Clase No. 18:

Integración numérica: Regla del trapecio Método de Romberg

MAT–251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.
e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.
e-mail: joaquin@cimat.mx

Integración numérica

Dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, queremos calcular la integral definida de f en $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Integración numérica

Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, queremos calcular la integral definida de f en $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Por el teorema fundamental del cálculo, si F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Integración numérica

Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, queremos calcular la integral definida de f en $[a,b]$:

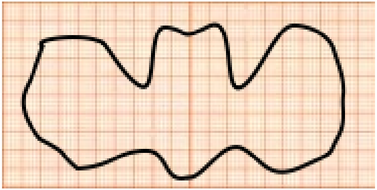
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Por el teorema fundamental del cálculo, si F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

- No siempre se conoce una primitiva de f.
- De hecho, puede ser que la primitiva F no puede expresarse mediante funciones elementales.
- La alternativa es realizar una estimación del valor de la integral.
- La integración numérica es conocida como *cuadratura*, que es el nombre del método empírico en que se trazaban cuadrados bajo la curva en cuestión para estimar el área.

Integración numérica



- En la práctica, sólo se usan algunos valores de la función f en puntos del intervalo $[a, b]$ para realizar la estimación de la integral.
- La evaluación de la expresión de $F(x)$ puede ser menos estable numéricamente que aplicar una regla de cuadratura de $f(x)$.
- Aún cuando $F(x)$ tenga una expresión algebraica estable conocida, puede ser costosa evaluarla numéricamente.

Se puede decir que cambiamos el problema de integrar f por otro en el que hay que calcular la integral de $f + \Delta f$, que es más fácil de integral, eligiendo Δf de modo que su integral no sea muy grande.

Aproximación por sumas de Riemann (I)

Hacemos una partición P del intervalo

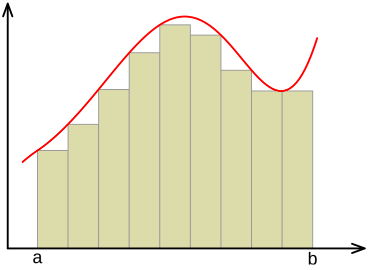
$$P_n: \; a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

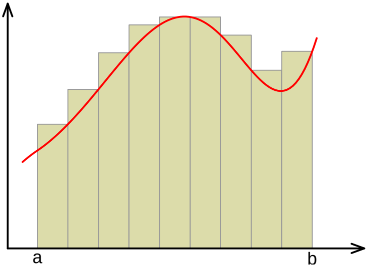
Definimos

$$m_i = \min\{ f(x) \; : \; x_i \leq x \leq x_{i+1} \}$$

$$M_i = \max\{ f(x) \; : \; x_i \leq x \leq x_{i+1} \}$$

$$L(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i), \qquad U(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$





Aproximación por sumas de Riemann (II)

Se tiene que

- $L(f, P_n) \leq U(f, P_n)$.
- Si n aumenta, $L(f, P_n)$ debe aumentar, mientras que $U(f, P_n)$ debería decrecer.

Tenemos que

$$L(f, P_n) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq U(f, P_n).$$

Para simplicar, podemos usar una partición uniforme de modo que $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.
Podemos aproximar el valor de la integral como

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2}[L(f, P_n) + U(f, P_n)]$$

El error más grande que se comete con esta aproximación es

$$\frac{1}{2}[U(f, P_n) - L(f, P_n)]$$

Aproximación por sumas de Riemann (III)

El problema de usar este enfoque es que necesitamos calcular el máximo y el mínimo de la función en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, lo cual no es práctico.

Ejemplo: Al calcular la integral de $\sin x$ de 0 a $\pi/2$ se obtienen los siguientes resultados:

n	$L(f, P_n)$	$U(f, P_n)$	$\frac{1}{2}[L(f, P_n) + U(f, P_n)]$
100	0.99212546	1.00783342	0.99997944
1000	0.99921440	1.00078520	0.99999980
10000	0.99992146	1.00007854	1.00000000

Así, necesitamos otro tipo de aproximaciones de la integral:

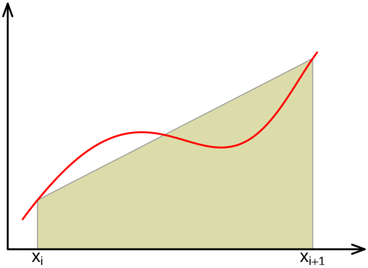
- que no requieran hacer cálculos complicados sobre la función f,
- que dependan de evaluar la función f en algunos puntos, y
- que ese número de puntos no sea demasiado grande.

Regla del trapecio (I)

La regla del trapecio aproxima la integral

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

por el área del trapecio:



$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i)$$

Regla del trapecio (II)

Si tenemos la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \qquad x_i = a + \frac{b-a}{n} i \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Si definimos $h = \frac{b-a}{n}$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Lo podemos reescribir como

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

Ejemplo
Aproximación de $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

n	$L(f, P_n)$	$U(f, P_n)$	Trapecio
100	0.99212546	1.00783342	0.9999794382
1000	0.99921440	1.00078520	0.9999997944
10000	0.99992146	1.00007854	0.9999999979

Regla del trapecio (III)

Para estimar el error que se comete con la regla del trapecio, sea $p_i(x)$ el polinomio de grado a lo más 1 que interpola los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Entonces

$$T_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(x)\,dx = \frac{h}{2}[p_i(x_{i+1}) - p_i(x_i)] = \frac{h}{2}[f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

De lo visto en la parte de interpolación, el error entre $p_i(x)$ y $f(x)$ para $x \in [x_i, x_{i+1}]$ es

$$f(x) - p_i(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x - x_i)(x - x_{i+1}),$$

para algún $\xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$I_i - T_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - p_i(x)]\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(\xi_x)(x - x_i)(x - x_{i+1})\,dx$$

Regla del trapecio (IV)

En cálculo, tenemos el siguiente resultado: Si $\alpha(x)$ es continua en $[a,b]$ y $\beta(x)$ es integrable en $[a,b]$ y no cambia de signo, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x)\,dx = \alpha(c)\int_a^b \beta(x)\,dx$$

En nuestro caso, $(x-x_i)(x-x_{i+1})$ es no positiva $[x_i, x_{i+1}]$ en y podemos suponer que f'' es continua. Entonces

$$I_i - T_i = f''(\xi_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

para algún $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.
Así, en todo el intervalo $[a,b]$, el error es

$$\sum_{i=0}^{n-1}(I_i - T_i) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)h^2}{12}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)\right].$$

Regla del trapecio (V)

El promedio de las segundas derivadas es un valor que está dentro del intervalo del valor mínimo y máximo de f'' en $[a,b]$. Como supusimos que f'' es continua, debe existir un valor $\xi \in [a,b]$ tal que

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i).$$

Así, el error cometido por la regla del trapecio es

$$-\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$$

De este modo, si la discretización se hace más fina, el error de la aproximación se reduce.

Para una discretización dada, podemos esperar que el error no sea muy grande si el rango de valores de f'' también es pequeño.

Ejemplo: Dar un valor para h, tal que el error cometido al estimar $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ con la regla de trapecio se menor que 10^{-6}.

Regla recursiva del trapecio (I)

Para una partición en el que el número de subintervalos es 2^n, entonces $h = (b-a)/2^n$ y podemos escribir la regla del trapecio de la siguiente forma:

$$R(n,0) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] & n=0 \\ \dfrac{h}{2}[f(a)+f(b)] + h\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} f(a+kh) & n>0 \end{cases}$$

Podemos dar una fórmula recursiva del método de trapecio:

$$R(n,0) = \frac{1}{2}R(n-1,0) + h\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a+(2k-1)h) \qquad n>0$$

Para ver esto, partimos de la identidad

$$R(n,0) = \frac{1}{2}R(n-1,0) + \left[R(n,0) - \frac{1}{2}R(n-1,0)\right]$$

y entonces calculamos la expresión que está entre corchetes.

Regla recursiva del trapecio (II)

Definimos $C = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$. Entonces

$$R(n,0) = h \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a+ih) + C$$

$$R(n-1,0) = 2h \sum_{j=1}^{2^{n-1}-1} f(a+2jh) + 2C$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(n,0) - \frac{1}{2}R(n-1,0) &= h\sum_{i=1}^{2^n-1} f(a+ih) - h\sum_{j=1}^{2^{n-1}-1} f(a+2jh) \\ &= h\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a+(2k-1)h) \end{aligned}$$

La ventaja es que no tenemos que reevaluar el integrando en los puntos en donde ya lo hemos evaluado.

Extrapolación de Richardson (I)

Consideramos una función escalar $A(h)$ para la cual se cumple que existen constantes a_0, a_1 independientes de h, $a_1 \neq 0$, y dos números positivos p, p', con $p' > p$, tales que

$$A(h) = a_0 + a_1 h^p + O(h^{p'}), \qquad h \to 0.$$

Dado $0 < q < 1$, entonces

$$A(q^{-1}h) \quad = \quad a_0 + a_1 q^{-p} h^p + O(h^{p'})$$

Multiplicando la primer ecuación por q^{-p} y restándole la segunda, se obtiene

$$q^{-p}A(h) - A(q^{-1}h) = (q^{-p} - 1)a_0 + O(h^{p'})$$

$$a_0 = \frac{q^{-p}A(h) - A(q^{-1}h)}{q^{-p} - 1} + O(h^{p'}) = \frac{q^{-p}A(h) - A(h) + A(h) - A(q^{-1}h)}{q^{-p} - 1} + O(h^{p'})$$

$$a_0 = A(h) + \frac{A(h) - A(q^{-1}h)}{q^{-p} - 1} + O(h^{p'}) \qquad h \to 0.$$

Extrapolación de Richardson (II)

Así, si tenemos dos aproximaciones de $A(0)$, $A(h)$ y $A(q^{-1}h)$, que tienen el mismo error $O(h^p$, podemos obtener una mejor aproximación:

$$A_{ER} = A(h) + \frac{A(h) - A(q^{-1}h)}{q^{-p} - 1}$$

con un error menor de orden $O(h^{p'})$, que es llamado *extrapolación de Richardson*.

Esto ayuda a mejorar la aceleración en que converge una sucesión $A(h_n)$ en la que $h_n \to 0$, y $A(0)$ es el valor que queremos obtener.

Método de Romberg (I)

Este método produce un arreglo triangular de la forma

$$
\begin{array}{cccccc}
R(0,0) & & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & & \\
R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R(n,0) & R(n,1) & R(n,2) & R(n,3) & \cdots & R(n,n)
\end{array}
$$

- La primera columna está dada por la aproximaciones de la integral dada por la regla recursiva de trapecio.
- El resto de las columnas se obtienen por la fórmula de extrapolación de Richardson

Método de Romberg (II)

Supongamos que tenemos

$$\begin{aligned}
R(0,0) &= \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\
R(1,0) &= \frac{b-a}{4}\left[f(a)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]
\end{aligned}$$

Si $I(f)$ es el valor exacto de la integral, entonces

$$\begin{aligned}
R(0,0) &= I(f)+a_1h^2+O(h^4) \\
R(1,0) &= I(f)+a_1(h/2)^2+O(h^4)
\end{aligned}$$

Mediante extrapolación de Richardson, con $q=\frac{1}{2}$ y $p=2$,

$$R(1,1)=R(1,0)+\frac{R(1,0)-R(0,0)}{3}.$$

Método de Romberg (III)

Entonces $I(f) = R(1,1) + O(h^4)$. Supongamos que tenemos calculado $R(2,0)$. Entonces podemos usar $R(1,0)$ y $R(2,0)$ para calcular $R(2,1)$. Así

$$\begin{aligned} R(1,1) &= I(f) + a_2 h^4 + O(h^6) \\ R(2,1) &= I(f) + a_2 (h/2)^4 + O(h^6) \end{aligned}$$

Aplicando el método de extrapolación, podemos obtener la aproximación $R(2,2)$.

De manera general, calculamos

$$R(n,m) = R(n,m-1) + \frac{1}{4^m - 1}[R(n,m-1) - R(n-1,m-1)]$$

con $n \geq 1,\ m \geq 1$.

Método de Romberg (IV)

Ejemplo: Estimar $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$ con el método de Romberg:

$$
\begin{array}{llll}
R(0,0) = 0.78540 & & & \\
R(1,0) = 0.94806 & R(1,1) = 1.002280 & & \\
R(2,0) = 0.98712 & R(2,1) = 1.000135 & R(2,2) = 0.999992 & \\
R(3,0) = 0.99679 & R(3,1) = 1.000008 & R(3,2) = 0.999999 & R(3,3) = 1.000000008
\end{array}
$$