Théorie de la mesure et intégration.

J.C. Pardo

Complement des feuilles de TD 1, 2 et 3.

Exercices.

Exo 1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$. On rappelle que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{p\geq k} x_p,$$

est bien définie comme élément de $\bar{\mathbb{R}}$. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ des suites quelconques d'éléments de $\mathbb{R}$.

a) A quelle condition l'élément $\limsup x_n + \limsup y_n$ est-il bien défini dans $\bar{\mathbb{R}}$?

b) Lorsque les conditions du (a) sont satisfaites, montrer qu'on a

$$\limsup_{n\to\infty} x_n + y_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

c) Soit α un élément de $\mathbb{R}$. Trouver des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ telles que $\limsup x_n + y_n = \alpha$ et telles que $\limsup x_n + \limsup y_n$ ne soit pas défini.

Exo 2. Soient B_1, B_2, B_3 des parties d'un ensemble $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$ la tribu de parties de $\mathcal{X}$ qu'elles engendrent. On considère les parties suivantes de $\mathcal{X}$:

$$A_1 = B_1 \cap B_2 \cap B_3, \quad A_2 = B_1^c \cap B_2 \cap B_3, \quad A_3 = B_2^c \cap B_1 \cap B_3, \quad A_4 = B_3^c \cap B_1 \cap B_2,$$

$$A_5 = B_1^c \cap B_2^c \cap B_3, \quad A_6 = B_1^c \cap B_3^c \cap B_2, \quad A_7 = B_2^c \cap B_3^c \cap B_1, \quad A_8 = B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c.$$

a) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{X}$ qui sont réunion de certains des A_i. Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. (Montrer d'qbord que B_1, B_2, B_3 sont dans $\mathcal{C}$).

b) Montrer l'équivalence des conditions suivantes: Soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dans $\mathbb{R}_+$.

   i) Il existe une mesure μ finie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ telle que pour $i = 1, 2, 3$; $\mu(B_i) = \beta_i$,

   ii) Il existe des éléments α_j, $(j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\})$ de $\mathbb{R}_+$, tels que

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_7 = \beta_1, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 = \beta_2,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = \beta_3,$$

   et $\alpha_j = 0$ pour chaque j tel que $A_j = \emptyset$.

c) On suppose que $A_5 = A_6 = A_7 = \emptyset$ et $A_1, A_2, A_3, A_4 \neq \emptyset$. Montrer que les conditions (i) et (ii) de (b) sont équivalentes à la condition:

iii) On a: $\beta_1 \leq \beta_2 + \beta_3, \quad \beta_2 \leq \beta_1 + \beta_3$ et $\beta_3 \leq \beta_1 + \beta_2$.

Exo 3. Dans cet exercice, l'intégrale considérée est l'intégrale de Riemann.

i) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle et intégrable. Soit une fonction en escalier $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f \leq \psi$. Pour tout α strictement positive, montrer que l'ensemble

$$\left\{x \in [a, b] \middle| f(x) \geq \alpha\right\},$$

est contenu dans la réunion d'un ensemble fini d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure ou égale à

$$\frac{1}{\alpha} \int_a^b \psi(x) \mathrm{d}x.$$

ii) On suppose de plus que

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Soit $n > 0$ un entier et $\epsilon > 0$ un réel. Montrer que l'ensemble

$$\left\{x \in [a, b] \middle| f(x) \geq \frac{1}{n}\right\},$$

est contenu dans la réunion d'un ensemble fini d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure ou égale à $\epsilon/2^{n+1}$.

iii) Soit $A = \{x \in [a, b] | f(x) \neq 0\}$. Montrer que A satisfait la condition suivante:

(H) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille dénombrable d'intervalles, dont la réunion contient A et dont la somme de longueurs est inférieure ou égale à ϵ.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ qui satisfait la condition **(H)** est négligeable. Si B est négligeable et $A \subset B$, montrer que A est négligeable.

iv) Montrer que, si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une famille dénombrable d'ensembles négligeables, alors, $\cup_{n \geq 0} A_n$ est négligeable.

v) Montrer qu'une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable.

vi) Montrer que $[0, 1]$ n'est pas négligeable. (Utiliser la compacité de l'intervalle [0,1]). En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

vii) La réunion d'une famille non dénombrable d'ensembles négligeables est-elle négligeable?