

Clase No. 7:

Matrices definidas positivas

Matrices simétricas

MAT-251

Dr. Alonso Ramírez Manzanares

Depto. de Matemáticas

Univ. de Guanajuato

e-mail: alram@ciamat.mx

web: http://www.cimat.mx/~alram/met_num/

Dr. Joaquín Peña Acevedo

CIMAT A.C.

e-mail: joaquin@ciamat.mx

Matrices diagonalmente dominantes

Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se dice que $\mathbf{A}$ es diagonalmente dominante si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Además, se dice que es estrictamente diagonal dominante, si la desigualdad se cumple de manera estricta.

Matrices tridiagonales (I)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix},$$

Si definimos

$$\bar{a}_1 = 0, \quad \bar{b}_1 = b_1, \quad \bar{c}_1 = c_1, \quad \bar{d}_1 = d_1,$$

$$\bar{b}_n = \bar{b}_{n-1}b_n - a_n\bar{c}_{n-1}, \quad \bar{d}_n = \bar{b}_{n-1}d_n - a_n\bar{d}_{n-1}.$$

entonces

Matrices tridiagonales (II)

$$x_n = \frac{\bar{d}_n}{\bar{b}_n}$$

$$x_i = \frac{\bar{d}_i - \bar{c}_i x_{i+1}}{\bar{b}_i} \quad i = n-1, \dots, 1$$

$$\bar{b}_i = \bar{b}_{i-1} b_i - a_i \bar{c}_{i-1}$$

$$\bar{c}_i = \bar{b}_{i-1} c_i$$

$$\bar{d}_i = \bar{b}_{i-1} d_i - a_i \bar{d}_{i-1}$$

La hipótesis de que podemos dividir entre $\bar{b}_i$ es esencial.

Una condición suficiente es que la matriz sea estrictamente diagonal dominante, es decir,

Matrices tridiagonales (III)

$$|b_1| > |c_1|, \quad |b_n| > |a_n|, \quad |b_i| > |a_i| + |c_i| \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Esto garantiza que $\bar{b}_i \neq 0$:

Tenemos que $|\bar{b}_1| = |b_1| > |c_1| \geq 0$. Supongamos que

$$|\bar{b}_i| > |\bar{c}_i| \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, k < n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\bar{b}_{k+1}| &= |\bar{b}_k b_{k+1} - a_{k+1} \bar{c}_k| \geq |\bar{b}_k| |b_{k+1}| - |a_{k+1}| |\bar{c}_k| \\ &> |\bar{b}_k| (|a_{k+1}| + |c_{k+1}|) - |a_{k+1}| |\bar{c}_k| = |a_{k+1}| (|\bar{b}_k| - |\bar{c}_k|) + |\bar{b}_k| |c_{k+1}| \\ &= |a_{k+1}| (|\bar{b}_k| - |\bar{c}_k|) + |\bar{c}_{k+1}| \geq 0 \end{aligned}$$

Matrices simétricas definidas positivas (I)

Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La matriz $\mathbf{A}$ es simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.

La matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva si para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se tiene que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0.$$

Notación: con $\mathbf{A} > 0$ indicamos que la matriz es definida positiva.

Usamos *s.d.p.* para indicar que una matriz es simétrica y definida positiva.

Decimos que $\mathbf{H}$ es una submatriz principal de $\mathbf{A}$ si es una submatriz cuadrada formada con las entradas alrededor de la diagonal principal:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}(j : k, j : k)$$

Matrices simétricas definidas positivas (II)

Proposición

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- 1 Sea $\mathbf{X}$ no singular. $\mathbf{A}$ es s.d.p. si y sólo si $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ es s.d.p.
- 2 Si $\mathbf{A}$ es s.d.p. y $\mathbf{H}$ es cualquier submatriz principal de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{H}$ es s.d.p.
- 3 $\mathbf{A}$ es s.d.p. si y sólo si $\mathbf{A}$ es simétrica y todos sus eigenvalores son positivos.
- 4 Si $\mathbf{A}$ es s.d.p., entonces $a_{ii} > 0$ y $\max_{ij} |a_{ij}| = \max_i a_{ii} > 0$.
- 5 $\mathbf{A}$ es s.d.p. si y sólo si existe una única matriz triangular inferior no singular $\mathbf{L}$, con entradas positivas en la diagonal, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$.

Matrices simétricas definidas positivas (III)

Para demostrar (1), considerar el vector $\mathbf{X}\mathbf{x}$.

Para demostrar (2), empezar con $\mathbf{H} = A(1:k, 1:k)$.

Para demostrar (4), para la primera parte, tomar un vector canónico $\mathbf{e}_i$ y calcular $\mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i$. Para la segunda parte. Suponer que $|a_{ki}| = \max_{ij} |a_{ij}|$ con $k \neq l$ y construir el vector $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k - \text{sgn}(a_{kl})\mathbf{e}_l$.

Factorización $\mathbf{LDL}^T$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz no singular y simétrica.

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, entonces,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{LU})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

Factorización $\mathbf{LDL}^T$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz no singular y simétrica.

Si $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, entonces,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{LU})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T$$

Como $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son no singulares, tenemos

$$\mathbf{U}(\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}$$

Factorización **LDL^T**

Sea **A** una matriz no singular y simétrica.

Si **$A = LU$** , entonces,

$$LU = A = A^T = (LU)^T = U^T L^T$$

Como **L** y **U** son no singulares, tenemos

$$U(L^T)^{-1} = L^{-1}U$$

Como la matriz del miembro izquierdo es triangular superior y la del miembro derecho es triangular inferior, se debe tener que la matriz es diagonal. Digamos que **$U(L^T)^{-1} = D$** , y

$$A = LU = LDL^T.$$

Algoritmo para la factorización $\mathbf{LDL}^T$ (I)

Sea $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ y $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Entonces

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} d_k l_{jk}.$$

Supongamos que $j \leq i$, entonces

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^j l_{ik} d_k l_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} + l_{ij} d_j l_{jj} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} + l_{ij} d_j. \end{aligned}$$

En particular, para $j = i$.

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_k + d_i$$

Algoritmo para la factorización $\mathbf{LDL}^T$ (II)

Esto es,

$$d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_k$$

En particular, $d_1 = a_{11}$.

Ahora, puesto que $1 \leq j < i \leq n$,

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} + l_{ij} d_j.$$

podemos obtener l_{ij} :

$$l_{ij} = \frac{1}{d_j} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \right]$$

Para $j = 1$, tenemos

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{d_1} \quad i = 2, \dots, n.$$

Algoritmo para la factorización $\mathbf{LDL}^T$ (III)

Algoritmo $\mathbf{LDL}^T$

Dada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ simétrica, calcular:

- 1: **for** $j = 1, \dots, n$ **do**
- 2: $l_{jj} = 1$;
- 3: $d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_k$;
- 4: **for** $i = j + 1, \dots, n$ **do**
- 5: $l_{ji} = 0$
- 6: $l_{ij} = \frac{1}{d_j} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \right]$
- 7: **end for**
- 8: **end for**

Ejemplo de factorización $\mathbf{LDL}^T$ (I)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene la siguiente factorización LU :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Determinar la factorización $\mathbf{LDL}^T$.

Factorización de Cholesky

La factorización de Cholesky es una consecuencia inmediata de lo anterior, cuando la matriz $\mathbf{A}$ además de ser simétrica es definida positiva.

Proposición

Si $\mathbf{A}$ es una matriz real, simétrica y definida positiva, entonces tiene una única factorización $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, en la cual $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal principal.

De lo anterior, tenemos que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$.

Podemos mostrar que $\mathbf{D}$ es definida positiva.

Factorización de Cholesky

La factorización de Cholesky es una consecuencia inmediata de lo anterior, cuando la matriz $\mathbf{A}$ además de ser simétrica es definida positiva.

Proposición

Si $\mathbf{A}$ es una matriz real, simétrica y definida positiva, entonces tiene una única factorización $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, en la cual $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal principal.

De lo anterior, tenemos que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$.

Podemos mostrar que $\mathbf{D}$ es definida positiva.

Por tanto, las entradas en la diagonal de $\mathbf{D}$ son positivas, y podemos definir

$$\mathbf{D}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}).$$

Entonces $\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2} = \mathbf{D}$ y

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T = \mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{L}^T = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^T \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{1/2}.$$

Algoritmo de la factorización de Cholesky

Algoritmo $\mathbf{LL}^T$

Dada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ simétrica, calcular:

```
1: for  $j = 1, \dots, n$  do  
2:    $l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2};$   
3:   for  $i = j + 1, \dots, n$  do  
4:      $l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left[ a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right]$   
5:   end for  
6: end for
```

Puesto que $l_{jj} > 0$, entonces

$$a_{jj} > \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 \geq l_{jk}^2 \quad k \leq j$$

Esto es, $|l_{jk}| \leq \sqrt{a_{jj}}$. Por tanto, todo elemento de $\mathbf{L}$ está acotado por la raíz cuadrada del elemento correspondiente en la diagonal de $\mathbf{A}$.

Proposición

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- ① $\mathbf{A}$ es s.d.p.
- ② El proceso de eliminación Gaussiana se puede realizar sin intercambiar las filas del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- ③ $\mathbf{A}$ se puede factorizar como $\mathbf{LL}^T$, donde $\mathbf{L}$ es triangular inferior con entradas positivas en la diagonal.
- ④ $\mathbf{A}$ se puede factorizar como $\mathbf{LDL}^T$, donde $\mathbf{L}$ es triangular inferior con 1's en la diagonal y $\mathbf{D} > 0$ diagonal.