Théorie de la mesure et intégration.

J.C. Pardo

Feuille de TD 1.

Exercices.

Exo 1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une série de réels, semi-convergent, non absolument convergente. Montrer que le deux series, des termes positifs, et des termes négatifs sont divergentes et tendent vers l'infini.

Exo 2. Les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x^2},$$

sont-elles Riemann-intégrables au sens généralisé sur $[1, \infty[$? Même question sur $]0, 1]$?

Exo 3. La fonction $f(x) = \ln(x)$ est-elle Riemann-intégrable au sens généralisé sur l'intervalle $]0, 1]$?

Exo. 4 Soit f la fonction définie par,

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x).$$

Montrer que f a une intégrale généralisée, mais $|f|$ n'en a pas.

Exo. 5 Donner un exemple d'une fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, Riemann-intégrable au sens généralisé, mais où f^2 ne l'est pas.

Exo. 6 Montrer que la limite simple d'une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[0, 1]$ n'est pas necessairement Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Exo. 7 Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[0, 1]$ est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Exo. 8 Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions Riemann-intégrables au sens généralisé sur $[0, \infty[$ n'est pas necessairement Riemann-intégrable au sens généralisé sur $[0, \infty[$.

Exo. 9 Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties d'un ensemble non vide E, on pose

$$P := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i\geq 1} \bigcup_{k\geq i} A_k \quad \text{and} \quad Q := \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i\geq 1} \bigcap_{k\geq i} A_k.$$

Montrer que:

a)

$$\mathbb{1}_P(x) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_Q(x) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x), \quad \forall x \in E.$$

b)

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n := A \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1}_A(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x), \quad \forall x \in E.$$

c)

$$E \setminus (\limsup_{n\to\infty} A_n) = \liminf_{n\to\infty}(E \setminus A_n) \quad \text{et} \quad E \setminus (\liminf_{n\to\infty} A_n) = \limsup_{n\to\infty}(E \setminus A_n)$$

d) Lorsque $E = \mathbb{R}$, $A_n = [-1/n, 1]$ si n est impair et $A_n = [1, 1/n]$ si n est pair. Calculer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.

Exo. 10 Soit un réel $a < 1$, montrer que

$$r\int_0^{\pi/2} \exp\big\{-r\sin(t)\big\}\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \forall r \in]0, \infty[,$$

et

$$\lim_{r\to\infty} r^{a-1}\int_0^{\pi/2} \exp\big\{-r\sin(t)\big\}\mathrm{d}t = 0.$$

Exo. 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale généralisée de Riemann $\int_{]-\infty,\infty[} |f(x)|\mathrm{d}x$ converge, on pose:

$$g(y) = \int_{]-\infty,\infty[} f(x)\cos(xy)\mathrm{d}x, \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exo. 12 Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2}\mathrm{d}x = \pi\frac{\ln(a)}{2a}, \qquad \forall a > 0.$$

Exo. 13 Dans l'espace des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on note :

- $\mathcal{E}$ l'ensemble des f qui vérifient que $\{x \in [0, 1] | f(x) = 0\}$ est fini.
- $\mathcal{F}$ l'ensemble des f qui vérifient $(\forall\epsilon > 0)$ que $\{x \in [0, 1] || f(x)| > \epsilon\}$ est fini.
- $\mathcal{G}$ l'ensemble des f qui vérifient $(\forall a \in [0, 1])$ que $f(x) \to 0$ lorsque x tend vers a en restant différent de a.

a) Montrer que les éléments de $\mathcal{F}$ sont les limites uniformes des suites d'éléments de $\mathcal{E}$.

b) Montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

c) Montrer que les éléments de $\mathcal{G}$ sont Riemann-intégrables et préciser la valeur de leur intégrale.

d) On considère sur $[0, 1]$ les fonctions suivantes:

   - f fonction indicatrice de l'ensemble des $1/n$ pour n entier strictement positif.
   - g fonction indicatrice de l'ensemble des rationnels de $[0, 1]$.

- h définie par: si $x \in \mathbb{Q}$, $h(x) = 1/q$ oú q est le denominateur de la fraction irréductible représentant: x et si $x \notin \mathbb{Q}$, $h(x) = 0$.

Dire si elles appartient à $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ oú $\mathcal{G}$ et si elles sont Riemann-intégrable.

e) En utilisant les exemples précédents, donner un exemple d'une suite croissante de fonctions Riemann-intégrables sur $[0, 1]$ dont la limite simple est bornée mais n'est pas Riemann-intégrable.