Capítulo 3

Sucesiones

3.1. Definiciones Generales.

El tema de este capítulo es el estudio de las sucesiones de números reales. Una sucesión no es más que un conjunto ordenado de números. Por ejemplo,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12, \dots, 2n, \dots$$

es la sucesión de los números pares positivos. El primer elemento de esta sucesión es 2, el segundo es 4, el quinto es 10 y el elemento que ocupa el lugar n es $2n$. Vemos en este ejemplo que lo que hemos hecho es asociar a cada número natural $1,\ 2,\ 3, \dots$ un número par $2,\ 4,\ 6, \dots$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & 2n & \cdots
\end{array}$$

Por lo tanto, una sucesión no es más que una función definida sobre los números naturales. Dependiendo del espacio en el cual tome valores esta función tendremos sucesiones de distintos tipos: de números reales, de números complejos, de vectores en $\mathbb{R}^n$, de funciones, etc. La definición formal es la siguiente:

Definición 3.1 Si X es un conjunto, una *sucesión* en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Si $f(n) = x_n$, decimos que x_n es el *n-ésimo término de la sucesión.*

Usualmente escribiremos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o $\{x_n, n \geq 1\}$ para denotar esta sucesión y en algunos casos simplemente (x_n). En general tomaremos $X = \mathbb{R}$ pero muchos de los resultados que veremos a continuación son válidos en otros conjuntos. En ocasiones consideraremos sucesiones que comienzan con el índice cero en lugar de comenzar con el uno: $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ o $\{x_n, n \geq 0\}$. También es posible considerar sucesiones doblemente infinitas $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ o sucesiones que comienzan en el índice $p : \{x_n, n \geq p\} = \{x_{n+p}, n \geq 0\}$.

Definición 3.2 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) y $x \in X$. Decimos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* x, si para todo real positivo ϵ existe un entero positivo $N = N(\epsilon)$ tal que $x_n \in B(x; \epsilon)$, siempre que $n \geq N$.

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x escribimos $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, decimos que x es el *límite* de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y que la sucesión es *convergente*. Una sucesión que no es convergente, es *divergente*.

En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, la definición de convergencia puede reformularse de la siguiente manera: si $x \in \mathbb{R}$, $B(x, \epsilon) = \{y : |y - x| < \epsilon\}$ de modo que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, si dado $\epsilon > 0$ existe un entero positivo $N = N(\epsilon)$ tal que

$$|x - x_n| < \epsilon \text{ siempre que } n \geq N.$$

Ejemplos 3.1

1. $x_n = \frac{1}{n}$. Esta sucesión converge a 0 en $\mathbb{R}$: dado $\epsilon > 0$ escogemos $N = N(\epsilon)$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$ (esto es posible por la propiedad Arquimedeana de $\mathbb{N}$). Entonces tenemos que para todo $n \geq N$,

   $$|x_n - x| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

   Sin embargo, si consideramos esta sucesión en el conjunto de los reales positivos $(0, +\infty)$ la sucesión no es convergente, ya que el límite no pertenece al conjunto donde hemos definido la sucesión.

   Gráficamente (ver figura 3.1), la convergencia equivale a que, para cualquier $\varepsilon > 0$, a partir de un cierto índice N, todos los miembros de la sucesión caigan dentro de una banda de ancho 2ε centrada en el valor del límite, que es cero en este caso.

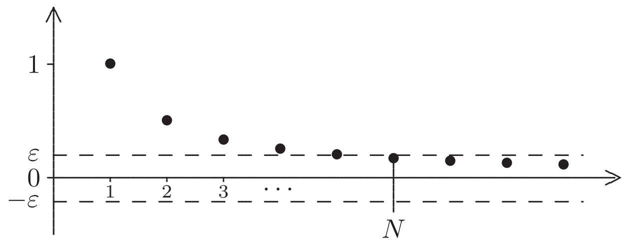

Figura 3.1: La sucesión $1/n$.

2. $x_n = n$ en $\mathbb{R}$. Esta sucesión es divergente ya que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier $\epsilon > 0$ fijo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > x + \epsilon$ y la condición de la definición no se satisface.

3. Consideremos la sucesión $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Hemos visto en el primer ejemplo que la sucesión $(\frac{1}{n})$ converge a 0 y por lo tanto nuestra idea intuitiva es que la sucesión $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ debe converger a $1+0=1$. Veamos a partir de la definición que esto es efectivamente cierto. Sea $\epsilon > 0$, queremos ver que existe $N = N(\epsilon)$ tal que si $n \geq N, |x_n - 1| < \epsilon$.
$$|x_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$
Al igual que en el ejemplo 1, basta escoger N de modo que $\frac{1}{N} < \epsilon$ para tener
$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon,$$
siempre que $n \geq N$.

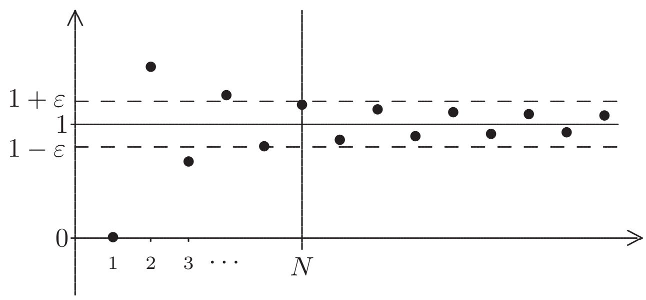

Figura 3.2: La sucesión $1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

La noción de convergencia de una sucesión es una de las ideas primordiales del Análisis Matemático y será fundamental para lo que estudiaremos en este texto. Es importante que sea comprendida a cabalidad por el estudiante.

El próximo teorema nos muestra que una sucesión no puede tener más de un límite.

Teorema 3.1 *Si (x_n) es una sucesión en (X, d) y converge tanto a x como a y, entonces $x = y$.*

Demostración. Supongamos $x \neq y$, entonces $d(x, y) = \eta > 0$ (ver figura 3.3) y existen enteros positivos N_1 y N_2 tales que
$$n > N_1 \Rightarrow d(x_n, x) < \eta/2,$$
$$n > N_2 \Rightarrow d(x_n, y) < \eta/2.$$
Tomemos $N = \text{máx}(N_1, N_2)$, entonces si $n > N$ tenemos, usando la propiedad triangular, que
$$\eta = d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \eta,$$
una contradicción.

■

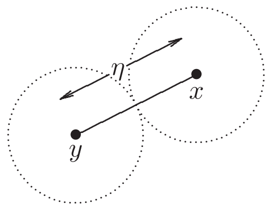

Figura 3.3:

Definición 3.3 Una función $f : Y \to X$ es *acotada* si el recorrido $f(Y) = \{x \in X :\ \text{existe } y \in Y \text{ tal que } f(y) = x\}$ es un conjunto acotado, es decir, si para algún $x \in X$ y $\Delta \in \mathbb{R}^+$, $f(Y) \subset B(x;\Delta)$. En particular para una función real ($X = \mathbb{R}$) podemos tomar $x = 0$ y entonces f es acotada sí y sólo sí existe $\Delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(y)| < \Delta$ para todo $y \in Y$. Si $Y = \mathbb{N}$ la función es una sucesión y es acotada si existe $\Delta > 0$ tal que $|x_n| < \Delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en (X,d) y sea x su límite. Existe un entero positivo N tal que $d(x,x_n) < 1$, si $n > N$. Definimos

$$\Delta = \text{máx}\{1,\ 2d(x,x_1),\ 2d(x,x_2),\ldots,\ 2d(x,x_N)\}$$

entonces $\{x_n, n \geq 1\} \subset B(x;\Delta)$ de modo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

■

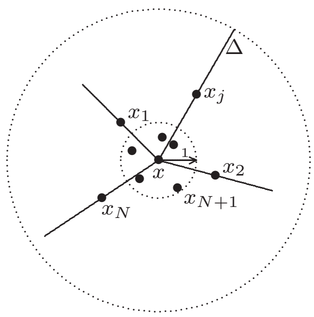

Figura 3.4: Toda sucesión convergente es acotada.

Teorema 3.3 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X,d),*

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a $x \in X$ sí y sólo sí toda vecindad de x contiene todos los términos de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ excepto un número finito de ellos.*

(ii) Si $E \subset X$ y x es un punto de acumulación de E, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E para la cual $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Demostración.

(i) Sea V una vecindad de x, entonces existe $r \in \mathbb{R},\ r > 0$, tal que $B(x; r) \subset V$. Para este r existe $N = N(r)$ tal que si $n \geq N,\ d(x, x_n) < r$; es decir, que para todo $n \geq N, x_n \in B(x; r)$.

Supongamos ahora que toda vecindad de x contiene a todos los elementos de la sucesión, excepto por un número finito de ellos. Dado $\epsilon > 0$, consideremos como vecindad a $B(x; \epsilon)$. Entonces existe $N = N(\epsilon)$ tal que si $n \geq N, x_n \in B(x; \epsilon)$, es decir $d(x, x_n) < \epsilon$ y por lo tanto la sucesión converge a x.

(ii) Como x es punto de acumulación de E, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $d(x_n, x) < 1/n$. Veamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x: dado $\epsilon > 0$ tomamos N de modo que $N\epsilon > 1$. Entonces, si $n \geq N,\ d(x_n, x) < 1/n \leq 1/N < \epsilon$.

■

Ejercicios 3.1

1. *Establezca la convergencia o divergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ con la métrica usual:*

$$x_n = \frac{n}{n+1}; \quad x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}; \quad x_n = \frac{2n}{3n^2+1}; \quad x_n = \frac{2n^2+3}{3n^2+1}; \quad x_n = 2n^2 - n.$$

2. *(a) De un valor de N tal que si $n > N, n^2 - 4n > 10^6$. (b) De un valor de N tal que si $n > N$ entonces $|x_n - x| < 10^{-100}$, donde $x_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ y x es el límite de esta sucesión.*

3. *Muestre que $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (x, y) en $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual:*

   (i) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 1)$ *con* $(x, y) = (0, 1)$;

   (ii) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ *con* $(x, y) = (0, 1)$

   (iii) $(x_n, y_n) = (2 + \frac{1}{n^2}, 1 + \frac{(-1)^n}{n})$ *con* $(x, y) = (2, 1)$

4. *Sea (X, d) un espacio métrico discreto. Muestre que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sí y sólo sí es constante a partir de algún índice n_0.*

5. *Muestre que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ cuando $n \to \infty$ sí y sólo sí $x_n \to x$ e $y_n \to y$ en $\mathbb{R}$.*

6. *La sucesión $(x_n)n \in \mathbb{N}$ converge a x en (X, d) sí y sólo sí la sucesión $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $\mathbb{R}$.*

7. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en (X, d) tales que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ es finito, entonces o bien ambas sucesiones convergen al mismo límite o bien ambas divergen.*

8. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en (X, d), $p \in \mathbb{N}$, e $y_n = x_{n+p}$ entonces o bien ambas sucesiones convergen al mismo límite o bien ambas divergen.*

9. *Si (x_{2n}) y (x_{2n+1}) convergen al mismo límite x entonces (x_n) converge a x.*

10. *Sean d_1 y d_2 dos métricas equivalentes en el espacio X y sea (x_n) una sucesión en X. Demuestre que x_n converge a $x \in X$ en la métrica d_1 sí y sólo sí converge al mismo punto en la métrica d_2.*

3.2. Sucesiones de Números Reales

Consideraremos ahora el caso particular $X = \mathbb{R}$ con la distancia usual d de los números reales: si $x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|.$$

En $\mathbb{R}$ tenemos una relación de orden y una serie de operaciones que hemos estudiado en capítulos anteriores. El primer teorema de esta sección nos indica como se relacionan los límites con las operaciones de los números reales.

Teorema 3.4 *Supongamos que (x_n) y (y_n) son sucesiones de números reales y $x_n \to x, y_n \to y$. Entonces*

i) $\lim(x_n + y_n) = x + y$.

ii) Para $c \in \mathbb{R},\ \lim(cx_n) = cx$.

iii) $\lim(x_n y_n) = xy$.

iv) $\lim(x_n/y_n) = x/y$ *si* $y \neq 0,\ y_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

i) Dado $\epsilon > 0$, existen N_1 y N_2 en $\mathbb{N}$ tales que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $N = \max(N_1, N_2)$ tenemos

$$n \geq N \Rightarrow |(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon$$

lo que muestra i).

ii) Dado $\epsilon > 0$ escogemos $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{(1 + |c|)},$$

entonces

$$n \geq N \Rightarrow |cx_n - cx| = |c||x_n - x| < \frac{|c|\epsilon}{1 + |c|} < \epsilon.$$

iii) Tenemos

$$\begin{aligned} x_n y_n &= x_n y_n - x y_n - x_n y + xy + x y_n + x_n y - xy \\ &= (x - x_n)(y - y_n) + x y_n + x_n y - xy. \end{aligned}$$

Usando i) y ii) vemos que

$$\begin{aligned}\lim x_n y_n &= \lim(x - x_n)(y - y_n) + x \lim y_n + y \lim x_n - xy \\ &= \lim(x - x_n)(y - y_n) + xy.\end{aligned}$$

Por lo tanto basta ver que $\lim(x - x_n)(y - y_n) = 0$. Dado $\epsilon > 0$ existen N_1 y N_2 en $\mathbb{N}$ tales que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \sqrt{\epsilon}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - w| < \sqrt{\epsilon}$$

y si $n \geq \text{máx}(N_1, N_2)$ entonces

$$|(x_n - x)(y_n - y)| = |x_n - x||y_n - y| < \epsilon.$$

iv) Por iii) basta ver que $\lim(1/y_n) = 1/y$ si $y \neq 0$, $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ fijo. Como $y \neq 0$ y está fijo, escogemos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $|y - y_n| < |y|/2$. Entonces, si $n \geq N_0$ la desigualdad $|y| \leq |y_n| + |y_n - y|$ implica

$$|y_n| \geq |y| - |y - y_n| > |y|/2.$$

Ahora escogemos $N_1 \geq N_0$ en $\mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$

$$|y - y_n| < |y|^2 \epsilon/2.$$

Usando ambas desigualdades tenemos

$$n \geq N_1 \Rightarrow |\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}| = \frac{|y - y_n|}{|y_n||y|} < \frac{2|y - y_n|}{|y|^2} < \epsilon.$$

■

3.2.1. Límites infinitos

Definición 3.4 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$, decimos que esta sucesión tiene *límite infinito* o *tiende a infinito*, si dado cualquier $a \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n > a$. Escribimos $x_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

De manera similar decimos que la sucesión *tiene límite menos infinito* o *tiende a menos infinito* si dado cualquier $a \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n < a$. Escribimos $x_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Ejemplos 3.2

1. $x_n = n^2$. Esta sucesión tiende a infinito: como los términos de la sucesión son positivos basta considerar $a > 0$ en la definición. En este caso basta tomar $N \geq \sqrt{a}$ para obtener que

$$n \geq N \Rightarrow x_n > a.$$

2. $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)^{1/2} - (2n-1)^{1/2}}$. Veamos que esta sucesión también tiende a infinito.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{(2n+1)^{1/2} - (2n-1)^{1/2}} \\ &= \frac{(2n+1)^{1/2} + (2n-1)^{1/2}}{(2n+1) - (2n-1)} \\ &= \frac{1}{2}((2n+1)^{1/2} + (2n-1)^{1/2}) \\ &\geq \frac{1}{2}(2(2n-1)^{1/2}) \\ &= (2n-1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dado $a > 0$ basta tomar $N > \frac{a^2+1}{2}$ para obtener que

$$n > N \Rightarrow \frac{1}{(2n+1)^{1/2} - (2n-1)^{1/2}} > a.$$

Resaltamos la diferencia entre $x_n \to x$ y $x_n \to \infty$. En el primer caso x es un número y podemos medir la distancia entre x y x_n. En cambio, ∞ no es un número. Sin embargo, podemos unificar las tres definiciones de límite de la siguiente manera.

Definición 3.5 Una *vecindad de* ∞ en $\mathbb{R}^*$ es cualquier intervalo de la forma $(a, \infty]$, donde $a \in \mathbb{R}$. Una *vecindad de* $-\infty$ es cualquier intervalo de la forma $[-\infty, b)$, donde $b \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta el Teorema 3.3 podemos afirmar lo siguiente: si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim x_n = x$ sí y sólo sí cada vecindad de x contiene a todos los puntos x_n, excepto, quizás, para una cantidad finita de índices n.

Las sucesiones que no tienen límite en el sentido que acabamos de describir, se conocen como *sucesiones oscilantes.*

Ejemplo 3.3
Sea $x_n = (-1)^n$. Si n es par, $x_n = 1$ mientras que si n es impar, $x_n = -1$; pero ni 1 ni -1 pueden ser límites de esta sucesión: supongamos que 1 es límite, entonces a partir de un cierto entero N, todos los términos de la sucesión deberían estar en la vecindad $B(1; 0{,}2)$: $\;n > N \;\Rightarrow\; x_n \in B(1; 0{,}2)$. Pero si $n > N$ es impar entonces $x_n = -1 \notin B(1; 0{,}2)$, y la sucesión no converge a 1. De manera similar se muestra que tampoco converge a -1.

Uno podría pensar que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente con límite x y b es un número real tal que $x_n < b$ para todos los índices $n \in \mathbb{N}$, entonces

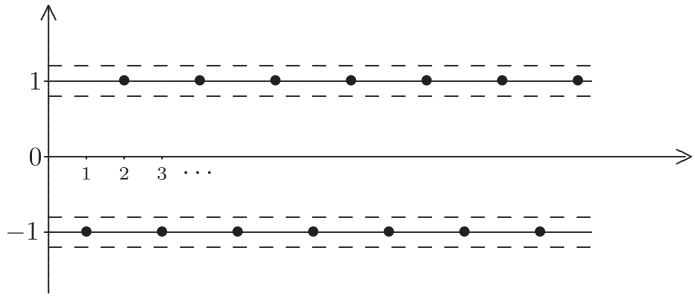

Figura 3.5: La sucesión $(-1)^n$.

también $x < b$. Pero esto no es cierto: basta tomar $x_n = 1 - 1/n$ para todos los enteros positivos n, $x = 1$ y $b = 1$. Con este ejemplo vemos que el resultado del próximo teorema es lo mejor que se puede esperar.

Teorema 3.5 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de números reales con límite x. Si $b \in \mathbb{R}$ es tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq b$.*

Demostración. Supongamos que $x > b$, entonces tomando $h = \frac{x-b}{2} > 0$ existe $N_h \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x; h)$ para todo $n \geq N_h$ y esto implica

$$x_n > x - h = x - \frac{1}{2}(x - b) > b + \frac{1}{2}(x - b) > b$$

lo que contradice la hipótesis.

■

Corolario 3.1 *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones convergentes de números reales con límites x e y respectivamente. Si $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$.*

Demostración. Aplicamos el teorema anterior a la sucesión $z_n = x_n - y_n$. Esta sucesión tiene límite $x - y$ y como $z_n \leq 0$ para todo n, $x - y \leq 0$.

■

Corolario 3.2 *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de números reales con $y_n \leq x_n \leq z_n$ para todo n y $\lim y_n = \lim z_n = \ell$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim x_n = \ell$.*

Demostración. Ejercicio.

Definición 3.6 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Definimos

$$\sup_n x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \inf_n x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ejemplos 3.4

1. Para la sucesión $x_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = -1$.
2. Para la sucesión $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\sup x_n = 1$, $\inf x_n = 0$.

3.2.2. Sucesiones Monótonas

Definición 3.7 Si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es *creciente* y escribimos $a_n \nearrow$. Es útil considerar el crecimiento de la sucesión en sentido amplio, permitiendo que términos sucesivos sean iguales. Si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión es *estrictamente creciente* y escribimos $a_n \uparrow$. Si $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que la sucesión es *decreciente*, escribimos $a_n \searrow$, y si $x_{n+1} < x_n$ para todo n, que es *estrictamente decreciente* y escribimos $a_n \downarrow$. Decimos además que cualquiera de estas sucesiones es *monótona.*

Ejemplos 3.5

1. La sucesión $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, es creciente.
2. La sucesión $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, es decreciente.
3. La sucesión $x_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, no es monótona.

Probaremos a continuación una propiedad importante de las sucesiones monótonas: no pueden ser oscilantes.

Teorema 3.6 *Toda sucesión monótona en $\mathbb{R}^*$ tiene límite en $\mathbb{R}^*$. Una sucesión monótona en $\mathbb{R}$ converge sí y sólo sí es acotada.*

Demostración. Consideremos una sucesión creciente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^* : x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ y sea $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $x = \lim x_n$:

Caso 1: $x = -\infty$, entonces $x_n = -\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y es fácil ver que $\lim x_n = -\infty$.

Caso 2: $x = \infty$, es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente. Por lo tanto, dado $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > M$. Pero como la sucesión es creciente se cumple que

$$n \geq N \Rightarrow \quad x_n \geq x_N > M$$

es decir, $\lim x_n = \infty$

Caso 3: $x \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > x - \epsilon$. De nuevo, como la sucesión es creciente

$$n \geq N \Rightarrow \quad x - \epsilon < x_N \leq x_n \leq x$$

de modo que si $n \geq N, d(x_n, x) < \epsilon$ y concluimos que $\lim x_n = x$.

La demostración para sucesiones decrecientes es similar tomando $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

■

Corolario 3.3 *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $\mathbb{R}^*, \lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente en $\mathbb{R}^*$, $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Ejemplo 3.6
La sucesión a^n.

Un ejemplo útil e importante es el de la sucesión $x_n = a^n$, para $a \in \mathbb{R}$. El comportamiento de esta sucesión cuando $n \to \infty$ depende del valor de a.

1. Si $a = 0, x_n = a^n = 0$ y $\lim x_n = 0$.

2. Si $a = 1, x_n = a^n = 1$ y $\lim x_n = 1$.

3. Si $a = -1$, la sucesión toma alternadamente los valores $+1$ y -1 y es oscilante.

4. Si $a > 1$ la sucesión $x_n = a^n$ es creciente:

$$x_n - x_{n-1} = a^n - a^{n-1} = a^{n-1}(a-1) > 0.$$

   Por el Corolario 3.3, $\lim x_n = \sup x_n$. Veamos que la sucesión no está acotada. Sea $k = a - 1 > 0$ y escribamos $a = 1 + k$. Usando el desarrollo binomial obtenemos

$$x_n = a^n = (1+k)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^j > 1 + nk$$

   Como $k > 0$, la sucesión $(1 + nk)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada y por lo tanto tampoco lo está $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

5. Si $0 < a < 1$ entonces $1 < a^{-1}$. Sea $k > 0$ tal que $a^{-1} = 1 + k$. Entonces

$$0 < x_n = \frac{1}{(1+k)^n} < \frac{1}{1+nk}.$$

   Es fácil ver que cuando $n \to \infty, 1/(1 + nk) \to 0$, de modo que por el Corolario 3.2, $x_n \to 0$.

6. Si $a < -1$ entonces $a = -b$, con $b > 1$ y por (4) $b^n \to \infty$. Por lo tanto la sucesión $(b_n)^n$ toma alternadamente valores positivos y negativos que son cada vez mas grandes en valor absoluto, es decir la serie es oscilante y no es acotada.

Resumiendo tenemos

(1)	$a > 1,$	$a^n \to \infty.$
(2)	$a = 1,$	$a^n \to 1.$
(3)	$-1 < a < 1,$	$a^n \to 0.$
(4)	$a = -1,$	a^n oscila y es acotada.
(5)	$a < -1,$	a^n oscila y no es acotada.

3.2.3. El número e

Proposición 3.1 El número e**.** *Para* $n \in \mathbb{N}$ *sean*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

entonces $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es creciente,* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *es decreciente y ambas sucesiones convergen al mismo límite. Este límite común se denota por* e *y se cumple que* $2 < e < 4$.

Demostración. Necesitamos el siguiente resultado, conocido como la desigualdad de Bernoulli (ver Ejercicio 1.4.4). En la parte (4) del ejemplo anterior demostramos un caso particular:

Si $x \geq -1$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces $(1 + x)^k \geq 1 + kx$. Hay igualdad solo si $k = 1$ ó $x = 0$.

Haremos la demostración de la monotonía de las sucesiones por inducción. Veamos que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente: queremos ver que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Multiplicando y dividiendo el primer término por $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ esto es equivalente a

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

y esto es

$$\frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1},$$

por lo tanto queremos ver que

$$\frac{n}{n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

y esto es cierto por la desigualdad de Bernoulli, tomando $x = \frac{-1}{(n+1)^2}$ y $k = n+1$.

Veamos que la sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. Queremos mostrar que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2},$$

es decir

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

y esto equivale a

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1},$$

o sea

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1+\frac{1}{n+1}.$$

Por la desigualdad de Bernoulli con $k=n+1$ y $x=\frac{1}{n(n+2)}$ tenemos

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1+\frac{n+1}{n(n+2)} > 1+\frac{1}{n+1}$$

ya que

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1.$$

Hemos visto entonces que (a_n) es creciente y (b_n) es decreciente. Además $a_n < b_n$ y por monotonía de las sucesiones, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$2 = a_0 \leq a_n < b_n \leq b_0 = 4$$

es decir, las sucesiones están acotadas y como son monótonas, ambas convergen. Supongamos que $a_n \to a$ y $b_n \to b$, usando la monotonía de nuevo y el Corolario 3.1 tenemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq a \leq b \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

de aquí obtenemos

$$1 \leq \frac{b}{a} \leq 1+\frac{1}{n}.$$

Como esto es cierto para todo n concluimos que $a=b$. ■

Ejercicios 3.2

1. *Si* $\lim x_n = x$ *entonces* $\lim |x_n| = |x|$*, pero el recíproco es falso a menos que* $x=0$.
2. *Si* $x>0$, $\lim x^{1/n} = 1$.
3. *Demuestre que para cualquier* $x \in \mathbb{R}$, $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$. *Deduzca que* $((n!)^{1/n})$ *no es acotada.*
4. *Discuta el comportamiento cuando* $n \to \infty$*, de la sucesión* a^n/n^k*, donde* k *es un entero positivo fijo.*
5. *Si* $s_1 > 0$ *y* $s_{n+1} \geq K s_n$*, donde* $K > 1$*, para todos los valores de* n*, entonces* $s_n \to +\infty$.
6. *Si para todo* n, $|s_{n+1}| \leq K|s_n|$*, donde* $0 < K < 1$*, entonces* $s_n \to 0$*. La conclusión es válida si la hipótesis se satisface sólo para* $n > N$.
7. *Si* $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = h$*, con* $-1 < h < 1$*, muestre que* $x_n \to 0$*. Si* $h > 1$ *demuestre que* (x_n) *no está acotada. Si* $h = 1$ *la sucesión puede ser convergente o divergente. De ejemplos de sucesiones* x_n *para las cuales* $h = 1$ *y (a)* $x_n \to \infty$*, (b)* $x_n \to 5$*, (c)* $x_n \to 0$.

8. *Si $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $x_n^{1/n} \to h$ cuando $n \to \infty$ demuestre que si $h < 1$, (x_n) converge a cero mientras que si $h > 1$, (x_n) no está acotada. Si $h = 1$, (x_n) puede ser convergente o divergente. De ejemplos de sucesiones s_n para las cuales $h = 1$ y (a) $s_n \to \infty$, (b) $s_n \to 5$, (c) $s_n \to 0$.*

9. *Si $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = h$ demuestre que $x_n^{1/n} \to h$ cuando $n \to \infty$. En consecuencia, el método del problema 8 es más fuerte que el del problema 7. (Ayuda: Si $h > 0$ y $0 < \varepsilon < h$, demuestre que para algún $N \in \mathbb{N}$:*

$$x_N(h-\varepsilon)^{n-N} < x_n < x_N(h+\varepsilon)^{n-N} \qquad \text{si } n > N.$$

Luego use el problema 2 para mostrar que existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N'$, $h - \varepsilon < x_n^{1/n} < h + \varepsilon$).

10. *Demuestre que si (a_n) converge a cero y (b_n) está acotada, entonces $(a_n b_n)$ converge a cero. En cambio, si (a_n) converge a un número distinto de cero, es posible que $(a_n b_n)$ no converja.*

11. *Demuestre que*

$$\sup_n \frac{1}{1+n+n^2} = \frac{1}{3}, \qquad \inf_n \frac{1}{1+n+n^2} = 0$$

12. *De un ejemplo de una sucesión (x_n) para la cual, si A es un conjunto finito cualquiera de valores de la sucesión, $\inf x_n < \inf A < \sup A < \sup x_n$.*

13. *Si $(x_n), (y_n)$ son sucesiones acotadas y positivas de números reales, demuestre que $\sup(x_n y_n) \leq \sup x_n \cdot \sup y_n$, $\inf(x_n y_n) \geq \inf x_n \cdot \inf y_n$.*

14. *Si x_n converge a x e y_n converge a y, entonces $\max\{x_n, y_n\}$ converge a $\max\{x, y\}$ y $\min\{x_n, y_n\}$ converge a $\min\{x, y\}$.*

15. *Si (x_n) es una sucesión acotada demuestre que*

$$\sup \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sup x_n, \qquad \inf \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \inf x_n,$$

y si $x_n \geq 0$ entonces

$$\sup(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \sup x_n, \qquad \inf(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \geq \inf x_n.$$

16. *Sea (x_n) una sucesión monótona. Muestre que $(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ es monótona y crece o decrece según x_n sea creciente o decreciente.*

17. *Si (x_n) es una sucesión de números reales, (y_n) una sucesión de reales positivos y (x_n/y_n) es monótona, entonces la sucesión definida por $z_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$ es monótona.*

18. *Sea $0 < a < b < \infty$. Definimos $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = (x_n + x_{n+1})/2$. ¿Es convergente la sucesión (x_n)? Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuál es el límite?*

3.3. Límites superior e inferior de una sucesión.

Definición 3.8 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\alpha_k = \sup_{n \geq k} x_n; \qquad \beta_k = \inf_{n \geq k} x_n.$$

Vemos que la sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente mientras que $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente. Definimos el *límite superior* de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ó $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} x_n$ por

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n,$$

y el *límite inferior* de la sucesión: $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ó $\operatorname{liminf}_{n\to\infty} x_n$ por

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \beta_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n.$$

Ambos límites están siempre definidos y son elementos de $\mathbb{R}^*$. Por la monotonía de las sucesiones (α_k) y (β_k) tenemos

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k}\; x_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k}\; x_n,$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k}\; x_n = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k}\; x_n.$$

Además como $\beta_k \leq \alpha_k$ para todo k se tiene que

$$\underline{\lim}\; x_n \leq \overline{\lim}\, x_n.$$

Una forma equivalente de escribir ambas definiciones es la siguiente:

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq 1}\; x_{n+p},$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{p\geq 1}\; x_{n+p}.$$

Teorema 3.7 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$ y $a, b \in \mathbb{R}^*$. Entonces*

1. *$\overline{\lim}\, x_n = a$ sí y sólo sí se cumplen las siguientes dos condiciones:*
   - *a) Si $\alpha < a$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} :\; x_n > \alpha\}$ es infinito.*
   - *b) Si $\beta > a$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} :\; x_n > \beta\}$ es finito.*
2. *$\underline{\lim}\, x_n = b$ sí y sólo sí se cumplen las siguientes dos condiciones:*
   - *a) Si $\alpha < b$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} :\; x_n < \alpha\}$ es finito.*
   - *b) Si $\beta > b$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} :\; x_n < \beta\}$ es infinito.*

Demostración. Haremos solo el caso (1) con a finito. Sea $\alpha_k = \sup_{n\geq k} x_n$ y $a = \lim \alpha_k$. Sea $\alpha < a$, entonces $\alpha_k > \alpha$ para todo k. Por la definición de α_k, para cada k existe $n_k \geq k$ tal que $\alpha_k \geq x_{n_k} > \alpha$. Por lo tanto

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \alpha\} \supset \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$$

y este último conjunto es infinito.

Sea ahora $a < \beta$. Como $\alpha_k \searrow a$ existe k_0 tal que $\alpha_{k_0} < \beta$ y por lo tanto si $n \geq k_0$, $x_n \leq \alpha_{k_0} < \beta$. Esto quiere decir que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta\}$ es finito.

Supongamos ahora que se satisfacen las condiciones 1.a) y b). Si $-\infty < a < \infty$, dado $\beta > a$ podemos escoger $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq \beta$ para todo $n \geq k_0$. Por lo tanto $\alpha_k \leq \alpha_{k_0} \leq \beta$ para todo $k \geq k_0$ y $\operatorname{limsup} x_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \leq \beta$. Como esto es cierto para todo $\beta > a$ concluimos que $\operatorname{limsup} x_n \leq a$. Por otro lado, si $\alpha < a$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \alpha\}$ es infinito y por lo tanto $\alpha_k > \alpha$ y $\operatorname{limsup} x_n = \lim \alpha_k \geq \alpha$. Como esto es válido para cualquier $\alpha < a$ concluimos que $\operatorname{limsup} x_n \geq a$.

■

Teorema 3.8 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$. Entonces $\lim x_n$ existe en $\mathbb{R}^*$ sí y sólo sí $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. En este caso $\lim x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$.*

Demostración. Supongamos que $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \ell$. Si $\ell \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{p\geq 1} x_{n+p}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{p\geq 1} x_{n+p}\right) = \ell$$

y dado $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\sup_{p\geq 1} x_{n+p} \leq \ell + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N,$$

$$\inf_{p\geq 1} x_{n+p} \geq \ell - \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por lo tanto

$$\ell - \epsilon \leq x_n \leq \ell + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N + 1$$

y de aquí concluimos que $x_n \to \ell$ cuando $n \to \infty$.

Si $\ell = +\infty$, entonces 1.a) del Teorema 3.7 dice que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \alpha$ para todo $n > N$, y por lo tanto $\lim x_n = +\infty$.

De manera similar se trata el caso $\ell = -\infty$.

Supongamos ahora que $\lim x_n = \ell$. Si $\ell \in \mathbb{R}$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Por lo tanto

$$\ell - \epsilon \leq \inf_{p\geq 1} x_{n+p} \leq \sup_{p\geq 1} x_{n+p} \leq \ell + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N$$

y entonces

$$\ell - \epsilon \leq \lim\left(\inf_{p\geq 1} x_{n+p}\right) \leq \lim\left(\sup_{p\geq 1} x_{n+p}\right) \leq \ell + \epsilon$$

Como esto es cierto para cualquier ϵ concluimos

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \ell.$$

Si $\lim x_n = +\infty$, dado $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n > M$. Por lo tanto

$$\inf_{p \geq 1} x_{n+p} \geq M \qquad \text{para } n \geq N$$

y en consecuencia

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim \inf_{p \geq 1} x_{n+p} \geq M.$$

Esto quiere decir que $+\infty = \underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n \leq +\infty$.

De manera similar se muestra el resultado en el caso $\lim x_n = -\infty$.

■

Definición 3.9 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$. Un punto $x \in \mathbb{R}^*$ es un *punto de acumulación* de la sucesión si toda vecindad de x contiene a infinitos elementos de la sucesión. Es decir, si $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, x es un punto de acumulación de la sucesión sí y sólo sí es punto de acumulación del conjunto B.

Teorema 3.9 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$ y sea A el conjunto de puntos de acumulación de esta sucesión. Entonces*

i) $\underline{\lim}\, x_n \in A$ *y* $\overline{\lim}\, x_n \in A$.

ii) $\underline{\lim}\, x_n \leq c \leq \overline{\lim}\, x_n$ *para todo* $c \in A$.

Demostración. Esto es consecuencia inmediata del Teorema 3.7. ■

Corolario 3.4 *Una sucesión en $\mathbb{R}^*$ tiene límite en $\mathbb{R}^*$ sí y sólo sí tiene un solo punto de acumulación.*

Ejercicios 3.3

1. *Si $x_n = (-1)^n$, muestre que $\overline{\lim} x_n = 1$, $\underline{\lim} x_n = -1$.*
2. *Sean (x_n) e (y_n) sucesiones reales acotadas, entonces*

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \begin{matrix} \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \\ \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \end{matrix}$$
$$\leq \overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n.$$

   De ejemplos que muestren que estas desigualdades pueden ser estrictas.

3. *Sean (x_n) y (y_n) sucesiones acotadas de números reales positivos. Demuestre que*

$$\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\,(x_n \cdot y_n) \leq \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\,(x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n.$$

4. *Sea $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Demuestre que*

$$\underline{\lim}\, \frac{s_{n+1}}{s_n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{s_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{s_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{s_{n+1}}{s_n}.$$

5. *Demuestre que si x_n es una sucesión acotada de números reales,*

$$\underline{\lim}\,(x_n - x_{n+1}) \leq 0 \leq \overline{\lim}\,(x_n - x_{n+1}).$$

3.4. Sucesiones de Cauchy

En lo que hemos estudiado hasta ahora, para poder determinar si una sucesión x_n converge es necesario saber previamente el valor de su límite x, para así poder calcular la distancia del término n-ésimo x_n al límite x: $|x_n - x|$ y aplicar la definición 3.2. En muchas situaciones esto resulta inconveniente (y aún imposible), por la dificultad en determinar el valor del límite. Sería sumamente útil en estos casos, disponer de un criterio que permita determinar si una sucesión converge, sin que sea necesario determinar previamente el valor del límite,

Esto es posible gracias al Criterio de Cauchy, que se basa en el cálculo de la distancia entre términos de la sucesión, y que estudiamos a continuación.

Definición 3.10 Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X, d) es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ hay un entero N tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ si $n \geq N, m \geq N$.

Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy: si $\lim x_n = x$ y $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq N$. Por lo tanto, si $n \geq N, m \geq N$ se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon.$$

El recíproco no siempre es cierto.

Definición 3.11 Sea (X, d) un espacio métrico. Si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X converge a un punto $x \in X$, decimos que el espacio X es *completo*.

Un ejemplo de un espacio métrico que no es completo es el de los racionales con la distancia usual.

Teorema 3.10 $\mathbb{R}$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Suponemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ y $m > N$ entonces $|x_n - x_m| < \epsilon$. Tomemos $\epsilon = 1$ y $m = N + 1$, obteniendo

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \qquad \text{para todo } n > N.$$

Por lo tanto

$$|x_n| \leq \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}$$

de donde concluimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada. Sea $\beta = \overline{\lim}\, x_n$, tenemos la siguiente propiedad: dado $\epsilon > 0$ hay un N tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ si $n \geq N$ y $m \geq N$. Por el Teorema 3.7, parte 1.a. existe $M > N$ tal que $|\beta - x_M| < \epsilon$. Por la desigualdad triangular tenemos que para $n > N$

$$|x_n - \beta| \leq |x_n - x_M| + |x_M - \beta| < 2\epsilon$$

de donde concluimos que x_n converge a β cuando $n \to \infty$.

■

Ejercicios 3.4

1. *Demuestre que todo espacio métrico discreto es completo.*
2. *Si (X, d) es completo y $A \subset X$ es cerrado, entonces (A, d_A) es completo, donde d_A es la restricción de la métrica d al conjunto A.*
3. *En cualquier espacio métrico, una sucesión de Cauchy es convergente sí y sólo sí tiene una subsucesión convergente.*
4. *Demuestre que (x_n, y_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^2$ sí y sólo sí (x_n) e (y_n) son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$.*

3.5. Subsucesiones.

Definición 3.12 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en el conjunto X. Si $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, decimos que la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una *subsucesión* de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 3.11 *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en (X, d), $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$ sí y sólo sí toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

Demostración. Supongamos que x_n converge a x y sea $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Dado $\epsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $x_n \in B(x; \epsilon)$. Para la subsucesión tomamos $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$. Entonces para todo $k \geq K$ se tiene $x_{n_k} \in B(x, \epsilon)$ y $x_{n_k} \to x$ cuando $k \to \infty$.

Por otro lado, si toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, basta considerar $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ como subsucesión de sí misma.

■

Teorema 3.12 *Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de los valores que toma la sucesión. Por el Teorema 3.9, $\underline{\lim}\, x_n$ es punto de acumulación de E y por el Teorema 3.3 (ii) existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a $\underline{\lim}\, x_n$.

■

Ejemplo 3.7
Tomemos $x_n = (-1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$x_{2k} = 1, \quad x_{2k-1} = -1.$$

Por lo tanto hay subsucesiones que convergen a cada uno de estos valores.

Teorema 3.13 *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. K es compacto sí y sólo sí toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto de K*

Demostración. Supongamos que K es compacto y sea $(\mathbf{x}_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en K. Como este conjunto es compacto sabemos que es cerrado y acotado, y por lo tanto, la sucesión $(\mathbf{x}_j)$ es acotada. Si $\mathbf{x}_j = (x_j^1,\ x_j^2, \ldots,\ x_j^n)$, consideremos la sucesión $(x_j^1)_{j=1}^{\infty}$ de las primeras coordenadas, que es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Por el Teorema 3.12 existe una subsucesión convergente $(x_{j_i}^1)_{i=1}^{\infty}$ cuyo límite llamaremos x^1. Si tomamos ahora la subsucesión de segundas coordenadas $(x_{j_i}^2)_{i=1}^{\infty}$ con índices iguales a los de la subsucesión convergente de primeras coordenadas que acabamos de hallar y usamos el mismo argumento obtenemos una nueva subsucesión $(x_{j_{i_k}}^2)_{k=1}^{\infty}$ que converge a un real x^2 y además la subsucesión $(x_{j_{i_k}}^1)_{k=1}^{\infty}$ converge a x^1 por el Teorema 3.11.

Repetimos ahora este argumento considerando todas las coordenadas una por una y terminamos con una subsucesión de índices (j_h) tal que todas las sucesiones de coordenadas tomadas sobre esta subsucesión de índices son convergentes, lo cual quiere decir que

$$\mathbf{x}_{j_h} = (x_{j_h}^1,\ x_{j_h}^2, \ldots,\ x_{j_h}^n) \ \to\ \mathbf{x} = (x^1,\ x^2, \ldots,\ x^n) \in K.$$

Supongamos ahora que toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto de K y sea E un subconjunto infinito de K, entonces podemos encontrar una sucesión $(\mathbf{x}_j)_{j=1}^{\infty}$ en E tal que todos sus términos son distintos. Por hipótesis esta sucesión tiene una subsucesión convergente. El límite de esta subsucesión es un punto de acumulación de E y por el Teorema 2.14, K es compacto.

■

Ejercicios 3.5

1. *Construya una sucesión divergente en $\mathbb{R}$ que tenga una subsucesión convergente.*
2. *Muestre que toda sucesión real tiene una subsucesión monótona.*

Ejercicios Complementarios

1. *Las notaciones o, O y $\sim$.*

   Estas notaciones fueron introducidas por Landau y resultan muy convenientes para considerar las propiedades de sucesiones de números reales. Sea (x_n), (y_n) sucesiones de números reales. La notación $x_n = O(1)$ indica que la sucesión x_n es acotada, es decir, que existe M tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $y_n \geq 0$, la notación $x_n = O(y_n)$ indica que existe M tal que $|x_n| < Ky_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   a*) Demuestre que*

   $$(i)\ 32n^2 + 5n = O(n^2), \quad (ii)\ n^2 = O(32n^2 + 5n), \qquad (iii)\ n = O(n^2).$$

   b*) Suponga que $x_n = O(y_n)$, $y_n = O(z_n)$, demuestre que*

   $$(i)\ -x_n = O(b_n), \quad (ii)\ x_n = O(z_n),$$
   $$(iii)\ x_n + y_n = O(z_n), \quad (iv)\ x_n^2 = O(y_n^2).$$

c) *Suponga* $x_n = O(y_n)$*, demuestre que* $(x_1 + \cdots + x_n)/n = O(y_1 + \cdots + y_n/n)$ *y si además* $x_n \geq 0$ *entonces* $(x_1 \cdots x_n)^{1/n} = O((y_1 \cdots y_n)^{1/n})$.

Si x_n *es una sucesión de números con* $x_n \to 0$ *cuando* $n \to 0$*, escribimos* $x_n = o(1)$*. Si* y_n *es una sucesión estrictamente positiva y* $x_n/y_n = o(1)$*, escribimos* $x_n = o(y_n)$.

Si (x_n)*,* (y_n) *satisfacen* $x_n/y_n \to 1$ *cuando* $n \to \infty$ *escribimos* $x_n \sim y_n$.

d) *Demuestre*

$$(i)\ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} = o(1), \quad (ii)\ (-1)^n n^2 = O(n^2), \quad (iii)\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

e) *Demuestre las siguientes proposiciones*

(*i*) *Si* $x_n = o(1)$ *e* $y_n = O(1)$ *entonces* $x_n y_n = o(1)$.

(*ii*) *Si* $x_n = o(y_n)$ *e* $y_n = O(z_n)$ *entonces* $x_n = o(z_n)$.

(*iii*) *Si* $x_n = o(y_n)$ *e* $y_n \sim z_n$ *entonces* $x_n = o(z_n)$.

(*iv*) *Si* $x_n \sim y_n$ *e* $y_n \sim z_n$ *entonces* $x_n \sim z_n$.

(*v*) *Si* $x_n \sim y_n$ *e* $y_n = o(1)$ *entonces* $x_n = o(1)$.

f) *Suponga que* $x_n - y_n = o(1)$, $1/y_n = O(1)$*, demuestre que* $x_n \sim y_n$*. De un ejemplo de sucesiones* x_n*,* y_n *para las cuales la relación* $x_n - y_n = o(1)$ *es cierta pero la relación* $x_n \sim y_n$ *es falsa.*

g) *Suponga que* $x_n \sim y_n$*,* $y_n = O(1)$*, demuestre que* $x_n - y_n = o(1)$*. De un ejemplo de sucesiones* x_n*,* y_n *para las cuales la relación* $x_n \sim y_n$ *es cierta pero la relación* $x_n - y_n = o(1)$ *es falsa.*

2. Construcción de los Números Reales por sucesiones de Cauchy.

a) *Decimos que dos sucesiones de Cauchy* (x_n)*,* (y_n) *de números racionales son equivalentes si* $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$*, y en este caso usamos la notación* $(x_n) \approx (y_n)$*. Demuestre que esta es una relación de equivalencia. En consecuencia podemos dividir el conjunto de las sucesiones de Cauchy racionales en clases de equivalencia:*

$$\overline{(x_n)} = \{(y_n) : (y_n) \text{ es una sucesión de Cauchy racional y } (y_n) \approx (x_n)\}$$

Los números reales $\mathbb{R}$ *son estas clases de equivalencia. El conjunto* $\mathbb{Q}$ *de los números racionales puede ser considerado como subconjunto de* $\mathbb{R}$ *identificando cada número racional* q *con la clase de equivalencia que corresponde a la sucesión constante* $\{q, q, q, \dots\}$*:* $\overline{\{q, q, \dots\}}$.

b) *Definimos ahora las operaciones de suma y multiplicación entre números reales. Supongamos que* $x = \overline{(x_n)}$ *e* $y = \overline{(y_n)}$ *son dos números reales, definimos*

$$x + y = \overline{(x_n + y_n)}, \qquad x \cdot y = \overline{(x_n \cdot y_n)}.$$

Verifique que ambas sucesiones $(x_n + y_n)$ *y* $(x_n \cdot y_n)$ *son sucesiones racionales de Cauchy. Verifique también que la definición es consistente, es decir, que no depende de los representantes de las clases de equivalencia que escojamos. Finalmente, verifique que con estas operaciones los números reales satisfacen los axiomas i) - ix) del Capítulo 1.*

c) *Sean* $x = \overline{(x_n)}$ *e* $y = \overline{(y_n)}$ *dos números reales, decimos que* $x < y$ *si existen un racional* $\varepsilon' > 0$ *y* $N \in \mathbb{N}$ *tales que para todo* $n \geq N$ *se tiene que* $x_n \leq y_n - \varepsilon'$*, y decimos que* $x \leq y$ *si* $x < y$ *ó* $x = y$*. Verifique que la relación está bien definida (no depende de los representantes escogidos en las clases de equivalencia). ¿Por que no es suficiente pedir que* $x_n < y_n$*? Demuestre que esta es una relación de orden (es reflexiva, antisimétrica y transitiva) y satisface los axiomas x) - xii) del Capítulo 1.*

d) *Definimos el valor absoluto de una número real* $x = \overline{(x_n)}$ *por* $|x| = \overline{(|x_n|)}$*. Demuestre que la desigualdad triangular es válida y en consecuencia podemos definir una métrnúmeros reales usando el valor absoluto de la diferencia entre ellos.*

e) *Pruebe que una sucesión de números reales es convergente sí y sólo sí es una sucesión de Cauchy.*

f) *Finalmente demuestre que los números reales satisfacen el axioma de completitud.*