $A_n =]-\infty, a_n]$, oú $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels.

b) Montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

c) Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une famille de parties de E. Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \bigcap \limsup_{n\to\infty} B_n \subset \limsup_{n\to\infty} \Big(A_n \bigcap B_n \Big).$$

Exo 24. Etudier le $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans le cas suivants:

a) Soit F et G deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}$, $A_{2p} = F$ et $A_{2p+1} = G$.

b) On pose $E = \mathbb{R}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $A_{2p} = [-1, 2 + 1/2p[$ et $A_{2p+1} =]-2 - 1/(2p+1), 1]$.

Exo 25. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, positive et $M = \sup f(x)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^n \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

Exo 26. On considére l'ensemble E des fonctions f de clase C^1 sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Montrer que la fonction $f_0 \in E$ qui minimise

$$\int_0^1 \Big(f'(t)\Big)^2 \mathrm{d}t,$$

est la fonction affine.

Exo 27. Soit α un réel strictement positif.

a) Pour quelles valeurs de α l'integral

$$I = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos(x) + \alpha^2) \mathrm{d}x,$$

est-elle définie?

b) Montrer que

$$\sum_{p=0}^{n-1} \ln(1 - 2\alpha \cos(2p\pi/n) + \alpha^2) = \ln(\alpha^n - 1)^2.$$

En deduire I.

Exo 28. Etudier la convergence

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Exo 29. Soit a un nombre complexe, on note $\mathcal{T}_a$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{C}$ qui vérifient:

$$\forall x \in A, \qquad ax \in A.$$

a) Montrer que $\mathcal{T}_a$ est une tribu si et seulement si a est une racine de l'unité (c'est-à-dire, il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ t.q. $a^n = 1$). (Indication: considérer l'ensemble $\{a^n | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$).

b) On suppose que a est une racine de l'unité et on note $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens de $\mathbb{C}$. Montrer l'existence d'un entier n tel que les applications mesurables de $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_a)$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ soient exactement les applications du type $z \to f(z^n)$ (f quelconque de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$).

Exo 30. Pour A partie de $\mathbb{R}$ on pose $m(A) = 0$ si A est dénombrable et $m(A) = +\infty$ si A n'est pas dénombrable.

a) Montrer que m est une mesure définie sur la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$.

b) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$. Décrire la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par $\mathcal{S}$. Montrer que la mesure identiquement nulle coïncide avec m sur $\mathcal{S}$ mais pas sur $\mathcal{T}$. Comparer ce résultat avec le théorème de Carathéodory.