Théorie de la mesure et intégration.

J.C. Pardo

Feuille de TD 4.

Exercices.

Exo. 52. Soient $X = \mathbb{R}$, $A_1 =]-\infty, 0[$, $A_2 = [0,1]$, $A_3 =]1, +\infty[$, $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, A_3\}$, $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ et μ la mesure sur $(X, \mathcal{T})$ telle que

$$\mu(A_1) = 1, \qquad \mu(A_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu(A_3) = +\infty.$$

Décrire les fonctions $(X, \mathcal{T}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables, puis, les fonctions intégrables. Quelle est alors leurs intégrale?

Exo. 53. Dans ce qui suit, $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, λ la mesure de Borel sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (telle que la mesure d'un intervalle soit sa longueur). Etudier si les fonctions $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}$ suivantes sont intégrables et calculer, si possible, leur intégrale $\int f \mathrm{d}\lambda$.

$$\text{a) } f = 1, \qquad \text{b) } f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \qquad \text{c) } f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \qquad \text{d) } f = +\infty \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

$$\text{e) } f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \mathbb{1}_{[n,n+1[}, \qquad \text{où } \forall n \in \mathbb{Z},\ \alpha_n \in \mathbb{R}, \qquad \text{f) } f = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha \mathbb{1}_{[n,n+1/n^2[},$$

$$\text{g) } f(x) = \mathbb{1}_{]0,1]}(x)\sin(1/x), \qquad \text{h) } f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\exp\big\{\sin(x)\big\}.$$

Exo. 54. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\sin(x)/x$. Montrer que f n'est pas intégrable en minorant $|f|$ par une fonction

$$g = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mathbb{1}_{J_n},$$

telle que pour tout n, α_n soit un réel positif, J_n un intervalle, les J_n étant deux à deux disjoints et g étant non intégrable.

Exo. 55. Même question qu'en (53) pour les fonctions:

$$\text{a) } f(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)x^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad \text{b) } f(x) = \mathbb{1}_{[2,+\infty[}(x)x^\alpha,$$

$$\text{c) } f(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)x^\alpha, \qquad \text{d) } f(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\frac{\sin(x)}{x^\alpha}.$$

Exo. 56. Que peut on dire de l'intégrabilité des fonctions $f : (X, \mathcal{T}, \mu) \to \mathbb{R}$ telles que $\mathfrak{Im}(f)$ soit une partie dénombrable de $\mathbb{R}$?

Exo. 57. (Suite de 43 et 51) Calculer $\int_\Omega f \mathrm{d}\nu$, f étant définie en 43. (c).

Exo. 58. Soit $f : (X, \mathcal{T}, \mu) \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et telle que, pour tout A dans $\mathcal{T}$ on a:

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = 0.$$

Montrer que $\mu\{x \in X | f(x) \neq 0\} = 0$.

Exo. 59. Soit $f : (X, \mathcal{T}, \mu) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable; on suppose f intégrable. Montrer qu'alors on a:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n\mu\Big\{x \in X \Big| |f(x)| \in [n, n+1[\Big\} < +\infty.$$

Réciproquement, si $\mu(x)$ est fini et si la somme précédente est finie montrer que f (supposée mesurable) est intégrable. Ce dernier résultat est-il encore vrai si $\mu(X) = +\infty$?

Exo. 60. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda) \to \mathbb{C}$ intégrable. Soit t un réel; montrer que $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda) \to \mathbb{C}$ telle que $g(x) = e^{itx} f(x)$ est intégrable. La fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\hat{f}(t) = \int e^{itx} f(x) \mathrm{d}\lambda,$$

s'appelle la transformée de Fourier de f. Calculer $\hat{f}$ si $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$, $(-\infty < a \leq b < +\infty)$. Pour un tel f, à quelle condition $\hat{f}$ est-elle à valeurs réelles?